$$n \approx \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\right]$$

$$\approx 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0 - \omega)}{\gamma^2 \omega_0}$$

Bài tập và lời giải cúa các

Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI

ĐIỆN TỪ HỌC

PROBLEMS AND SOLUTIONS ON ELECTROMAGNETISM

Biên soạn:
Trường Đại học Khoa học
và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:
Yung-Kuo Lim



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÀI TẬP & LỜI GIẢI

ĐIỆN TỪ HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

Người dịch:

TS. LÊ HOÀNG MAI

TS. TRẦN THỊ ĐỨC

GS.TSKH. ĐÀO KHẮC AN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Problems and Solutions on Electromagnetism

Compiled by
The Physics Coaching Class
University of Science and Technology of China

Edited by
Lim Yung-kuo
National University of Singapore

New Jersey.London.Singapore.Hong Kong

First published 1993
Reprinted 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2003, 2005

114-2010/CXB/46-129/GD Mã số: 8Z075z0-SBQ

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Bộ sách ***Bài tập và lời giải Vật lý*** *gồm bảy cuốn:*

1. *Cơ học*
2. *Cơ học Lượng tử*
3. *Quang học*
4. *Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê*
5. *Điện từ học*
6. *Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản*
7. *Vật lý chất rắn. Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan*

Đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kĩ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wiscosin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C Ting (CCT) soạn đề tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiểm tra, hiệu đính. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện từ học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kĩ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một việc tất yếu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm củng cố lý thuyết đã học và trau dồi kĩ năng thực hành. Trong cuốn Điện từ học có 440 bài tập và lời giải: tĩnh điện học (108 bài), trường từ tĩnh và trường điện từ chuẩn dừng (119 bài), phân tích mạch điện (90 bài), các sóng điện từ (67 bài) và thuyết tương đối, tương tác hạt - trường (56 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành Điện từ học. Ngoài ra, một số kết quả nghiên cứu gần đây cũng được đưa vào cuốn sách này, nhằm giúp người học không chỉ nắm bắt lý thuyết cơ bản mà còn có thể vận dụng kiến thức cơ bản một cách sáng tạo vào việc học tập và nghiên cứu.

MỤC LỤC

Phần IV: Các sóng điện từ

Phần V: Thuyết tương đối, tương tác hạt - trường

PHẦN I

TĨNH ĐIỆN HỌC

1. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TĨNH ĐIỆN (1001–1023)

1001

Một phân bố điện tích tĩnh sinh ra một điện trường xuyên tâm

$$\mathbf{E} = A\frac{e^{-br}}{r}\mathbf{e}_r \,,$$

trong đó A và b là các hằng số.

(a) Hãy xác định mật độ điện tích là bao nhiêu. Vẽ phác đồ thị của nó.

(b) Tính điện tích toàn phần Q.

(MIT)

Lời giải:

(a) Mật độ điện tích được tính theo phương trình Maxwell là

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \,.$$

Vì $\nabla \cdot u\mathbf{v} = \nabla u \cdot \mathbf{v} + u\nabla \cdot \mathbf{v}$, ta có

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = A\left[\nabla(e^{-br}) \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} + e^{-br}\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)\right].$$

Sử dụng hàm Dirac $\delta(\mathbf{r})$ với các tính chất sau

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{với} \quad \mathbf{r} \neq 0 \,,\\ &= \infty \quad \text{với} \quad \mathbf{r} = 0 \,,\end{aligned}$$

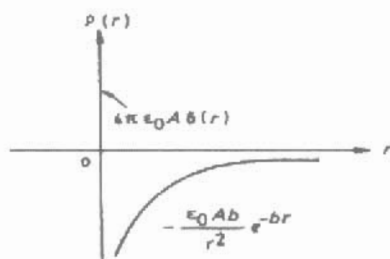
Ta có

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \,.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0 A\left[-\frac{be^{-br}}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + 4\pi e^{-br}\delta(\mathbf{r})\right]\\ &= -\frac{\varepsilon_0 Ab}{r^2}e^{-br} + 4\pi\varepsilon_0 A\,\delta(\mathbf{r}) \,.\end{aligned}$$

Do đó sự phân bố điện tích bao gồm một điện tích dương $4\pi\varepsilon_0 A$ ở gốc toạ độ và một phân bố điện tích âm đối xứng cầu trong không gian bao quanh, như được chỉ ra trên hình 1.1.



Hình 1.1

(b) Điện tích toàn phần là

$$Q = \int_{\text{toàn không gian}} \rho\, dV$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 A b e^{-br}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{\text{toàn không gian}} 4\pi\varepsilon_0 A\, \delta(\mathbf{r}) dV$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 A[e^{-br}]_0^\infty + 4\pi\varepsilon_0 A$$

$$= -4\pi\varepsilon_0 A + 4\pi\varepsilon_0 A = 0\,.$$

Cũng có thể sử dụng định lý thông lượng Gauss

$$Q = \lim_{r\to\infty} \oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon_0 A e^{-br}}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= \lim_{r\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 A e^{-br} = 0\,,$$

ta cũng nhận được kết quả trùng với lời giải trên.

1002

Giả thiết rằng, thay vì định luật Coulomb, bằng thực nghiệm người ta tìm được lực giữa hai điện tích bất kì q_1 và q_2 là

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(1-\sqrt{\alpha r_{12}})}{r_{12}^2}\mathbf{e}_r\,,$$

trong đó α là một hằng số.

(a) Hãy tìm điện trường $\mathbf{E}$ thích hợp bao quanh một điện tích điểm q.

(b) Chọn một đường bao quanh điện tích điểm này và tính tích phân đường $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb.

(c) Tìm $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ trên một mặt cầu bán kính r_1 có điện tích điểm đặt tại tâm. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb.

(d) Lặp lại (c) với bán kính $r_1 + \Delta$ và tìm $\nabla \cdot \mathbf{E}$ tại một khoảng cách r_1 tính từ điện tích điểm đó. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb. Chú ý rằng Δ là một đại lượng nhỏ.

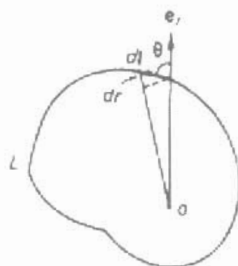
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Điện trường bao quanh điểm điện tích q là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}(1 - \sqrt{\alpha r})\mathbf{e}_r ,$$

ở đây r là khoảng cách giữa một điểm trong không gian với điện tích điểm q và $\mathbf{e}_r$ là vectơ đơn vị có hướng từ q tới điểm không gian đó.



Hình 1.2

(b) Như ta thấy trên hình 1.2, đối với đường khép kín L, ta tìm được

$$d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_r = dl\cos\theta = dr$$

và

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}(1 - \sqrt{\alpha r})dr$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) + 2\sqrt{\alpha}\oint_L d\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right] = 0 .$$

Từ định luật Coulomb $\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\mathbf{e}_{r_{12}}$, ta nhận được điện trường của điện tích điểm

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \,.$$

Hiển nhiên, ta có

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \,.$$

Như vậy, kết quả tính theo định luật Coulomb cũng giống như kết quả của bài tập này.

(c) Lấy S là một mặt cầu có bán kính r_1 với điện tích q nằm ở tâm của nó. Định nghĩa yếu tố bề mặt $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_r$, ta có

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1^2}(1 - \sqrt{\alpha r_1}\,)dS$$
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}(1 - \sqrt{\alpha r_1}\,) \,.$$

Từ định luật Coulomb và định luật Gauss ta nhận được

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \,.$$

Như vậy, hai kết quả sai khác nhau một lượng $\frac{q}{\varepsilon_0}\sqrt{\alpha r_1}$.

(d) Sử dụng kết quả của (c), tích phân mặt tại $r_1 + \Delta$ là

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}(1 - \sqrt{\alpha(r_1 + \Delta)}\,) \,.$$

Xét thể tích V' được giới hạn bởi hai mặt cầu S_1 và S_2 có bán kính tương ứng là $r = r_1$ và $r = r_1 + \Delta$. Theo định lý dive của Gauss, ta có

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV \,.$$

Vì hướng của vectơ $d\mathbf{S}$ trên S_1 và S_2 đều hướng ra ngoài thể tích V', trong trường hợp Δ nhỏ, ta có

$$\frac{q}{\varepsilon_0}\left[-\sqrt{\alpha(r_1 + \Delta)} + \sqrt{\alpha r_1}\right] = \frac{4\pi}{3}[(r_1 + \Delta)^3 - r_1^3](\Delta \cdot \mathbf{E})|_{r=r_1} \,.$$

Khi $\frac{\Delta}{r_1} \ll 1$, ta có thể lấy gần đúng

$$\left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right)^n \approx 1+n\frac{\Delta}{r_1}\,.$$

Như vậy ta nhận được

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r=r_1) = -\frac{\sqrt{\alpha}\,q}{8\pi\varepsilon_0 r_1^{5/2}}\,.$$

Mặt khác, định luật Coulomb có thể cho đive của điện trường do một điện tích điểm q sinh ra là

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(r)\,.$$

1003

Các điện tích tĩnh được phân bố dọc theo trục x (một chiều) trong vùng $-a \le x' \le a$. Mật độ điện tích là:

$$\begin{array}{ccc} \rho(x') & \text{đối với} & |x'| \le a \\ 0 & \text{đối với} & |x'| > a\,. \end{array}$$

(a) Hãy viết biểu thức thế tĩnh điện $\Phi(x)$ tại một điểm x trên trục toạ độ theo $\rho(x')$.

(b) Tìm khai triển đa cực cho thế năng đó trong vùng $x > a$.

(c) Đối với mỗi cấu hình điện tích đã cho trong hình 1.3, hãy tìm

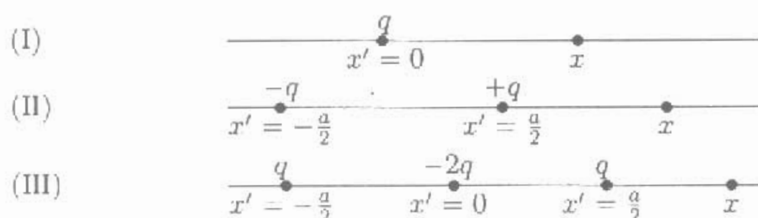
(i) Điện tích toàn phần $Q = \int \rho dx'$,

(ii) Mômen lưỡng cực $P = \int x'\rho dx'$,

(iii) Mômen tứ cực $Q_{xx} = 2\int x'^2 \rho dx'$,

(iv) Số hạng chính (trong chuỗi lũy thừa của $1/x$) của điện thế Φ tại điểm $x > a$.

(*Wisconsin*)



Hình 1.3

Lời giải:

(a) Thế tĩnh điện tại một điểm trên trục x là

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\rho(x')}{|x-x'|}dx'\,.$$

(b) Đối với $x > a, a > x' > -a$, ta có:

$$\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{x} + \frac{x'}{x^2} + \frac{x'^2}{x^3} + \ldots\,.$$

Do đó khai triển đa cực của $\Phi(x)$ là

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{a}^{a}\frac{\rho(x')}{x}dx' + \int_{-a}^{a}\frac{\rho(x')x'}{x^2}dx' + \int_{a}^{a}\frac{\rho(x')x'^2}{x^3}dx' + \ldots\right].$$

(c) Cấu hình điện tích (I) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = q\delta(x')\,,$$

nên đối với cấu hình này, ta có

$$\text{(i)}\quad Q = q\,;\quad \text{(ii)}\quad P = 0\,;\quad \text{(iii)}\quad Q_{xx} = 0\,;\quad \text{(iv)}\quad \Phi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\,.$$

Cấu hình điện tích (II) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = -q\delta\left(x' + \frac{a}{2}\right) + q\delta\left(x' - \frac{a}{2}\right),$$

nên đối với cấu hình này

$$\text{(i)}\quad Q = 0\,;\quad \text{(ii)}\quad P = qa\,;\quad \text{(iii)}\quad Q_{xx} = 0\,;\quad \text{(iv)}\quad \Phi(x) = -\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\,.$$

Cấu hình điện tích (III) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = q\delta\left(x' - \frac{a}{2}\right) + q\delta\left(x' - \frac{a}{2}\right) - 2q\delta(x') .$$

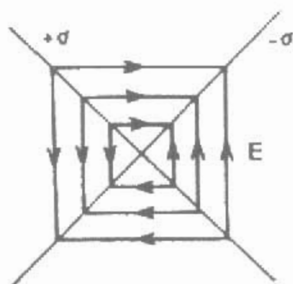
nên đối với cấu hình này

(i) $Q = 0$; (ii) $P = 0$; (iii) $Q_{xx} = qa^2$; (iv) $\Phi(x) = \frac{qa^2}{8\pi\varepsilon_0 x^3}$

1004

Hai tấm có kích thước vô hạn đồng đều có mật độ điện tích $+\sigma$ và $-\sigma$ giao nhau tạo thành góc vuông. Hãy tìm độ lớn và hướng của điện trường ở mọi nơi và vẽ phác các đường sức của điện trường này.

(*Wisconsin*)



Hình 1.4

Lời giải:

Đầu tiên chúng ta hãy xét tấm có kích thước vô hạn với mật độ điện tích $+\sigma$. Độ lớn của điện trường gây bởi tấm đó tại điểm bất kì trong không gian là

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} .$$

Hướng của điện trường là vuông góc với bề mặt của tấm tích điện. Đối với hai tấm trực giao với nhau có điện tích $\pm\sigma$, sự chồng chập các điện trường của chúng sẽ cho kết quả sau:

$$E = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{2\varepsilon_0} .$$

Hướng của **E** có thể thấy trên hình 1.4

1005

Định luật Gauss sẽ không có hiệu lực nếu như

(a) có các đơn cực từ,

(b) định luật tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách không hoàn toàn đúng,

(c) tốc độ ánh sáng không phải là một hằng số phổ quát.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

1006

Một điện tích sẽ được giữ ở trạng thái cân bằng bền

(a) bởi một trường tĩnh điện thuần tuý,

(b) bởi một lực cơ học,

(c) cả (a) và (b) đều không đúng.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1007

Nếu **P** là một vectơ phân cực và **E** là điện trường thì khi đó trong phương trình $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$, thì nói chung α là

(a) vô hướng, (b) vectơ, (c) tenxơ.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1008

(a) Một vành tròn bán kính R mang điện tích toàn phần là $+Q$ phân bố đồng đều. Hãy tính điện trường và điện thế tại tâm của vòng tròn đó.

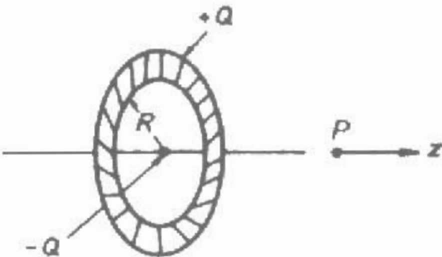
(b) Xét một điện tích $-Q$ chỉ được phép trượt dọc theo trục của vành tròn. Hãy chứng tỏ rằng điện tích đó sẽ thực hiện một chuyển động điều hoà đối với những dịch chuyển nhỏ vuông góc với mặt phẳng của vành tròn.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hãy lấy trục z nằm dọc theo trục của vành tròn như trên hình 1.5. Điện trường và điện thế tại tâm của vòng tròn được tính bởi biểu thức sau

$$\mathbf{E} = 0, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$



Hình 1.5

Điện trường tại một điểm P trên trục z là

$$\mathbf{E}(z) = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$$

Khi đó, một điện tích âm $-Q$ tại điểm P chịu tác dụng của một lực là

$$\mathbf{F}(z) = -\frac{Q^2 z}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$$

Vì $z \ll R$, suy ra $F(z) \propto z$, do đó $-Q$ sẽ thực hiện một dao động điều hoà.

1009

Một lượng điện tích q được trải đều trên một lớp bề mặt của một đĩa có bán kính là a.

(a) Dùng các phương pháp sơ cấp dựa trên phân bố đối xứng theo góc phương vị của điện tích để tìm điện thế tại một điểm bất kì trên trục đối xứng.

(b) Dựa vào câu (a) hãy tìm biểu thức của điện thế tại một điểm bất kì $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}| > a$) như một khai triển theo các hàm điều hoà góc.

(*Wisconsin*)

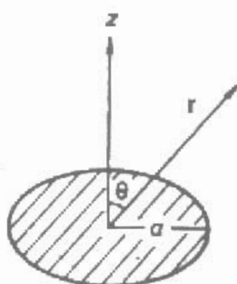
Lời giải:

(a) Lấy các trục toạ độ như trên hình 1.6 và xét một hình vành khuyên được tạo bởi 2 đường tròn có bán kính là ρ và $\rho + d\rho$ ở trên đĩa. Điện thế tại điểm $(0, 0, z)$ do hình vành khuyên sinh ra được tính bởi

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} .$$

Lấy tích phân, ta sẽ nhận được điện thế do toàn bộ đĩa sinh ra

$$\varphi(z) = \int_0^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$
$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|) .$$



Hình 1.6

(b) Tại một điểm có $|\mathbf{r}| > a$, áp dụng phương trình Laplac $\nabla^2\varphi = 0$ với nghiệm

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) .$$

Vì $\varphi \to 0$ đối với $r \to \infty$, nên ta có $a_n = 0$. Tại nửa không gian trên, $z > 0$, điện thế ở trên trục là $\varphi = \varphi(r, 0)$. Vì $P_n(1) = 1$, ta có

$$\varphi(r,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} .$$

Tại nửa không gian dưới, $z < 0$, điện thế ở trên trục là $\varphi = \varphi(r, \pi)$. Vì $P_n(-1) = (-1)^n$ nên ta có

$$\varphi(r,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n}{r^{n+1}} .$$

Sử dụng kết quả của (a) và chú ý rằng đối với một điểm trên trục $|\mathbf{r}| = z$, trong trường hợp $z > 0$ ta có

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} &= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(\sqrt{a^2+r^2} - r) \\ &= \frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}} - 1\right) .\end{aligned}$$

Tuy nhiên, vì

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)^n + \dots ,\end{aligned}$$

phương trình trên trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} = \frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)^n .$$

So sánh hệ số của các luỹ thừa của r ta có

$$b_{2n-1} = 0 , \quad b_{2n-2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} a^{2n} .$$

Do đó, điện thế tại một điểm bất kì $\mathbf{r}$ của nửa không gian $z > 0$ được cho bởi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$
$$\times\left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1}P_{2n-2}(\cos\theta)\,,\quad (z>0)\,.$$

Theo cách tương tự đối với nửa không gian $z < 0$, vì $(-1)^{2n-2} = 1$, ta có

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$
$$\times\left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1}P_{2n-2}(\cos\theta)\,,\quad (z<0)\,.$$

Như vậy, ta nhận được biểu thức như nhau của điện thế tại mọi điểm của không gian, đó là một chuỗi theo đa thức Legendre.

1010

Một đĩa cách điện mỏng nhưng khối lượng lớn có mật độ điện tích mặt σ và bán kính R. Có một điện tích điểm $+Q$ ở trên trục đối xứng của đĩa. Tính lực tác dụng trên điện tích đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tham khảo bài tập **1009** và hình 1.6. Giả sử Q nằm tại điểm $(0, 0, z)$ trên trục đối xứng của đĩa. Điện trường do đĩa sinh ra tại điểm này là

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right),$$

Suy ra lực tác dụng lên điện tích điểm này là

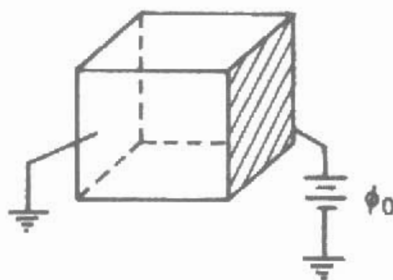
$$F = QE = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right).$$

Do tính đối xứng, lực này có hướng dọc theo trục của đĩa.

1011

Khối lập phương trên hình 1.7 có 5 mặt nối đất. Mặt thứ 6 cách điện với các mặt khác có điện thế ϕ_0. Tính điện thế tại tâm của khối lập phương.

(*MIT*)



Hình 1.7

Lời giải:

Điện thế ϕ_c tại tâm của khối lập phương có thể được biểu diễn như một hàm tuyến tính của các điện thế của cả 6 mặt, nghĩa là

$$\phi_c = \sum_i C_i \phi_i ,$$

trong đó C_i là các hằng số. Vì cả 6 mặt của khối lập phương đều có vị trí hình học như nhau đối với tâm của khối đó nên các C_i phải có giá trị giống nhau, gọi là C. Như vậy

$$\phi_c = C \sum_i \phi_i .$$

Nếu từng mặt trong số 6 mặt đó có điện thế ϕ_0 thì hiển nhiên thế năng tại tâm cũng là ϕ_0. Do đó $C = \frac{1}{6}$. Nhưng vì chỉ có một mặt có điện thế là ϕ_0 trong khi các mặt khác có điện thế bằng 0, do đó điện thế tại tâm là $\phi_0/6$.

1012

Một quả cầu có bán kính R chứa một điện tích Q, phân bố đồng đều khắp thể tích của hình cầu. Hãy xác định điện trường ở bên ngoài và bên trong của mặt cầu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Mật độ điện tích khối của quả cầu là

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,.$$

Lấy mặt Gauss là một mặt cầu có bán kính r đồng tâm với quả cầu tích điện. Do đối xứng nên độ lớn của điện trường ở tất cả các điểm của bề mặt đó là như nhau và hướng theo bán kính ra ngoài. Theo định luật Gauss ta có

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

Từ đó, có thể nhận được ngay các biểu thức sau

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r \geq R)\,,$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad (r \leq R)\,.$$

1013

Xét một thể tích hình cầu tích điện đều có bán kính R với điện tích toàn phần Q. Tìm điện trường và điện thế tĩnh điện tại tất cả các điểm trong không gian.

(Wisconsin)

Lời giải:

Dùng kết quả của bài tập **1012**, ta có

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,, \qquad (r \leq R)$$
$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,, \qquad (r \geq R)$$

và mối quan hệ giữa cường độ điện trường tĩnh điện và điện thế sẽ là

$$\varphi(p) = \int_p^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\,,$$

Từ đó, ta nhận được

$$\varphi_1(r) = \int_r^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_r^R \frac{Qrdr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \int_R^\infty \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (r \le R),$$
$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (r \ge R).$$

1014

Đối với một quả cầu tích điện đều có bán kính R và mật độ điện tích ρ,

(a) dùng định luật Gauss để tìm dạng của vectơ điện trường **E** ở cả bên trong và bên ngoài quả cầu.

(b) từ **E** hãy tìm điện thế ϕ khi sử dụng điều kiện $\phi \to 0$ khi $r \to \infty$.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Tương tự như bài tập **1013**.

(b) Sử dụng kết quả của bài tập **1013**, ta có

$$\text{với} \quad r > R, \ \phi = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r},$$
$$\text{với} \quad r < R, \ \phi = \frac{\rho R^3}{6\varepsilon_0}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

1015

Trong trạng thái cân bằng, một lớp vỏ dẫn điện hình cầu, bán kính trong a, bán kính ngoài b, có một điện tích q được giữ cố định ở tâm và một mật độ điện tích σ phân bố đều ở mặt ngoài. Hãy tìm điện trường cho tất cả các giá trị r và điện tích ở mặt trong của lớp dẫn điện đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Sự cân bằng tĩnh điện đòi hỏi rằng toàn bộ điện tích trên bề mặt bên trong của lớp dẫn điện phải bằng $-q$. Sau đó sử dụng định luật Gauss, ta nhận được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \qquad \text{đối với } r < a\,,$$

$$\mathbf{E} = 0 \qquad \text{đối với } a < r < b\,,$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi b^2\sigma}{r^2}\mathbf{e}_r = \frac{\sigma b^2}{\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \qquad \text{đối với } r > b\,.$$

1016

Một quả cầu dẫn điện rắn bán kính r_1 có một điện tích $+Q$. Quả cầu này được bao bọc bởi một quả cầu dẫn điện rỗng có bán kính trong r_2 và bán kính ngoài r_3. Hãy sử dụng định lý Gauss để tìm những biểu thức cho các trường hợp sau:

(a) Điện trường bên ngoài của quả cầu ngoài.

(b) Điện trường giữa các quả cầu.

(c) Lập một biểu thức cho điện thế của quả cầu bên trong. Không cần thiết phải lấy tích phân.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Do sự cân bằng tĩnh điện, bề mặt trong của quả cầu dẫn điện rỗng mang một tổng điện tích là $-Q$, trong khi mặt ngoài của nó có tổng điện tích là $+Q$. Sử dụng định luật Gauss

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{tổng}}}{\varepsilon_0}\,,$$

trong đó $Q_{\text{tổng}}$ là tổng đại số của tất cả các điện tích được bao bọc bởi mặt kín s, ta nhận được

(a) $\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \qquad (r > r_3)$

(b) $\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \qquad (r_2 > r > r_1)$

(c) Sử dụng biểu thức đối với điện thế $\varphi(p) = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, ta tìm được điện thế của quả cầu bên trong là

$$\varphi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{r_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr .$$

1017

Bên trong của một vỏ kim loại hình cầu đã nối đất (bán kính trong là R_1 và bán kính ngoài là R_2) chứa đầy điện tích không gian phân bố đều với mật độ điện tích ρ. Hãy tìm năng lượng tĩnh điện của hệ. Tìm điện thế tại tâm của vỏ cầu kim loại đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Xét một mặt cầu đồng tâm có bán kính $r (r < R_1)$. Sử dụng định luật Gauss ta nhận được

$$\mathbf{E} = \frac{r}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_r .$$

Khi vỏ cầu này được nối đất, $\varphi(R_1) = 0, E = 0 \, (r > R_2)$. Do đó,

$$\varphi(r) = \int_r^{R_1} E dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (R_1^2 - r^2) .$$

Điện thế tại tâm là

$$\varphi(0) = \frac{1}{6\varepsilon_0} \rho R_1^2 .$$

Năng lượng tĩnh điện là

$$W = \int \frac{1}{2} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^{R_1} \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (R_1^2 - r^2) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\rho^2 R_1^5}{45\varepsilon_0} .$$

1018

Một mặt cầu kim loại bán kính a được bao bọc bởi một mặt cầu kim loại đồng tâm có bán kính trong là b, với $b > a$. Không gian giữa hai mặt cầu chứa đầy một vật liệu có độ dẫn điện σ thay đổi theo cường độ điện trường E theo

hệ thức $\sigma = KE$, trong đó K là một hằng số. Một hiệu điện thế V được duy trì giữa hai mặt cầu. Dòng điện giữa các mặt cầu là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vì cường độ dòng điện là

$$I = j \cdot S = \sigma E \cdot S = KE^2 \cdot S = KE^2 \cdot 4\pi r^2 ,$$

suy ra điện trường là

$$E = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{I}{4\pi K}}$$

và điện thế là

$$V = -\int_b^a E \cdot dr = -\int_b^a \sqrt{\frac{I}{4\pi K}}\frac{1}{r}dr = \sqrt{\frac{I}{4\pi K}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

Do đó cường độ dòng điện giữa các mặt cầu được tính bởi

$$I = 4\pi KV^2/\ln(b/a) .$$

1019

Một bong bóng xà phòng cách điện có bán kính 1 cm có điện thế là 100 V. Nếu nó vỡ ra thành một giọt có bán kính 1 mm thì năng lượng tĩnh điện của nó thay đổi như thế nào?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Nếu bong bóng xà phòng mang một điện tích Q thì điện thế của nó là

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Đối với $r = r_1 = 1$ cm, $V = V_1 = 100$ V, ta có $Q = 4\pi\varepsilon_0 r_1 V_1$. Khi bán kính thay đổi từ r_1 tới $r_2 = 1 = 1$ mm sự thay đổi của năng lượng tĩnh điện là

$$\Delta W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1} = 2\pi\varepsilon_0 (r_1 V_1)^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$
$$= 2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (10^{-12} \times 100)^2 \times \left(\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{10^{-2}}\right)$$
$$= 5 \times 10^{-8}\ \text{J} .$$

1020

Một điện tích tĩnh được phân bố trên một vỏ hình cầu có bán kính trong R_1 và bán kính ngoài R_2. Mật độ điện tích trong lớp vỏ cầu này là $\rho = a + br$, với r là khoảng cách tính từ tâm và bằng 0 ở mọi nơi khác.

(a) Hãy tìm biểu thức của cường độ điện trường ở mọi nơi theo r.

(b) Hãy tìm biểu thức của điện thế và mật độ năng lượng đối với $r < R_1$. Lấy điện thế bằng 0 tại $r \to \infty$.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Nhớ rằng ρ là một hàm số chỉ của bán kính r, nên ta có thể lấy một mặt cầu đồng tâm có bán kính r làm mặt Gauss phù hợp với yêu cầu đối xứng. Sử dụng định luật Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(r) dr \,,$$

ta có thể nhận được các kết quả sau:

(a) Cường độ điện trường.

Đối với $r < R_1$, $\mathbf{E}_1 = 0$.

Đối với $R_1 < r < R_2$, sử dụng hệ thức $4\pi r^2 E_2 = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{r} (a + br') r'^2 dr'$ ta tìm được

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3}(r^3 - R_1^3) + \frac{b}{4}(r^4 - R_1^4) \right] \mathbf{r} \,.$$

Đối với $R_2 > r$, từ $4\pi r^2 E_3 = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} (a + br') r'^2 dr'$ ta tìm được

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\varepsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{b}{4}(R_2^4 - R_1^4) \right] \mathbf{r} \,.$$

(b) Điện thế và mật độ năng lượng đối với $r < R_1$.

Lưu ý rằng $\varphi(\infty) = 0$ thì điện thế là

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_r^{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} + \int_{R_2}^{\infty} \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{a}{3}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{b}{4}(R_2^3 - R_1^3) \right] .$$

Cũng như vậy, vì $\mathbf{E}_1 = 0\,(r < R_1)$ nên mật độ năng lượng đối với $r < R_1$ là

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 = 0\,.$$

1021

Một điện tích Q được phân bố đều trên một mặt cầu có bán kính r. Hãy chứng minh rằng lực tác dụng lên một phần tử tích điện nhỏ dq có chiều hướng theo bán kính ra ngoài và có độ lớn bằng

$$dF = \frac{1}{2} E dq\,,$$

trong đó $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ là điện trường tại mặt cầu.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Mật độ điện tích mặt được cho bởi công thức

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}\,.$$

Trên hình 1.8, ta xét một điểm P nằm bên trong mặt cầu gần với một phần tử có diện tích ds. Điện tích dq trên phần tử diện tích này sẽ sinh ra một điện trường tại điểm P gần giống như một điện trường được sinh ra do một tấm kim loại vô hạn tích điện đều, nghĩa là

$$\mathbf{E}_{1P} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}\,,$$

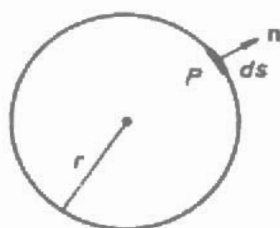
trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với ds và có hướng đi ra phía ngoài.

Điện trường bằng 0 ở bên trong quả cầu. Do đó nếu gọi $\mathbf{E}_{2P}$ là điện trường tại P sinh ra bởi tất cả các điện tích trên mặt cầu, ngoại trừ phần tử ds, ta phải có phương trình sau

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{1P} + \mathbf{E}_{2P} = 0\,.$$

Do đó,

$$\mathbf{E}_{2P} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{n}\,.$$



Hình 1.8

Vì P ở gần với ds, nên $\mathbf{E}_{2P}$ có thể coi như cường độ điện trường tại ds do các điện tích trên mặt cầu sinh ra. Do đó lực tương tác lên dq là

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}_{2P} = \frac{1}{2}Edq\mathbf{n}\,,$$

trong đó $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ là cường độ điện trường ở mặt cầu.

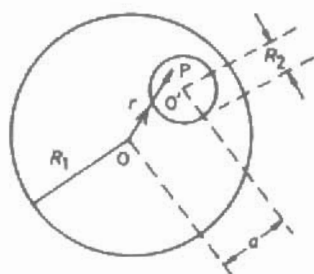
1022

Một quả cầu bán kính R_1 có mật độ điện tích đều ρ trong thể tích của nó ngoại trừ một vùng rỗng hình cầu bán kính R_2 nằm cách tâm một khoảng cách r

(a) Tìm điện trường **E** tại tâm của quả cầu rỗng.

(b) Tìm điện thế ϕ tại điểm đó.

(UC, Berkeley)



Hình 1.9

Lời giải:

(a) Xét một điểm P bất kì của vùng rỗng (xem hình 1.9) và đặt

$$\mathrm{OP} = \mathbf{r}\,,\ \mathrm{O'P} = \mathbf{r}'\,,\ \mathrm{OO'} = \mathbf{a}\,,\quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}\,.$$

Nếu không có vùng rỗng ở bên trong quả cầu thì điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}\,.$$

Nếu chỉ vùng cầu rỗng có mật độ điện tích ρ thì điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}'\,.$$

Do đó theo định lý chồng chập, điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{a}\,.$$

Như vậy điện trường bên trong vùng rỗng là đều. Điều này tất nhiên bao gồm cả tâm của vùng rỗng.

(b) Giả thiết rằng điện thế ở vô cực bằng 0. Xét một hình cầu bất kì bán kính R với mật độ điện tích đồng đều ρ. Ta có thể tìm được điện trường bên trong và bên ngoài quả cầu đó như sau

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho \mathbf{r}}{3\varepsilon_0}\,, & r < R\,, \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Khi đó điện thế tại một điểm bất kì bên trong quả cầu sẽ là

$$\phi = \left(\int_r^R + \int_R^\infty\right)\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)\,, \qquad (1)$$

trong đó r là khoảng cách giữa điểm bất kì này và tâm của quả cầu.

Bây giờ hãy xét bài tập cụ thể. Nếu điện tích được phân bố đều trong toàn quả cầu bán kính R_1, gọi ϕ_1 là điện thế tại tâm O′ của vùng rỗng. Nếu phân bố điện tích đó được thay thế bởi một quả cầu nhỏ bán kính R_2 có mật độ điện tích đồng đều ρ trong vùng rỗng, gọi điện thế tại O′ là ϕ_2. Sử dụng biểu thức (1) và định lý chồng chập ta nhận được

$$\begin{aligned}\phi_{O'} = \phi_1 - \phi_2 &= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_1^2 - a^2) - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2 - 0) \\ &= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}[3(R_1^2 - R_2^2) - a^2]\,.\end{aligned}$$

1023

Một lớp lưỡng cực lý tưởng có mômen trên một đơn vị diện tích trên bề mặt S là τ. Điện thế do lớp lưỡng cực này gây ra tại điểm P là

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS\,,$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vectơ từ phần tử bề mặt tới điểm P.

(a) Xét một lớp lưỡng cực có bề rộng vô hạn nằm trong mặt phẳng x-y có mật độ mômen đồng đều $\boldsymbol{\tau} = \tau\mathbf{e}_z$. Xác định rằng hoặc ϕ hoặc một đạo hàm nào đó của nó không liên tục ngang qua lớp đó và tìm độ gián đoạn.

(b) Xét một điện tích điểm dương q nằm tại tâm của một mặt cầu bán kính a. Trên mặt này có một lớp lưỡng cực đồng đều τ và một mật độ điện tích mặt đồng đều σ. Tìm τ và σ sao cho điện thế bên trong mặt cầu sẽ chỉ bằng điện thế của điện tích q, trong khi điện thế bên ngoài sẽ bằng 0 (có thể sử dụng bất cứ điều gì bạn biết về điện thế của một điện tích bề mặt).

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Do đối xứng, điện thế tại điểm P chỉ phụ thuộc vào toạ độ z. Ta chọn các toạ độ trụ (R, θ, z) sao cho P ở trên trục z. Khi đó điện thế tại điểm P là

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\tau z}{r^3}dS\,.$$

Vì $r^2 = R^2 + z^2, dS = 2\pi R dR$, ta nhận được

$$\phi_P = \frac{2\pi\tau z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{RdR}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} = \begin{cases} \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\,, & z > 0\,,\\ -\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\,, & z < 0\,. \end{cases}$$

Do đó điện thế là gián đoạn qua mặt phẳng x-y (với $z = 0$). Độ gián đoạn được cho bởi

$$\Delta\phi = \frac{\tau}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\tau}{\varepsilon_0}\,.$$

(b) Đã biết rằng $\phi = 0$ đối với $r > a$. Bởi vậy $\mathbf{E} = 0$ với $r > a$. Sử dụng định luật Gauss

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$

ta thấy rằng $\sigma \cdot 4\pi a^2 + q = 0$. Do đó

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2}\,.$$

Nếu điện thế tại vô cực bằng 0 thì điện thế ở bên ngoài mặt cầu sẽ bằng 0 ở khắp mọi nơi. Nhưng điện thế bên trong mặt cầu là $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Đối với $r = a, \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$, sao cho độ gián đoạn tại mặt cầu là

$$\Delta\phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

Khi đó ta có $\frac{\tau}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$, và nhận được

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{q}{4\pi a}\mathbf{e}_r\,.$$

2. TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN TRONG MỘT VẬT DẪN ĐIỆN (1024–1042)

1024

Một điện tích Q được nạp cho một tụ điện có điện dung C_1. Một đầu của tụ điện được nối đất và đầu kia được cách điện, không nối với bất cứ một vật gì khác. Người ta tăng thêm khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện và điện dung trở thành C_2 ($C_2 < C_1$). Khi đó điều gì sẽ xảy ra đối với điện thế trên bản cực không nối đất? Xác định điện thế V_2 qua điện thế V_1.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong quá trình tăng khoảng cách giữa hai bản cực, điện tích trên bản cực cách điện được giữ không đổi. Vì $Q = CV$ nên điện thế của điện cực cách điện tăng khi C giảm. Nếu V_1 và V_2 là điện thế tương ứng của bản cực cách điện trước và sau khi tách ra thì ta có

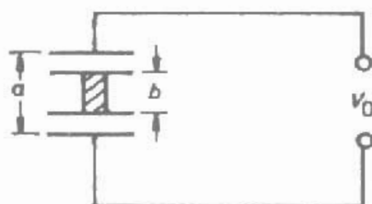
$$V_2 = \frac{C_1}{C_2}V_1\,.$$

1025

Hình 1.10 cho thấy hai tụ điện được mắc nối tiếp, phần giữa cứng có chiều dài b có thể chuyển động theo phương thẳng đứng. Diện tích của từng bản cực

tụ điện là A. Hãy chứng minh rằng điện dung của tổ hợp nối tiếp này không phụ thuộc vào vị trí của phần giữa đó và có giá trị là $C = \frac{A\varepsilon_0}{a-b}$. Nếu hiệu điện thế giữa các bản cực ngoài được giữ không đổi là V_0 thì năng lượng tích trong các tụ điện sẽ thay đổi như thế nào khi phần cứng ở giữa bị bỏ đi?

(*Wisconsin*)



Hình 1.10

Lời giải:

Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện trên và d_2 là khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện dưới. Từ hình 1.10 ta thấy

$$d_1 + d_2 = a - b\,;$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}\,,\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_2}\,.$$

Đối với hai tụ điện mắc nối tiếp, điện dung của bộ là

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{A\varepsilon_0}{d_1 + d_2} = \frac{A\varepsilon_0}{a - b}\,.$$

Vì C không phụ thuộc vào d_1 và d_2, nên tổng điện dung của bộ không phụ thuộc vào vị trí của phần giữa. Tổng năng lượng trữ trong bộ tụ điện là

$$W = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2(a-b)}\,.$$

Năng lượng được tích trữ nếu phần giữa bị bỏ đi là

$$W' = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2a}\,,$$

và ta có

$$W - W' = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2(a-b)}\frac{b}{a}\,.$$

1026

Một tụ điện phẳng được tích điện đến điện thế V và sau đó được ngắt khỏi mạch nạp điện. Tính công thực hiện để làm thay đổi khoảng cách giữa các bản cực một cách chậm chạp từ d đến $d' \neq d$. (Các bản cực là hình tròn có bán kính $r \gg d$).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bỏ qua hiệu ứng mép, điện dung của tụ điện phẳng là $C = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}$ và năng lượng tích trữ là $W = \frac{1}{2}CV^2$. Vì các điện tích trên bản cực, $Q = \pm CV$, không thay đổi khi thay đổi khoảng cách giữa các bản cực nên ta có

$$V' = \frac{C}{C'}V\,.$$

Năng lượng tích trữ khi các bản cực ở khoảng cách d' là

$$W' = \frac{1}{2}C'\left(\frac{C}{C'}V\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{C^2}{C'}V^2\,.$$

Như vậy độ biến thiên của năng lượng tích trữ trong tụ điện là

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2}CV^2\left(\frac{C}{C'} - 1\right) = \frac{1}{2}CV^2\left(\frac{d'}{d} - 1\right).$$

Do đó công sinh ra khi thay đổi khoảng cách giữa các bản cực từ d đến d' sẽ là

$$\frac{\varepsilon_0 \pi r^2 (d' - d)V^2}{2d^2}\,.$$

1027

Một tụ điện phẳng có diện tích bản cực là 0,2 m^2 và khoảng cách giữa các bản cực là 1 cm được tích điện đến 1000 V và sau đó được ngắt khỏi ăcquy. Tính công cần thiết để đưa các bản cực ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách ban đầu giữa các bản tụ điện. Hiệu điện thế cuối cùng trên tụ điện sẽ là bao nhiêu?

$$(\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)})$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi các bản cực đã bị đưa ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách cũ thì điện dung của tụ điện là $C' = \frac{C}{2}$ trong đó $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ là điện dung trước khi khoảng cách giữa các bản cực tăng lên. Nếu một tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế U thì điện tích của tụ điện là $Q = CU$. Khi độ lớn của điện tích Q không thay đổi trong cả quá trình thì độ biến thiên của năng lượng tích trữ trong tụ điện sẽ là

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2d} = \frac{8,9 \times 10^{-12} \times 0,2 \times (10^3)^2}{2 \times 0,01} \\ &= 8,9 \times 10^{-5}\ \text{J}.\end{aligned}$$

ΔW cũng chính là công cần thiết để đưa các bản cực ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách cũ giữa các bản cực. Vì điện tích Q được giữ không đổi, hiệu điện thế cuối cùng là

$$CU = C'U', \text{ hay } U' = 2U = 2000\ \text{V}.$$

1028

Cho hai điện cực phẳng song song, khoảng cách giữa hai điện cực là d có điện thế 0 và V_0, tìm mật độ dòng điện nếu điện cực có điện thế thấp hơn được cung cấp không hạn chế các êlectron từ trạng thái đứng yên. Bỏ qua sự va chạm.

(Wisconsin; UC Berkeley)

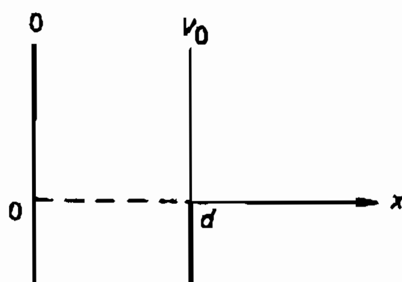
Lời giải:

Chọn trục x vuông góc với các bản cực như trên hình 1.11. Cả điện tích và mật độ dòng điện đều là hàm của x. Ở trạng thái dừng

$$\frac{d\mathbf{j}(x)}{dx} = 0.$$

Do đó $\mathbf{j} = -j_0\mathbf{e}_x$, ở đây j_0 là một hằng số. Gọi $v(x)$ là tốc độ của các êlectron. Khi đó mật độ điện tích là

$$\rho(x) = -\frac{j_0}{v(x)}.$$



Hình 1.11

Điện thế thoả mãn phương trình Poisson

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{j_0}{\varepsilon_0 v(x)} .$$

Sử dụng hệ thức năng lượng $\frac{1}{2}mv^2(x) = eV$, ta nhận được

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} .$$

Để giải phương trình vi phân này, ta đặt $u = \frac{dV}{dx}$. Khi đó ta có

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dV}\frac{dV}{dx} = u\frac{du}{dV} ,$$

Và phương trình trên trở thành

$$udu = AV^{-\frac{1}{2}}dV ,$$

trong đó $A = \frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}$. Lưu ý rằng $\frac{dV}{dx} = 0$ tại $x = 0$, khi các êlectron nằm yên tại đó. Lấy tích phân phương trình trên ta có

$$\frac{1}{2}u^2 = 2AV^{\frac{1}{2}} ,$$

hay

$$V^{-\frac{1}{4}}dV = 2A^{\frac{1}{2}}dx .$$

Vì $V = 0$ tại $x = 0$ và $V = V_0$ tại $x = d$, tích phân phương trình trên, ta được

$$\frac{4}{3}V_0^{\frac{3}{4}} = 2A^{\frac{1}{2}}d = 2\left(\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{\frac{1}{2}}d .$$

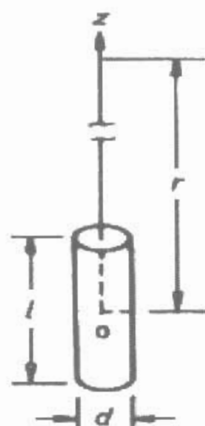
Cuối cùng, từ phương trình trên, ta nhận được

$$\mathbf{j} = -j_0\mathbf{e}_x = -\frac{4\varepsilon_0 V_0}{9d^2}\sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\mathbf{e}_x .$$

1029

Như có thể thấy trên hình 1.12, một thanh dẫn điện hình trụ có đường kính d và chiều dài $l\,(l \gg d)$ được tích điện đều trong chân không sao cho điện trường ở gần bề mặt nó và cách xa các đầu của nó là E_0. Điện trường tại $r \gg l$ trên trục của hình trụ là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)



Hình 1.12

Lời giải:

Chọn tọa độ với trục z dọc theo trục của hình trụ và gốc toạ độ tại tâm của thanh hình trụ đó. Lưu ý rằng $l \gg d$ và sử dụng định lý Gauss, chúng ta có thể tìm được điện trường ở gần mặt hình trụ và xa các đầu của nó là

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}\mathbf{e}_\rho ,$$

ở đây λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của hình trụ và $\mathbf{e}_\rho$ là vectơ đơn vị theo hướng bán kính. Đối với $r \gg l$ ta có thể coi thanh dẫn điện như một

điện tích điểm với $Q = \lambda l$. Như vậy cường độ điện trường tại một điểm ở xa nằm trên trục của thanh hình trụ có thể tính gần đúng bằng

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0 dl}{4r^2} .$$

Hướng của **E** là dọc theo trục và hướng ra xa thanh hình trụ.

1030

Một dây cáp đồng trục có cáp dẫn điện bên trong dường kính 0,5 cm và cáp dẫn điện bên ngoài đường kính 1,5 cm, khoảng cách giữa hai cáp dẫn chứa đầy không khí. Khi cáp dẫn bên trong có điện thế +8000 V đối với cáp dẫn bên ngoài nối đất

(a) điện tích trên 1 m trong cáp dẫn bên trong là bao nhiêu? và

(b) cường độ điện trường tại $r = 1$ cm là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Coi mật độ điện tích dài của dây dẫn bên trong là λ. Do tính đối xứng ta thấy rằng cường độ điện trường tại một điểm cách trục của cáp một khoảng cách r ở giữa hai vật dẫn có hướng theo bán kính và độ lớn của nó được tính bởi định lý Gauss là

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Khi đó hiệu điện thế giữa cáp dẫn bên trong và cáp dẫn bên ngoài là

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(b/a)$$

Với $a = 1,5$ cm, $b = 0,5$ cm, ta có

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi \times 8,9 \times 10^{-12} \times 8000}{\ln(1,5/0,5)}$$
$$= 4,05 \times 10^{-7} \text{ C/m} .$$

(b) Điểm $r = 1$ cm ở bên ngoài của cáp. Định luật Gauss chỉ ra rằng cường độ điện trường tại đó bằng 0.

1031

Một tụ điện trụ có bản bên trong bán kính r_1 và bản bên ngoài bán kính r_2. Bản bên ngoài được nối đất và bản bên trong được tích điện sao cho nó có điện thế dương V_0. Qua V_0, r_1, và r_2, hãy tính:

(a) điện trường tại r ($r_1 < r < r_2$).

(b) điện thế tại r.

(c) Nếu một điện tích âm nhỏ Q ban đầu nằm tại r được đẩy đến r_1, thì điện tích ở bản bên trong thay đổi như thế nào?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Từ bài tập **1030**, ta có

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V_0}{\ln(r_2/r_1)}\frac{\mathbf{r}}{r^2} \qquad (r_1 < r < r_2)\,.$$

(b)

$$V(r) = V_0 - \int_{r_1}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{V_0 \ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}\,.$$

(c) Giả sử sự thay đổi của điện tích của bản bên trong là $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ với $Q_1 = CV_0$. Khi điện tích âm Q chuyển động từ r tới r_1 thì công thực hiện bởi lực tĩnh điện là $Q(V_0 - V)$. Công này bằng độ giảm của năng lượng tĩnh điện trong tụ điện

$$\frac{Q_1^2}{2C} - \frac{Q_2^2}{2C} = Q(V_0 - V)\,.$$

Vì Q là một đại lượng nhỏ, ta lấy gần đúng

$$Q_1 + Q_2 \approx 2Q_1\,.$$

Do đó

$$\frac{2Q_1}{2C}\Delta Q = Q(V_0 - V)\,.$$

hay

$$\Delta Q = \frac{Q}{V_0}(V_0 - V) = \frac{Q\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}\,.$$

1032

Một ống kim loại hình trụ rỗng rất dài có bán kính trong r_0 và bán kính ngoài $r_0 + \Delta r$ ($\Delta r \ll r_0$) được tích đầy điện tích không gian một cách đồng đều với mật độ ρ_0. Hãy xác định điện trường đối với $r < r_0$, $r > r_0 + \Delta r$ và $r_0 + \Delta r > r > r_0$? Mật độ điện tích mặt trên bề mặt trong và ngoài của ống hình trụ là bao nhiêu? Điện tích tổng cộng trên mặt hình trụ được giả thiết là bằng 0. Điện trường và điện tích bề mặt là bao nhiêu nếu ống hình trụ được nối đất?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Dùng các toạ độ trụ (r, φ, z) có trục z dọc theo trục của ống. Dùng định luật Gauss tính được cường độ điện trường như sau

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_r \quad \text{đối với} \quad r < r_0\,,$$

$$\mathbf{E}_2(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2r\varepsilon_0}\mathbf{e}_r \quad \text{đối với} \quad r > r_0 + \Delta r\,,$$

$$\mathbf{E}_3(r) = 0\,. \quad \text{đối với} \quad r_0 < r < r_0 + \Delta r\,.$$

Mật độ điện tích mặt σ trên một vật dẫn liên hệ với cường độ điện trường E tại bề mặt bởi công thức $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ với E có hướng đi ra và vuông góc với vật dẫn điện. Như vậy mật độ điện tích mặt tương ứng tại $r = r_0$ và $r = r_0 + \Delta r$ là

$$\sigma(r_0) = -\varepsilon_0 E_1(r_0) = -\frac{\rho_0 r_0}{2}\,,$$

$$\sigma(r_0 + \Delta r) = \varepsilon_0 E_2(r_0 + \Delta r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2(r_0 + \Delta r)}\,.$$

Nếu ống hình trụ được nối đất thì khi đó sẽ có

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{đối với} \quad r > r_0 + \Delta r\,,$$

$$\sigma(r_0 + \Delta r) = 0 \quad \text{đối với} \quad r = r_0 + \Delta r\,,$$

E và σ trong các vùng khác vẫn giữ nguyên như cũ.

1033

Một tụ điện chứa đầy không khí được chế tạo từ hai ống kim loại hình trụ đồng tâm. Ống hình trụ bên ngoài có bán kính 1 cm.

(a) Hãy xác định bán kính của ống trụ bên để giữa hai ống trụ có hiệu điện thế cực đại trước khi lớp điện môi bằng không khí bị đánh thủng?

(b) Hãy xác định bán kính của ống bên trong để năng lượng tích trữ trong tụ điện là cực đại trước khi lớp điện môi bị đánh thủng?

(c) Hãy tính hiệu điện thế cực đại trong trường hợp (a) và (b) đối với điện trường đánh thủng trong không khí là 3×10^6 V/m.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Gọi E_b là điện trường đánh thủng trong không khí và R_1 và R_2 là bán kính tương ứng của ống trụ bên trong và bên ngoài. Gọi τ là điện tích trên một đơn vị chiều dài trong từng ống và sử dụng định lý Gauss ta nhận được cường độ điện trường trong tụ điện và hiệu điện thế giữa hai ống lần lượt là

$$\mathbf{E}_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{e}_r\,, \quad V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}\,.$$

Vì điện trường gần với ống dẫn bên trong là mạnh nhất, ta có

$$E_b = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_1}\,.$$

Do đó, ta có

$$V_b = E_b R_1 \ln\frac{R_2}{R_1}\,,$$

$$\frac{dV_b}{dR_1} = E_b\left[\ln\frac{R_2}{R_1} + R_1\frac{R_1}{R_2}\left(-\frac{R_2}{R_1^2}\right)\right] = E_b\left(\ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right).$$

Để nhận được hiệu điện thế cực đại, R_1 phải có giá trị sao cho $\frac{dV_b}{dR_1} = 0$, nghĩa là $\ln\frac{R_2}{R_1} = 1$ hay $R_1 = \frac{R_2}{e}$. Khi đó hiệu điện thế cực đại sẽ là

$$V_{\max} = \frac{R_2}{e}E_b\,.$$

(b) Năng lượng trữ trên một đơn vị chiều dài của tụ điện là

$$W = \frac{1}{2}\tau V = \pi\varepsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$$

và

$$\frac{dW}{dR_1} = \pi\varepsilon_0 E_b^2 \left[2R_1 \ln\frac{R_2}{R_1} + R_1^2 \frac{R_1}{R_2}\left(-\frac{R_2}{R_1^2}\right)\right]$$
$$= \pi\varepsilon_0 E_b^2 R_1 \left(2\ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right).$$

Để tích trữ năng lượng cực đại, chúng ta cần có $\frac{dW}{dR_1} = 0$, nghĩa là, $2\ln\frac{R_2}{R_1} = 1$ hoặc $R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}}$. Trong trường hợp này hiệu điện thế là

$$V = \frac{1}{2\sqrt{e}} R_2 E_b .$$

(c) Đối với (a),

$$V_{\max} = \frac{R_2}{e} E_b = \frac{0,01}{e} \times 3 \times 10^6 = 1,1 \times 10^4 \text{ V}.$$

Đối với (b),

$$V_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{e}} R_2 E_b = \frac{0,01 \times 3 \times 10^6}{2\sqrt{e}} = 9,2 \times 10^3 \text{ V}.$$

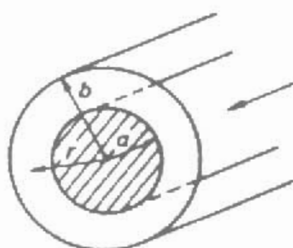
1034

Trên hình 1.13, ta thấy một dây cáp đồng trục rất dài bao gồm một ống hình trụ bên trong bán kính a, độ dẫn điện σ và một ống hình trụ bên ngoài đồng trục có bán kính b. Vỏ ngoài có độ dẫn điện vô hạn. Khoảng không gian giữa các ống hình trụ là chân không. Một mật độ dòng điện đồng đều không đổi j có hướng dọc theo trục toạ độ z (trùng với trục của cáp) được duy trì trong ống hình trụ bên trong. Dòng điện hồi tiếp chảy đồng đều trên vỏ ngoài. Hãy tính mật độ điện tích mặt trên ống hình trụ bên trong như một hàm của toạ độ z với gốc toạ độ $z = 0$ được chọn trên mặt phẳng nằm giữa hai đầu của dây cáp.

(*Princeton*)

Lời giải:

Giả thiết chiều dài của dây cáp là $2l$ và các ống hình trụ bên trong và bên ngoài được nối với nhau tại bề mặt cuối $z = -l$. (Bề mặt $z = l$ có thể nối với nguồn pin). Vỏ hình trụ bên ngoài là một dây dẫn lý tưởng mà điện thế của



Hình 1.13

nó là như nhau ở khắp mọi nơi và được lấy bằng 0. Ống hình trụ bên trong có mật độ dòng điện $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, nghĩa là $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{j}{\sigma}\mathbf{e}_z$, sao cho mặt cắt của nó z=constant là một mặt đẳng thế với điện thế

$$V(z) = -\frac{j}{\sigma}(z + l) .$$

Trong toạ độ trụ, cường độ điện trường tại một điểm (r, φ, z) bên trong dây cáp có thể được biểu thị như sau

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = E_r(r, z)\mathbf{e}_r + E_z(r, z)\mathbf{e}_z .$$

Vì dòng điện không thay đổi theo trục z nên $E_z(r, z)$ cũng không phụ thuộc vào z. Chọn làm mặt Gauss là một mặt trụ bán kính r, chiều dài dz với trục z cũng là trục của nó. Lưu ý rằng thông lượng điện qua hai mặt cuối của nó có độ lớn như nhau và có hướng sao cho sự đóng góp của chúng triệt tiêu lẫn nhau. Khi đó định luật Gauss trở thành

$$E_r(r, z) \cdot 2\pi r dz = \lambda(z) dz/\varepsilon_0 ,$$

trong đó $\lambda(z)$) là điện tích trên một đơn vị chiều dài của ống hình trụ bên trong. Suy ra

$$E_r(r, z) = \frac{\lambda(z)}{2\pi r \varepsilon_0} .$$

Do đó ta nhận được hiệu điện thế giữa dây dẫn bên trong và bên ngoài như sau

$$V(z) = \int_a^b E_r(r, z) dr = \frac{\lambda(z)}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a} .$$

Vì $V(z) = -\frac{j}{\sigma}(z + l)$ nên phương trình trên có dạng

$$\lambda(z) = \frac{2\pi\varepsilon_0 V(z)}{\ln(b/a)} = -\frac{2\pi\varepsilon_0 j(z + l)}{\sigma \ln(b/a)} .$$

Khi đó mật độ điện tích mặt tại z là

$$\sigma_s(z) = \frac{\lambda(z)}{2\pi a} = -\frac{\varepsilon_0 j(z+l)}{a\sigma \ln(b/a)}\,.$$

Chọn gốc toạ độ tại bề mặt cuối với $z = -l$, ta có

$$\sigma_s(z) = -\frac{\varepsilon_0 j z}{a\sigma \ln(b/a)}\,.$$

1035

Một vật dẫn kích thước hữu hạn có độ dẫn đồng đều σ và mật độ điện tích khối đồng đều ρ. Hãy mô tả chi tiết sự biến đổi tiếp theo của hệ này trong hai trường hợp:

(a) Vật dẫn là một hình cầu,

(b) Vật dẫn không phải là hình cầu,

Điều gì sẽ xảy ra đối với năng lượng của hệ trong hai trường hợp trên?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Lấy hằng số điện môi của vật dẫn là ε. Từ các phương trình $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon$, $\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ và $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, ta nhận được

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho\,, \quad \text{hay} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}, \quad \text{và} \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,.$$

(a) Nếu vật dẫn là hình cầu, tính đối xứng cầu đòi hỏi $\mathbf{E} = E_r\mathbf{e}_r$. Do đó

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,,$$

suy ra

$$\mathbf{E}(r,t) = \frac{\rho_0\mathbf{r}}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} + \mathbf{E}(0,t) = \frac{\rho_0\mathbf{r}}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,,$$
$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{\sigma\rho_0 r}{3\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\mathbf{e}_r\,.$$

Lưu ý rằng $\mathbf{E}(0,t) = 0$ đối với trường hợp đối xứng. Hiển nhiên là khi $t\to\infty$, $\mathbf{E} = 0, \rho = 0$, và $\mathbf{J} = 0$ bên trong vật dẫn. Như vậy điện tích được phân bố đồng đều trên mặt cầu sau một thời gian đủ lớn.

(b) Nếu vật dẫn không phải là hình cầu thì lời giải phức tạp hơn. Tuy nhiên ta vẫn có

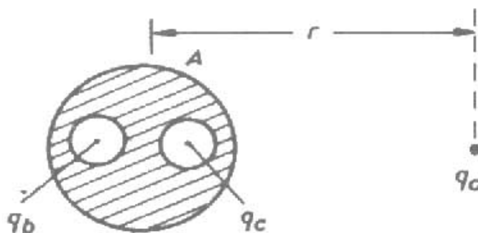
$$|\mathbf{E}| \propto e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}, \ |\mathbf{J}| \propto e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}, \ \rho \propto e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}.$$

Điều này có nghĩa là **E**, **J** và ρ bên trong vật dẫn mỗi đại lượng đều suy giảm theo hàm số mũ tới 0 với hằng số thời gian $\frac{\varepsilon}{\sigma}$. Kết quả là điện tích sẽ chỉ được phân bố trên bề mặt của vật dẫn. Còn sự thay đổi năng lượng, đầu tiên chúng ta hãy xét trường hợp (a). Điện trường bên ngoài vật dẫn luôn luôn như nhau trong khi điện trường bên trong vật dẫn sẽ thay đổi từ một giá trị hữu hạn đến 0. Kết quả thực chất là năng lượng điện giảm đi một lượng đúng bằng lượng mất đi do sự chuyển đổi của năng lượng điện thành nhiệt. Trong trường hợp (b) điện trường bên ngoài vật dẫn sẽ phụ thuộc vào θ và φ nhưng kết quả định tính vẫn như thế, nói một cách khác là năng lượng điện giảm theo thời gian chuyển đổi thành nhiệt. Một cách ngắn gọn, sự phân bố điện tích trên bề mặt cuối cùng sao cho năng lượng điện của hệ trở thành nhỏ nhất. Nói một cách khác, vật dẫn sẽ trở thành một khối đẳng thế.

1036

Một vật dẫn điện hình cầu A có chứa hai lỗ hình cầu như trên hình 1.14. Tổng điện tích trên vật dẫn bằng 0. Tuy nhiên, có một điện tích điểm $+q_b$ tại tâm của một lỗ và $+q_c$ tại tâm của lỗ kia. Tại một khoảng cách r ở xa là một điện tích khác $+q_d$. Hãy xác định lực tác dụng lên A, q_b, q_c, và q_d? Những câu trả lời nào, nếu có, chỉ là gần đúng và phụ thuộc vào r có giá trị rất lớn? Bình luận về sự đồng đều của phân bố điện tích trên các thành lỗ rỗng và trên A nếu r không lớn.

(*Wisconsin*)



Hình 1.14

Lời giải:

Các điện tích bên ngoài một lỗ rỗng không ảnh hưởng đến trường ở bên trong nó vì có sự che chắn tĩnh điện của vật dẫn. Vì đối xứng cầu, các lực tác dụng trên các điện tích điểm q_b và q_c tại tâm của các lỗ rỗng bằng 0. Do cân bằng tĩnh điện chúng ta thấy rằng bề mặt của hai lỗ rỗng hình cầu mang một tổng điện tích $-(q_b + q_c)$ và vì quả cầu A không tích điện ngay từ đầu nên mặt cầu của nó phải chứa các điện tích cảm ứng $q_b + q_c$. Khi r rất lớn, ta có thể tính gần đúng tương tác giữa quả cầu A và điện tích điểm q_d bằng một lực tĩnh điện giữa các điện tích điểm $q_b + q_c$ tại tâm và q_d, cụ thể là:

$$F = \frac{q_d(q_b + q_c)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} .$$

Tuy nhiên, phương trình này không đúng đối với r không đủ lớn. Sự phân bố điện tích trên bề mặt của từng lỗ rỗng luôn luôn đồng đều và không phụ thuộc vào độ lớn của r. Mặc dù vậy, do ảnh hưởng của q_d , sự phân bố điện tích trên bề mặt quả cầu A sẽ không đồng đều và sự không đồng đều này sẽ trở thành càng lớn khi r giảm.

1037

Một tụ điện cầu gồm hai mặt cầu dẫn điện đồng tâm có bán kính a và $b\,(a > b)$. Mặt cầu bên ngoài được nối đất và một điện tích Q được đặt vào mặt cầu bên trong. Sau đó vật dẫn bên ngoài co lại từ bán kính a thành bán kinh a'. Tìm công thực hiện bởi lực điện.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Cả hai điện trường tại $r < b$ và $r > a$ đều bằng 0. Tại $b < r < a$ điện trường là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r .$$

Do đó năng lượng điện trường là

$$W = \int_b^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) .$$

Khi mặt cầu bên ngoài co lại từ $r = a$ tới $r = a'$, công do lực điện thực hiện đúng bằng với độ giảm của năng lượng điện trường.

$$W_a - W_{a'} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right) = \frac{Q^2(a-a')}{8\pi\varepsilon_0 aa'}\,.$$

1038

Một mặt cầu kim loại mỏng bán kính b có điện tích Q.

(a) Điện dung của nó là bao nhiêu?

(b) Mật độ năng lượng của điện trường tại một khoảng cách r tính từ tâm của cầu là bao nhiêu?

(c) Tổng năng lượng của điện trường là bao nhiêu?

(d) Tính công đã thực hiện khi tích điện cho mặt cầu bằng cách mang các điện tích vô cùng nhỏ từ vô cực đến.

(e) Điện thế V được thiết lập giữa các mặt cầu kim loại mỏng đồng tâm bên trong (bán kính a) và bên ngoài (bán kính b). Bán kính của mặt cầu bên trong là bao nhiêu để cho điện trường gần bề mặt của nó là nhỏ nhất?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ cầu (r, θ, φ). Điện trường bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r\,.$$

Cho điện thế tại vô cực bằng 0, khi đó điện thế tại r là

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\,.$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{Q}{V(b)} = 4\pi\varepsilon_0 b\,.$$

(b) $w_e(r) = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$.

(c) $W_e = \frac{1}{2}V(b)Q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}$.

Cũng có thể tính từ mật độ năng lượng điện trường $w_e(r)$

$$W_e = \int_{r>b} w_e(r')dV' = \int_b^\infty \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2\varepsilon_0} \frac{1}{r'^4} \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}.$$

(d) Công đã thực hiện khi tích điện cho quả cầu bằng cách mang các điện tích vô cùng nhỏ từ vô cực đến là

$$W = \int_0^Q V(Q')dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ'}{b} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b} = W_e$$

đúng như mong đợi.

(e) Giả thiết rằng mặt cầu bên trong mang một điện tích Q. Đối với $a < r < b$ cường độ điện trường là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r.$$

Hiệu điện thế giữa các mặt cầu đồng tâm là

$$V = \int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Biểu thị theo V, ta có

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 V}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})}$$

và

$$E(r) = \frac{4\pi\varepsilon_0 V}{4\pi\varepsilon_0 r^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} = \frac{V}{r^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})}.$$

Đặc biệt, ta có

$$E(a) = \frac{V}{a^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} = \frac{Vb}{ab - a^2}.$$

Từ $\frac{dE(a)}{da} = 0$ ta thấy rằng $E(a)$ là cực tiểu tại $a = \frac{b}{2}$, và giá trị cực tiểu đó là

$$E_{\min}(a) = \frac{4V}{b}.$$

1039

Một quả cầu dẫn điện có tổng điện tích Q bị cắt làm đôi. Phải dùng một lực như thế nào để giữ các nửa này với nhau?

(*MIT*)

Lời giải:

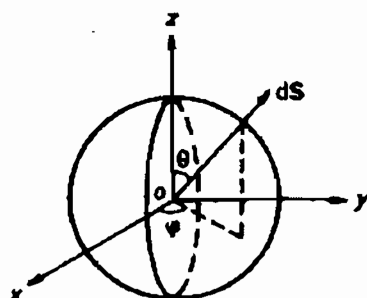
Điện tích được phân bố hoàn toàn trên bề mặt quả cầu với mật độ điện tích mặt là $\sigma = Q/4\pi R^2$ với R là bán kính của quả cầu. Chúng ta đã biết trong bài tập **1021** là lực tác dụng lên một yếu tố diện tích $d\mathbf{S}$ của mặt cầu dẫn điện được tính như sau

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} d\mathbf{S}\,.$$

Dùng hệ toạ độ như trên hình 1.15. Mặt phẳng cắt đôi quả cầu được lấy là mặt phẳng xoz. Lực đẩy giữa hai nửa quả cầu vuông góc với mặt cắt do đó lực tổng hợp tác dụng lên nửa bên phải hướng theo trục y. Độ lớn của lực tổng hợp này là

$$\begin{aligned} F &= \int dF \sin\theta \sin\varphi = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} R^2 \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\,. \end{aligned}$$

Đây cũng chính là lực cần thiết để giữ hai nửa quả cầu với nhau.



Hình 1.15

1040

Một hạt có điện tích q được dịch chuyển từ vô cực đến tâm của một vỏ cầu rỗng dẫn điện bán kính R, chiều dày t, qua một lỗ rất nhỏ trên vỏ cầu. Tính công thực hiện trong dịch chuyển đó?

(*Princeton*)

Lời giải:

Công thực hiện bởi một ngoại lực đúng bằng độ tăng năng lượng điện trường của toàn hệ. Cường độ điện trường tại một điểm cách điện tích điểm q một khoảng cách r là $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Khi q ở tại vô cực, năng lượng điện của toàn hệ là

$$W = \int_\infty \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 dV\,,$$

Lấy tích phân theo toàn bộ không gian vì khi khoảng cách giữa vỏ cầu và q là vô hạn thì trường do q sinh ra tại vỏ cầu dẫn điện có thể lấy bằng 0. Sau khi q được dịch chuyển đến tâm vỏ quả cầu dẫn điện, vì vỏ không ảnh hưởng đến trường bên trong nên cường độ điện trường tại một điểm bên trong vỏ vẫn là $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, r là khoảng cách từ điểm đó đến q. Tại một điểm bên ngoài vỏ, định luật Gauss chỉ ra rằng cường độ điện trường vẫn còn là $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Do đó năng lượng điện của hệ có giá trị giống như W nhưng trừ đi phần đóng góp của vỏ, mà bên trong chiều dày của nó điện trường bằng 0. Như vậy có một sự giảm năng lượng:

$$\begin{aligned}-\Delta W &= \int_R^{R+t} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+t}\right),\end{aligned}$$

giá trị này bằng công âm thực hiện bởi ngoại lực.

1041

Một tụ điện được chế tạo bởi ba vỏ cầu mỏng, dẫn điện, đồng tâm bán kính a, b và $d\,(a < b < d)$. Vỏ cầu trong và vỏ cầu ngoài được nối với nhau bằng một dây dẫn cách điện mảnh chạy qua một lỗ rất nhỏ trong vỏ cầu giữa. Bỏ qua hiệu ứng của lỗ,

(a) hãy tìm điện dung của hệ,

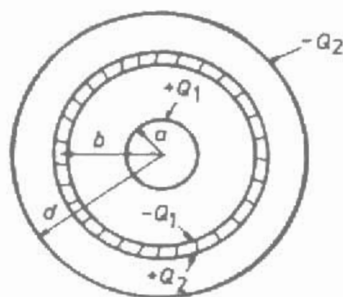
(b) hãy cho biết một điện tích tổng cộng Q_B bất kì đặt trên vỏ cầu giữa sẽ tự phân bố nó như thế nào trên hai bề mặt của vỏ cầu đó.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng điện tích của vỏ cầu bên trong là Q_1 và điện tích của vỏ cầu bên ngoài là $-Q_2$. Khi đó các điện tích trên bề mặt trong và ngoài của vỏ cầu giữa là $-Q_1$ và $+Q_2$ $(Q_1, Q_2 > 0)$ như minh hoạ trên hình 1.16. Các cường độ điện trường là

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad (a < r < b),$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q_2\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad (b < r < d),$$
$$\mathbf{E} = 0, \quad (r < a, r > d).$$



Hình 1.16

Điện thế tại điểm P là

$$\varphi(p) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

với $\varphi(\infty) = 0$. Như vậy ta có

$$\varphi(d) = 0, \quad \varphi(b) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right).$$

Vì vỏ cầu bên trong và bên ngoài nối với nhau nên điện thế của chúng phải bằng nhau. Do đó

$$\varphi(a) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) = 0,$$

Như vậy

$$Q_1\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=-Q_2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right).$$

Hiệu điện thế giữa các vỏ cầu là

$$V_{ab}=\varphi(a)-\varphi(b)=-\varphi(b),$$
$$V_{db}=\varphi(d)-\varphi(b)=-\varphi(b).$$

Như vậy điện dung giữa vỏ cầu bên trong và bề mặt trong của vỏ cầu giữa là

$$C_{ab}=\frac{Q_1}{V_{ab}}=-\frac{Q_1}{\varphi(b)},$$

Và điện dung giữa mặt ngoài của vỏ cầu giữa và vỏ cầu ngoài là

$$C_{bd}=\frac{Q_2}{V_{bd}}=\frac{Q_2}{\varphi(b)}.$$

Điện dung của toàn hệ có thể coi như C_{ab} và C_{bd} mắc nối tiếp nhau, cụ thể là

$$C=\left(\frac{1}{C_{ab}}+\frac{1}{C_{bd}}\right)^{-1}=\frac{1}{\varphi(b)}\left(\frac{1}{Q_2}-\frac{1}{Q_1}\right)^{-1}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ad}{d-a}.$$

(b) Điện tích thực Q_B tại vỏ cầu giữa phải bằng Q_2-Q_1, sao cho

$$Q_1=-\frac{a(d-b)}{b(d-a)}Q_B,\quad Q_2=\frac{d(b-a)}{b(d-a)}Q_B.$$

Điều này có nghĩa là mặt trong của vỏ cầu giữa sẽ có tổng điện tích là $\frac{a(d-b)}{b(d-a)}Q_B$, trong khi mặt ngoài của nó có một tổng điện tích là $\frac{d(b-a)}{b(d-a)}Q_B$.

1042

Một ống hình trụ được tách thành hai nửa song song với trục của nó. Hai nửa đó được giữ ở điện thế V_0 và 0 như trên hình 1.17(a). Không có một điện tích thực nào trong hệ.

(a) Hãy tính sự phân bố điện thế trong toàn bộ không gian.

(b) Hãy tính điện trường đối với $r \gg a$.

(c) Hãy tính điện trường đối với $r \ll a$.

(d) Phác hoạ các đường sức điện trường trong toàn bộ không gian.

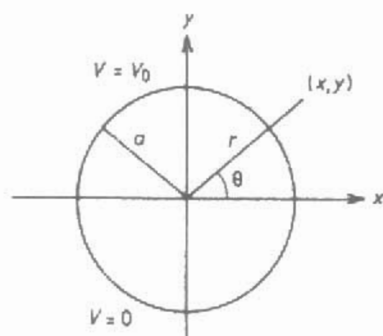
(*MIT*)

Lời giải:

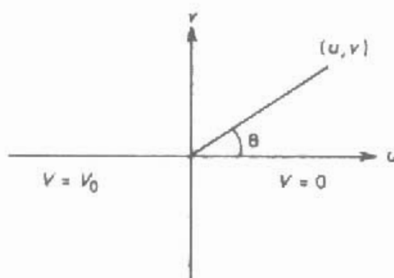
(a) Hãy dùng ánh xạ bảo giác để ánh xạ phần trong của hình tròn $|z| = a$ lên nửa mặt phẳng trên w bằng phép biến đổi (H. 1.17(b))

$$w = i\left(\frac{z-a}{z+a}\right).$$

Mặt trên và mặt dưới của vòng tròn đã được phác thảo lên trên trục âm và trục dương (trục u) của mặt phẳng w một cách tương ứng.



(a) Mặt phẳng z



(b) Mặt phẳng w

Hình 1.17

Bài tập bây giờ được quy về tìm một hàm số V điều hoà trong nửa trên của mặt phẳng w và lấy các giá trị 0 đối với $u > 0$ và V_0 đối với $u < 0$. Sử dụng hàm $V = A\theta + B$ mà A, B là các hằng số thực, vì $\theta = \text{Im}\{\ln w\}$ là hàm điều hoà. Điều kiện biên cho $B = 0$, $A = V_0/\pi$. Do đó

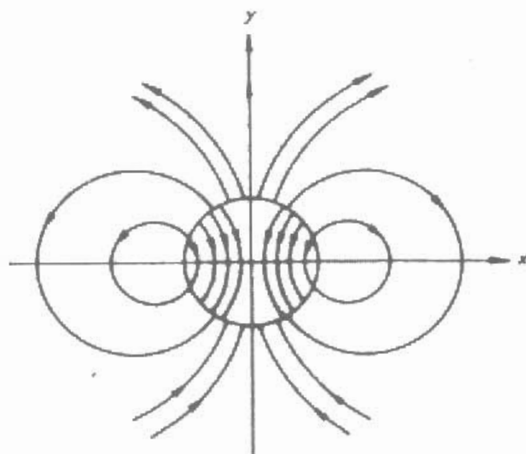
$$\begin{aligned}
V &= \frac{V_0}{\pi}\,\text{Im}\left\{\ln\left[i\frac{z-a}{z+a}\right]\right\} \\
&= \frac{V_0}{\pi}\,\text{Im}\left\{\ln\left[i\frac{r\cos\theta - a + ir\sin\theta}{r\cos\theta + a + ir\sin\theta}\right]\right\} \\
&= \frac{V_0}{\pi}\,\text{Im}\left\{\ln\left[i\frac{r^2 - a^2 + 2iar\sin\theta}{(r\cos\theta + a)^2 + r^2\sin^2\theta}\right]\right\} \\
&= \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{2ar\sin\theta}{|r^2 - a^2|}\right].
\end{aligned}$$

(b) Đối với $r \gg a$, ta có

$$V \approx \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{2a\sin\theta}{r}\right] = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0 a\sin\theta}{\pi r},$$

và do đó

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2V_0 a\sin\theta}{\pi r^2},$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{2Va}{\pi r^2}\cos\theta.$$



Hình 1.18

(c) Đối với $r \ll a$, ta có

$$V \approx \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{2r\sin\theta}{a}\right] = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0 r\sin\theta}{\pi a},$$

và do đó

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2V_0\sin\theta}{\pi a},$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{2V_0}{\pi a}\cos\theta.$$

(d) Các đường sức điện trường được biểu diễn trên hình 1.18.

3. TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN TRONG MÔI TRƯỜNG ĐIỆN MÔI (1043–1061)

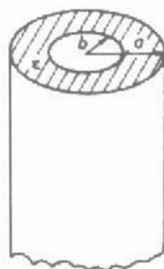
1043

Không gian giữa hai ống hình trụ kim loại mỏng, dài chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi ε. Các ống hình trụ có bán kính a và b như được chỉ ra trên hình 1.19.

(a) Hãy xác định điện tích trên một đơn vị chiều dài ở trên các ống hình trụ khi hiệu điện thế giữa ống ngoài và ống trong là V.

(b) Điện trường giữa các ống hình trụ là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)



Hình 1.19

Lời giải:

Đây là một tụ điện trụ đồng trục có điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

Vì ống hình trụ bên ngoài có điện thế cao hơn, từ $Q = CV$ ta tính được điện tích trên một đơn vị chiều dài của các ống hình trụ bên trong và bên ngoài là

$$\lambda_i = -\frac{2\pi\varepsilon V}{\ln(\frac{a}{b})}, \quad \lambda_o = \frac{2\pi\varepsilon V}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

Khi đó theo định luật Gauss, cường độ điện trường ở bên trong tụ điện là

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon r}\mathbf{e}_r = -\frac{V}{r\ln(\frac{a}{b})}\mathbf{e}_r.$$

1044

Hãy tính điện trở giữa vật dẫn ở tâm có bán kính a và vật dẫn đồng trục bán kính b đối với một ống hình trụ có chiều dài $l \gg b$ chứa đầy một chất điện môi có hằng số điện môi ε và độ dẫn điện σ. Đồng thời tính điện dung giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi V là hiệu điện thế giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài, ta có thể biểu diễn cường độ điện trường giữa hai vật dẫn như sau

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V}{r\ln(\frac{b}{a})}\mathbf{e}_r .$$

Theo định luật Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, dòng điện giữa hai vật dẫn là

$$I = 2\pi r l J = \frac{2\pi\sigma l V}{\ln(\frac{b}{a})} .$$

Do đó, điện trở giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài là

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{2\pi l\sigma} .$$

Vì điện trường bằng 0 bên trong một vật dẫn, ta tìm được mật độ điện tích mặt ω của vật dẫn bên trong từ hệ thức biên $E = \frac{\omega}{\varepsilon}$, nghĩa là

$$\omega = \varepsilon\frac{V}{a\ln(\frac{b}{a})} .$$

Như vậy vật dẫn bên trong mang một tổng điện tích $Q = 2\pi a l\omega$. Do đó điện dung giữa hai vật dẫn là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(\frac{b}{a})} .$$

1045

Hai vật dẫn được nhúng vào trong một vật liệu có độ dẫn $10^{-4}\Omega/\text{m}$ và hằng số điện môi $\varepsilon = 80\varepsilon_0$. Điện trở giữa hai vật dẫn đo được là $10^5\Omega$. Hãy tìm biểu thức của điện dung giữa hai vật dẫn và tính giá trị của nó.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Giả thiết rằng hai vật dẫn chứa các điện tích tự do Q và $-Q$. Xét một mặt kín bao quanh vật dẫn có điện tích Q (nhưng không bao quanh vật dẫn kia). Sử dụng định luật Ohm và định luật Gauss ta có

$$I = \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q}{\varepsilon} .$$

Nếu hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là V, ta có $V = IR = \frac{\sigma Q}{\varepsilon} R$, suy ra

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{\sigma R} .$$

Giá trị bằng số của điện dung này là

$$C = \frac{80 \times 8,85 \times 10^{-12}}{10^{-4} \times 10^{5}} = 7,08 \times 10^{-11}\ \text{F} .$$

1046

Xét một tụ điện trụ đồng trục dài có một vật dẫn bên trong bán kính a, một vật dẫn bên ngoài bán kính b và một chất điện môi có hằng số điện môi $K(r)$ thay đổi theo bán kính trụ r. Tụ điện được tích điện tới hiệu điện thế V. Hãy xác định sự phụ thuộc bán kính của $K(r)$ sao cho mật độ năng lượng trong tụ điện không đổi (với điều kiện này chất điện môi không có ứng suất bên trong). Hãy tính điện trường $E(r)$ trong những điều kiện này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của vật dẫn bên trong. Định luật Gauss cho ta

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} ,$$

vì D nằm dọc theo hướng bán kính do tính đối xứng. Mật độ năng lượng tại r là

$$U(r) = \frac{1}{2} ED = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 K(r)} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 r^2 K(r)} .$$

Nếu mật độ năng lượng này không phụ thuộc vào r, ta phải có $r^2 K(r) =$ hằng số $= k$, nghĩa là $K(r) = kr^{-2}$.

Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là

$$V = -\int_a^b E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k}\int_a^b r dr$$
$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 k}(b^2 - a^2) .$$

Do đó

$$\lambda = -\frac{4\pi\varepsilon_0 kV}{b^2 - a^2} ;$$

và từ đây tính được điện trường

$$E(r) = -\frac{2rV}{b^2 - a^2} .$$

1047

Tìm thế năng của một điện tích điểm trong chân không ở cách xa một môi trường điện môi bán vô hạn có hằng số điện môi K một khoảng cách x.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, φ, z) với bề mặt của môi trường bán vô hạn là mặt phẳng $z = 0$ và trục z đi qua điện tích điểm q nằm tại $z = x$. Gọi $\sigma_p(r)$ là mật độ điện tích mặt biên của môi trường điện môi, tức mặt phẳng $z = 0$, giả thiết rằng môi trường không chứa điện tích tự do. Thành phần vuông góc của cường độ điện tại điểm $(r, \varphi, 0)$ ở ngay phía trên của mặt phân cách $(z = 0_+)$ là

$$E_{z1}(r) = -\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_p(r)}{2\varepsilon_0}$$

Tuy nhiên, ở ngay phía dưới của mặt phân cách $(z = 0_-)$ thành phần vuông góc của điện trường là

$$E_{z2}(r) = -\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_p(r)}{2\varepsilon_0}$$

Điều kiện biên của điện cảm tại $z = 0$ là

$$\varepsilon_0 E_{z1}(r) = \varepsilon_0 K E_{z2}(r) .$$

Do đó

$$\sigma_p(r) = \frac{(1-K)qx}{2\pi(1+K)(r^2+x^2)^{3/2}}\,.$$

Điện trường tại điểm $(0, 0, x)$, nơi đặt điện tích điểm q, được sinh ra do phân bố của các điện tích liên kết, chỉ có thành phần vuông góc do đối xứng. Giá trị của nó là

$$E = \int \frac{\sigma_p(r)x dS}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{(1-K)qx^2}{4\pi(1+K)\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+x^2)^3} = \frac{(1-K)q}{16\pi(1+K)\varepsilon_0 x^2}\,,$$

ở đó yếu tố bề mặt dS được lấy là $2\pi r dr$. Do đó lực tác dụng lên điện tích điểm q là

$$F = qE = \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\varepsilon_0 x^2}\,.$$

Thế năng W của điện tích điểm q bằng công do ngoại lực làm dịch chuyển q từ vô cực đến vị trí x, nghĩa là

$$W = -\int_\infty^x F dx' = -\int_\infty^x \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\varepsilon_0 x'^2}dx' = \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\varepsilon_0 x}\,.$$

1048

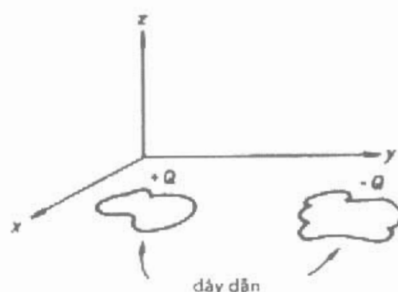
Điện dung tương hỗ của hai sợi dây kim loại mảnh nằm trên mặt phẳng $z = 0$ là C. Bây giờ hãy tưởng tượng rằng nửa không gian $z < 0$ được lấp đầy một chất điện môi có hằng số điện môi ϵ. Điện dung mới sẽ là bao nhiêu?

(MIT)

Lời giải:

Như ta thấy trên hình 1.20, trước khi chứa đầy vật liệu điện môi, một trong hai dây dẫn mảnh mang điện tích $+Q$, trong khi dây dẫn kia mang điện tích $-Q$. Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là V và điện dung của hệ là $C = Q/V$. Cường độ điện trường trong không gian là $\mathbf{E}$. Sau khi nửa không gian $z < 0$ được chứa đầy chất điện môi, gọi $\mathbf{E}'$ là cường độ điện trường trong không gian. Điện trường này có mối liên hệ với điện trường ban đầu bởi phương trình $\mathbf{E}' = K\mathbf{E}$, trong đó K là một hằng số được xác định dưới đây.

Ta xét một hình trụ thẳng, cắt ngang qua mặt $z = 0$, đồng thời mặt cắt tại $z = 0$ chỉ chứa diện tích bao quanh sợi dây mang điện tích $+Q$ và bản thân sợi dây đó. Bề mặt đầu trên S_1 của hình trụ này ở trong không gian $z > 0$ và bề mặt đầu dưới S_2 ở trong không gian $z < 0$. Ta sẽ áp dụng định luật Gauss đối với hình trụ này. Sự đóng góp của phần mặt trụ có thể bỏ qua nếu ta lấy hình trụ đủ ngắn. Như vậy trước khi cho chất điện môi vào ta có



Hình 1.20

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q . \qquad (1)$$

và sau khi cho chất điện môi vào

$$\oint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon \int_{S_2} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = Q . \qquad (2)$$

Lưu ý rằng các vectơ diện tích $\mathbf{S}_1$ và $\mathbf{S}_2$ bằng nhau về độ lớn và ngược hướng nhau. Trong phương trình (1) hai chỉ số 1 và 2 có thể hoán đổi cho nhau nên sự đóng góp của hai thành phần này phải bằng nhau. Do đó ta có

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0} .$$

Phương trình (2) có thể viết lại như sau

$$K\left(\varepsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}\right) = Q .$$

hay

$$\frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon)K}{2\varepsilon_0} Q = Q ,$$

Suy ra

$$K = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} ; \quad \mathbf{E}' = \frac{2\varepsilon_0 \mathbf{E}}{\varepsilon + \varepsilon_0} .$$

Để tính hiệu điện thế giữa hai vật dẫn, ta có thể chọn một đường L bất kì của tích phân từ vật dẫn này đến vật dẫn kia. Trước khi chứa đầy chất điện môi, hiệu điện thế là

$$V = -\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} ,$$

Trong khi đó, sau khi chứa chất điện môi, hiệu điện thế đó trở thành

$$V' = -\int_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -K \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = KV .$$

Do đó điện dung sau khi đưa chất điện môi vào là

$$C' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{KV} = \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{2\varepsilon_0} C .$$

1049

Một tụ điện phẳng (có các bản cực dẫn điện hoàn hảo) với khoảng cách giữa các bản tụ điện là d và chứa đầy hai lớp vật liệu (1) và (2). Lớp thứ nhất có hằng số điện môi ε_1, độ dẫn điện σ_1, lớp thứ hai có hằng số điện môi ε_2, độ dẫn điện σ_2 và chiều dày tương ứng của các lớp điện môi đó là d_1 và d_2. Tụ điện được nạp điện đến hiệu điện thế V (xem H. 1.21). Bỏ qua các hiệu ứng rìa.

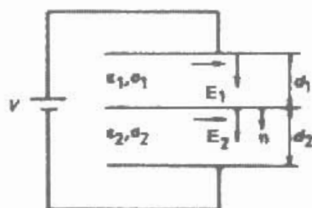
(a) Xác định điện trường trong vật liệu (1) và (2).

(b) Xác định dòng chạy qua tụ điện.

(c) Xác định mật độ điện tích mặt toàn phần trên mặt phân cách giữa (1) và (2) là bao nhiêu?

(d) Xác định mật độ điện tích mặt tự do trên mặt phân cách giữa (1) và (2) là bao nhiêu?

(*CUSPEA*)



Hình 1.21

Lời giải:

(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, điện trường E_1 và E_2 trong vật liệu (1) và (2) là điện trường đều và hướng của chúng vuông góc với các bản cực. Như vậy ta có

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 . \tag{1}$$

Vì dòng điện chạy qua vật liệu (1) và (2) phải bằng nhau, ta có

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 . \tag{2}$$

Kết hợp phương trình (1) và (2), ta được

$$E_1 = \frac{V\sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} ; \quad E_2 = \frac{V\sigma_1}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} .$$

(b) Mật độ dòng điện chạy qua tụ điện là

$$J = \sigma_1 E_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2 V}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} .$$

Hướng của nó vuông góc với các bản cực.

(c) Bằng cách sử dụng điều kiện biên (xem hình 1.21)

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \sigma_t/\varepsilon_0 ,$$

ta tìm được mật độ điện tích mặt toàn phần trên mặt phân cách giữa vật liệu (1) và (2) là

$$\sigma_t = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)V}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} .$$

(d) Từ điều kiện biên

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2\mathbf{E}_2 - \varepsilon_1\mathbf{E}_1) = \sigma_f ,$$

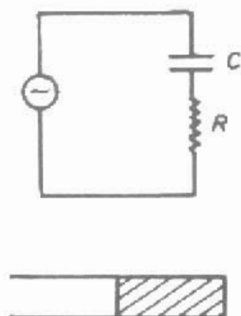
ta tìm được mật độ điện tích mặt tự do trên mặt phân cách là

$$\sigma_f = \frac{(\sigma_1\varepsilon_2 - \sigma_2\varepsilon_1)V}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} .$$

1050

Trong hình 1.22, một tụ điện không khí với các bản cực phẳng, song song có điện dung C và một điện trở R mắc nối tiếp với một nguồn điện xoay chiều có tần số ω. Điện áp trên R là V_R. Bây giờ một nửa của tụ điện chứa đầy một vật liệu điện môi có hằng số điện môi ε nhưng phần còn lại của mạch điện giữ không thay đổi. Điện áp trên R bây giờ là $2V_R$. Bỏ qua hiệu ứng rìa. Hãy tính hằng số điện môi ε qua R, C và ω.

(*Columbia*)



Hình 1.22

Lời giải:

Khi một nửa của tụ điện chứa đầy vật liệu điện môi, nó trở thành hai tụ điện mắc song song, điện dung của hệ lúc này trở thành

$$C' = \frac{C}{2} + \frac{\varepsilon C}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)C\,.$$

Điện áp trên R là VR/Z, trong đó V là hiệu điện thế của nguồn xoay chiều và Z là tổng trở của mạch điện. Do đó

$$\left|\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C'}}\right| = 2\left|\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}\right|,$$

với $j = \sqrt{-1}$. Suy ra

$$4R^2 + \frac{16}{\omega^2 C^2 (1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})^2} = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\,.$$

Giải phương trình này ta nhận được giá trị của hằng số điện môi

$$\varepsilon = \left(\frac{4}{\sqrt{1 - 3R^2C^2\omega^2}} - 1\right)\varepsilon_0\,.$$

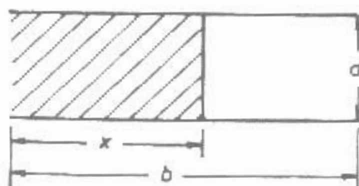
1051

Một tụ điện được chế tạo bởi hai bản cực phẳng song song có chiều dày a và chiều dài b cách nhau một khoảng cách d ($d \ll a, b$) như trên hình 1.23. Tụ điện có một thanh điện môi có hằng số điện môi tương đối là K giữa hai bản cực.

(a) Tụ điện được nối với một ắc quy có suất điện động V. Thanh điện môi được kéo một phần ra khỏi các bản cực sao cho chỉ có một chiều dài x còn ở lại giữa các bản cực. Hãy tính lực tác dụng lên thanh điện môi, lực này có hướng kéo ngược thanh điện môi trở về phía giữa các bản cực.

(b) Với thanh điện môi hoàn toàn ở bên trong, các bản cực tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế V và sau đó nguồn ắc quy được ngắt ra. Một lần nữa, thanh điện môi lại được kéo ra sao cho chỉ có chiều dài x còn lại bên trong các bản cực. Hãy tính lực tác dụng lên thanh điện môi, lực này có hướng kéo thanh trở lại phía trong các bản cực. Bỏ qua hiệu ứng rìa trong cả hai phần (a) và (b).

(*Columbia*)



Hình 1.23

Lời giải:

Coi tụ điện trong hình 1.23 như hai tụ điện mắc song song, chúng ta nhận được điện dung toàn phần là

$$C = \varepsilon_0 \frac{Kxa}{d} + \frac{\varepsilon_0 (b-x)a}{d} = \frac{\varepsilon_0 (K-1)ax}{d} + \frac{\varepsilon_0 ba}{d} = \frac{\varepsilon_0 [(K-1)x + b]a}{d} .$$

Xét sự tích điện của tụ điện. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$VdQ = d\left(\frac{1}{2}V^2 C\right) - Fdx .$$

(a) Khi V = hằng số, $Q = CV$, ta có

$$VdQ = V^2 dC .$$

Do đó

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_0(K-1)aV^2}{2d}.$$

Vì $K > 1, F > 0$. Điều này có nghĩa là F có chiều hướng làm tăng x, tức là kéo thanh trở lại vào giữa các bản cực.

(b) Vì các bản cực được cách điện, $dQ = 0$. Lấy hiệu điện thế ban đầu là V_0. Vì ban đầu $x = b$ nên $C_0 = \varepsilon_0\frac{Kba}{d}$ và $Q = C_0V_0$. Bây giờ cũng theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}V^2C\right) = -VC\frac{dV}{dx} - \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx}.$$

Vì

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{C}\right) = -\frac{Q}{C^2}\frac{dC}{dx},$$

phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} F &= Q\frac{dV}{dx} - \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} \\ &= \frac{\varepsilon_0K^2(K-1)}{[(K-1)x+b]^2}\frac{ab^2}{2d}V_0^2. \end{aligned}$$

Một lần nữa, vì $F > 0$ nên lực này có hướng kéo thanh điện môi trở về giữa các bản cực.

1052

Một chất điện môi được đặt một phần vào một tụ điện phẳng. Biết rằng tụ điện này được tích điện nhưng đã ngắt khỏi nguồn. Chất điện môi sẽ chịu tác dụng của một lực:

(a) bằng 0 (b) đẩy ra (c) kéo vào.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1053

Một tụ điện trụ có chiều dài L gồm một dây dẫn bên trong bán kính a, một vỏ dẫn điện mỏng bên ngoài bán kính b. Không gian bên trong tụ chứa đầy một vật liệu không dẫn điện có hằng số điện môi ε.

(a) Tìm điện trường như là một hàm số của vị trí theo bán kính khi tụ điện được tích điện với điện tích Q. Bỏ qua các hiệu ứng mép.

(b) Tìm điện dung.

(c) Giả thiết rằng chất điện môi được kéo một phần ra ngoài tụ điện trong khi tụ điện được nối với một ắc quy có điện thế V. Tìm lực cần thiết để kéo chất điện môi đến vị trí này. Bỏ qua các trường diềm. Lực đó phải được đặt theo hướng nào?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng điện tích trên một đơn vị chiều dài của dây dẫn bên trong là $-\lambda$ và sử dụng hệ toạ độ trụ (r, φ, z), ta tìm được cường độ điện trường bên trong tụ điện bằng định lý Gauss như sau

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\mathbf{e}_r = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon L r}\mathbf{e}_r \,.$$

(b) Hiệu điện thế giữa các tụ điện bên trong và bên ngoài là

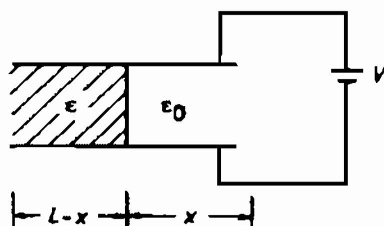
$$V = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}\,.$$

(c) Khi tụ điện được nối với một ắc quy, hiệu điện thế giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài được giữ ở giá trị không đổi. Bây giờ giả sử chất điện môi được kéo ra khỏi tụ điện một đoạn có chiều dài x, sao cho chiều dài $L - x$ của nó còn lại bên trong tụ điện như được chỉ ra trên hình 1.24. Điện dung toàn phần của tụ điện trở thành

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(\frac{b}{a})} + \frac{2\pi\varepsilon(L-x)}{\ln(\frac{b}{a})} \\ &= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 L} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)x\right]. \end{aligned}$$



Hình 1.24

Việc kéo chất điện môi ra làm thay đổi năng lượng được lưu trữ trong tụ điện và như vậy cần tác dụng một lực lên vật liệu. Xét phương trình năng lượng

$$Fdx = VdQ - \frac{1}{2}V^2dC\,.$$

Vì V được giữ không đổi, $dQ = VdC$ và ta có

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln(\frac{b}{a})}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

Đây là lực tác dụng lên vật liệu. Vì $\varepsilon > \varepsilon_0, F < 0$. Do đó F sẽ có chiều hướng làm giảm x, nghĩa là F là lực hút. Do đó để đưa chất điện môi đến vị trí này phải sử dụng một lực có độ lớn F và có hướng đi ra khỏi tụ điện.

1054

Như thấy trên hình 2.15, bạn được cho một tụ điện có hai bản phẳng nhưng không thật song song.

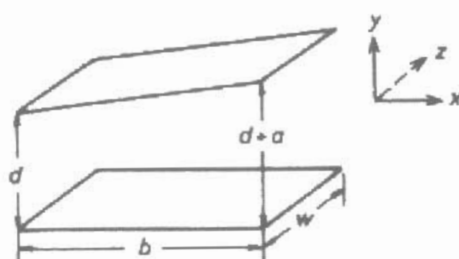
(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, khi một hiệu điện thế V được đặt trên hai bản tụ, hãy tìm điện thế ở một vị trí bất kì giữa hai bản cực.

(b) Khi tụ hình nêm này chứa đầy một môi trường có hằng số điện môi ε, hãy tính điện dung của hệ với những hằng số đã cho.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, bài tập này trở thành bài tập hai chiều. Lấy trục z vuông góc với mặt phẳng hình vẽ và hướng vào trong trang sách như



Hình 1.25

được chỉ ra trên hình 1.25. Điện trường sẽ song song với mặt phẳng xy và không phụ thuộc vào z.

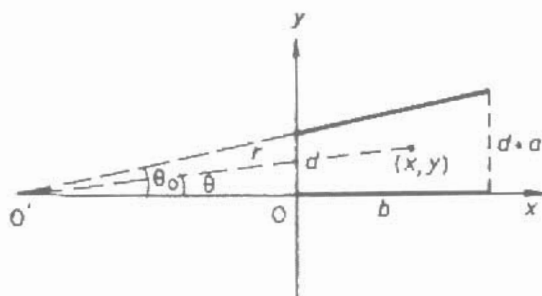
(b) Giả thiết rằng giao tuyến của các mặt phẳng của hai bản cực cắt trục x tại điểm O′, khi sử dụng hệ toạ độ như trên hình 1.26. Khi đó

$$\overline{OO'} = \frac{bd}{a}, \quad \theta_0 = \arctan\frac{a}{b},$$

trong đó θ_0 là góc giữa hai bản cực. Bây giờ ta sử dụng hệ toạ độ trụ (r, θ, z') với trục z' đi qua điểm O′ và song song với trục z. Bất kì mặt phẳng nào qua trục z' đều là một mặt đẳng thế do tính đối xứng của bài tập. Do đó, điện thế bên trong tụ điện sẽ chỉ phụ thuộc vào θ

$$\varphi(r, \theta, z') = \varphi(\theta).$$

Điện thế φ thoả mãn phương trình Laplace



Hình 1.26

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = 0,$$

có nghiệm tổng quát là

$$\varphi(\theta) = A + B\theta\,.$$

Vì cả hai bản cực trên và dưới đều là các bề mặt đẳng thế nên các điều kiện biên sẽ là

$$\varphi(0) = 0\,, \quad \varphi(\theta_0) = V\,,$$

Từ đó suy ra $A = 0, B = V/\theta_0$. Đối với một điểm (x, y) bên trong tụ điện có thể tính được

$$\theta = \arctan\left[y/\left(x + \frac{bd}{a}\right)\right].$$

Do đó điện thế có thể viết như sau

$$\varphi(x, y) = \frac{V\theta}{\theta_0} = \frac{V\arctan\left[y/(x + \frac{bd}{a})\right]}{\arctan(\frac{a}{b})}\,.$$

(b) Giả sử Q là điện tích toàn phần ở bản cực dưới. Điện trường bên trong tụ điện là

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = -\frac{V}{\theta_0 r}\mathbf{e}_\theta\,.$$

Đối với một điểm $(x, 0)$ ở bản cực dưới, $\theta = 0, r = \frac{bd}{a} + x$ và $\mathbf{E}$ vuông góc với bản cực. Mật độ điện tích mặt σ trên bản cực dưới nhận được từ điều kiện biên đối với vectơ điện cảm

$$\sigma = \varepsilon E = -\frac{V\varepsilon}{\theta_0(\frac{bd}{a} + x)}\,.$$

Lấy tích phân theo bề mặt bản cực dưới, ta có

$$Q = \int \sigma dS = -\int_0^w dz \int_0^b \frac{V\varepsilon}{\theta_0(\frac{bd}{a} + x)}dx = -\frac{\varepsilon V w}{\arctan\frac{a}{b}}\ln\left(\frac{d + a}{d}\right).$$

Do đó, điện dung của tụ điện sẽ là

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{\varepsilon w}{\arctan\frac{a}{b}}\ln\left(\frac{d + a}{d}\right).$$

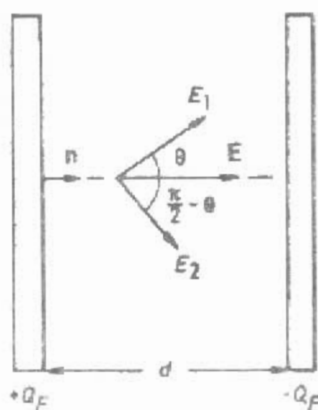
1055

Hai bản dẫn điện lớn, song song, mỗi bản có diện tích A, được đặt cách nhau một khoảng cách d. Một chất điện môi không đẳng hướng, nhưng đồng nhất lấp đầy không gian giữa hai bản đó. Tenxơ hằng số điện môi ε_{ij} liên hệ điện cảm **D** và điện trường **E** theo hệ thức $D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j$. Các trục chính của tenxơ hằng số điện môi này là (xem H. 1.27): trục 1 (với giá trị riêng ε_1) nằm trong mặt phẳng của hình vẽ tạo với đường nằm ngang một góc θ, trục 2 (với giá trị riêng ε_2) nằm trong mặt phẳng hình vẽ tạo với đường nằm ngang một góc $\frac{\pi}{2} - \theta$. Trục 3 (với giá trị riêng ε_3) vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Giả thiết rằng các bản cực dẫn điện đủ lớn sao cho tất cả các hiệu ứng rìa là bỏ qua được.

(a) Các điện tích tự do $+Q_F$ và $-Q_F$ được phân bố đều trên hai bản cực dẫn điện trái và phải. Tìm các thành phần thẳng đứng và nằm ngang của **E** và **D** trong chất điện môi.

(b) Hãy tính điện dung của hệ này qua A, d, ε_i và θ.

(Columbia)



Hình 1.27

Lời giải:

(a) Lấy **n** là vectơ đơn vị vuông góc với bản cực trái. Vì **E** = 0 bên trong các bản cực nên thành phần tiếp tuyến của điện trường bên trong chất điện môi cũng bằng 0 do tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của **E**. Do đó, cường độ điện trường bên trong chất điện môi sẽ được biểu diễn như sau

$$\mathbf{E} = E\mathbf{n}\,.$$

Phân tích **E** theo các trục chính, ta có

$$E_1 = E\cos\theta\,,\quad E_2 = E\sin\theta\,,\quad E_3 = 0\,.$$

Theo các trục toạ độ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ dựa trên các trục chính, tenxơ ε_{ij} là một ma trận chéo

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

và dọc theo các trục này vectơ điện cảm trong tụ điện có các thành phần

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 E\cos\theta\,,\quad D_2 = \varepsilon_2 E\sin\theta\,,\quad D_3 = 0\,. \tag{1}$$

Điều kiện biên của **D** trên bề mặt của bản cực bên trái cho

$$D_n = \sigma_f = Q_F/A\,.$$

Nghĩa là, thành phần vuông góc của vectơ điện cảm là không đổi. Như vậy

$$D_1\cos\theta + D_2\sin\theta = D_n = \frac{Q_F}{A}\,. \tag{2}$$

Kết hợp các phương trình (1) và (2), ta nhận được:

$$E = \frac{Q_F}{A(\varepsilon_1\cos^2\theta + \varepsilon_2\sin^2\theta)}\,.$$

Do đó thành phần nằm ngang và vuông góc của **E** và **D** là

$$E_n = E = \frac{Q_F}{A(\varepsilon_1\cos^2\theta + \varepsilon_2\sin^2\theta)}\,,\quad E_t = 0\,,$$

$$D_n = \frac{Q_F}{A}\,,\quad D_t = D_1\sin\theta - D_2\cos\theta = \frac{Q_F(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{A(\varepsilon_1\cos^2\theta + \varepsilon_2\sin^2\theta)}\,,$$

trong đó chỉ số t biểu thị các thành phần tiếp tuyến với các bản cực.

(b) Hiệu điện thế giữa các bản cực trái và phải là

$$V = \int E_n dx = \frac{Q_F d}{A(\varepsilon_1\cos^2\theta + \varepsilon_2\sin^2\theta)}\,.$$

Do đó điện dung của hệ là

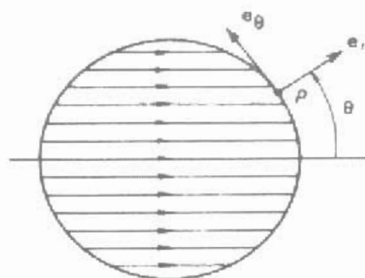
$$C = \frac{Q_F}{V} = \frac{A(\varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_2 \sin^2\theta)}{d} .$$

1056

Người ta chứng minh được rằng điện trường bên trong một quả cầu điện môi được đặt trong một tụ điện phẳng lớn là điện trường đều (độ lớn và hướng của $\mathbf{E}_0$ là không đổi). Nếu quả cầu đó có bán kính R và hằng số điện môi tương đối $K_e = \varepsilon/\varepsilon_0$, hãy tìm E tại điểm p trên mặt ngoài của quả cầu (dùng hệ toạ độ cực R, θ). Xác định mật độ điện tích liên kết mặt tại điểm p.

(Wisconsin)

Lời giải:



Hình 1.28

Điện trường bên trong quả cầu là một điện trường đều $\mathbf{E}_0$ như được chỉ ra trên hình 1.28. Điện trường tại điểm p ở mặt ngoài của quả cầu là $\mathbf{E} = E_r\mathbf{e}_r + E_t\mathbf{e}_\theta$ khi dùng ở toạ độ cực. Tương tự $\mathbf{E}_0$ có thể biểu thị như sau

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cos\theta \mathbf{e}_r - E_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta .$$

Từ những điều kiện biên đối với các vectơ điện cảm và cường độ điện từ tại p, ta được

$$\varepsilon E_0 \cos\theta = \varepsilon_0 E_r , \quad -E_0 \sin\theta = E_t .$$

Do đó

$$\mathbf{E} = K_e E_0 \cos\theta \mathbf{e}_r - E_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta .$$

Mật độ điện tích liên kết mặt tại điểm p là $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r$, với $\mathbf{P}$ là vectơ phân cực. Vì $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}_0$, ta tìm được

$$\sigma_p = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0 \cos\theta = \varepsilon_0 (K_e - 1) E_0 \cos\theta .$$

1057

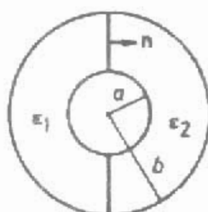
Một nửa của vùng giữa các bản cực của một tụ điện cầu có bán kính trong và bán kính ngoài là a và b chứa đầy một chất điện môi đẳng hướng tuyến tính có hằng số điện môi ε_1 và nửa kia chứa đầy một chất điện môi đẳng hướng tuyến tính có hằng số điện môi ε_2 như được chỉ ra trên hình 1.29. Nếu bản cực bên trong có điện tích toàn phần Q và bản cực bên ngoài có điện tích toàn phần $-Q$, hãy tìm:

(a) các vectơ điện cảm $\mathbf{D}_1$ và $\mathbf{D}_2$ trong vùng của ε_1 và ε_2;

(b) các điện trường trong vùng của ε_1 và ε_2;

(c) điện dung toàn phần của hệ.

(SUNY, Buffalo)



Hình 1.29

Lời giải:

Ta lấy hướng pháp tuyến $\mathbf{n}$ tại mặt phân cách giữa các điện môi ε_1 và ε_2 là hướng chỉ từ 1 đến 2. Các điều kiện biên tại bề mặt này là

$$E_{1t} = E_{2t} , \quad D_{1n} = D_{2n} .$$

Nếu chúng ta giả thiết rằng điện trường $\mathbf{E}$ vẫn có đối xứng cầu, tức là

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = A\mathbf{r}/r^3 .$$

Khi đó các điều kiện biên trên vẫn sẽ được thoả mãn. Chọn mặt Gauss là một mặt cầu đồng tâm có bán kính r ($a < r < b$). Từ định lý Gauss

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q ,$$

ta nhận được

$$2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)A = Q ,$$

hay

$$A = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} .$$

Tiếp theo ta tìm cường độ điện trường và điện cảm trong các vùng 1 và 2

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \frac{Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} ,$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} , \quad \mathbf{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} .$$

Xét tụ điện bán cầu 1, ta có

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{A}{r^2} dr = \frac{A(b-a)}{ab}$$

và

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon_1 ab}{b-a} .$$

Đối với C_2 ta cũng nhận được biểu thức tương tự. Coi tụ điện như một bộ gồm hai tụ điện bán cầu mắc song song, ta nhận được điện dung toàn phần là

$$C = \frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ab}{b-a} .$$

1058

Hai mặt cầu kim loại đồng tâm có các bán kính a và b ($a < b$) được ngăn cách nhau bằng một môi trường có hằng số điện môi ε và độ dẫn điện σ. Tại thời điểm $t = 0$ một điện tích q bất ngờ được đặt vào mặt cầu bên trong.

(a) Hãy xác định dòng điện toàn phần chạy qua môi trường đó như một hàm của thời gian.

(b) Hãy tính nhiệt lượng Joule toả ra do dòng điện này và chứng minh rằng nó bằng với độ giảm năng lượng tĩnh điện xảy ra khi điện tích được sắp xếp lại.

(*Chicago*)

Lời giải:

(a) Tại $t = 0$, khi mặt cầu bên trong chứa điện tích q, cường độ điện trường bên trong môi trường là

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

và có hướng theo bán kính ra ngoài. Tại thời điểm t khi mặt cầu bên trong đang có điện tích $q(t)$, cường độ điện trường là

$$E(t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon r^2}\,.$$

Theo định luật Ohm mật độ dòng $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Xét một mặt cầu đồng tâm có bán kính r bao quanh mặt cầu bên trong, theo định luật bảo toàn điện tích ta có

$$-\frac{d}{dt}q(t) = 4\pi r^2 j(t) = 4\pi r^2 \sigma E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon}q(t)\,.$$

Phương trình vi phân này có nghiệm là

$$q(t) = qe^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,.$$

Do đó

$$E(t,r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,,$$
$$j(t,r) = \frac{\sigma q}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,.$$

Dòng điện toàn phần chảy qua môi trường trên tại thời điểm t là

$$I(t) = 4\pi r^2 j(t,r) = \frac{\sigma q}{\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,.$$

(b) Nhiệt lượng Joule toả ra trên một đơn vị thể tích trên một đơn vị thời gian trong môi trường đó là

$$w(t,r) = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{\sigma q^2}{(4\pi\varepsilon)^2 r^4}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t}\,,$$

và toàn bộ nhiệt lượng Joule được toả ra là

$$W = \int_0^{+\infty} dt \int_a^b dr \cdot 4\pi r^2 w(t,r) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Năng lượng tĩnh điện trong môi trường đó trước khi phóng điện là

$$W_0 = \int_a^b dr \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon E_0^2}{2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Do đó $W = W_0$.

1059

Một tụ điện bao gồm hai mặt cầu kim loại đồng tâm, mặt cầu bên trong có bán kính a và mặt cầu bên ngoài có bán kính d. Vùng $a < r < b$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi tương đối K_1, vùng $b < r < c$ là chân không ($K = 1$) và vùng ngoài cùng $c < r < d$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi K_2. Mặt cầu bên trong được tích điện đến điện thế V so với mặt cầu ngoài khi mặt cầu ngoài được nối đất ($V = 0$). Hãy tìm:

(a) các điện tích tự do trên mặt cầu trong và mặt cầu ngoài.

(b) điện trường như là hàm của khoảng cách r tính từ tâm đối với các vùng: $a < r < b$, $b < r < c$, $c < r < d$.

(c) các điện tích phân cực tại $r = a, r = b, r = c$ và $r = d$.

(d) điện dung của tụ điện này.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng mặt cầu bên trong chứa điện tích tự do toàn phần là Q. Lúc đó mặt cầu bên ngoài sẽ chứa điện tích tự do toàn phần là $-Q$ vì nó được nối đất.

(b) Dùng định luật Gauss và tính đối xứng cầu chúng ta tìm được các kết quả sau

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi K_1 \varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r, \quad (a < r < b),$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r, \quad (b < r < c),$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 K_2 r^2}\mathbf{e}_r, \quad (c < r < d).$$

(c) Dùng các phương trình

$$\sigma_P = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2), \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 (K - 1)\mathbf{E},$$

Chúng ta tìm được các mật độ điện tích phân cực

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{1 - K_1}{K_1} \quad \text{tại} \quad r = a.$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi b^2} \frac{K_1 - 1}{K_1} \quad \text{tại} \quad r = b$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1 - K_2}{K_2} \quad \text{tại} \quad r = c$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi d^2} \frac{K_2 - 1}{K_2} \quad \text{tại} \quad r = d.$$

(d) Điện thế là

$$V = -\int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{K_1} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)\frac{1}{K_2}\right].$$

Do đó, điện tích ở mặt cầu bên trong là

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 K_1 K_2 abcdV}{K_1 ab(d - c) + K_1 K_2 ad(c - b) + K_2 cd(b - a)},$$

và điện dung là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 K_1 K_2 abcd}{K_1 ab(d - c) + K_1 K_2 ad(c - b) + K_2 cd(b - a)}.$$

1060

Thể tích giữa hai mặt cầu dẫn điện đồng tâm bán kính a và b ($a < b$) được lấp đầy bằng một chất điện môi không đồng nhất có hằng số điện môi

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{1 + Kr},$$

trong đó ε_0 và K là những hằng số và r là toạ độ bán kính. Như vậy $\mathbf{D}(r) = \varepsilon\mathbf{E}(r)$. Một điện tích Q được đặt vào mặt bên trong, trong khi mặt cầu ngoài được nối đất. Hãy tìm:

(a) điện cảm trong vùng $a < r < b$.

(b) điện dung của linh kiện.

(c) mật độ điện tích phân cực trong $a < r < b$.

(d) mật độ điện tích phân cực mặt tại $r = a$ và $r = b$.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Theo định luật Gauss và tính đối xứng cầu, ta có

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{e}_r\,, \quad (a < r < b)\,.$$

(b) Cường độ điện trường là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1 + Kr)\,\mathbf{e}_r\,, \quad (a < r < b)\,.$$

Do đó hiệu điện thế giữa mặt cầu bên trong và mặt cầu bên ngoài là

$$V = \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + K\ln\frac{b}{a}\right).$$

Khi đó điện dung của linh kiện là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a) + abK\ln(b/a)}\,.$$

(c) Độ phân cực là

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = -\frac{QK}{4\pi r}\mathbf{e}_r\,.$$

Do đó mật độ điện tích phân cực khối tại $a < r < b$ được cho bởi

$$\rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{QKr}{4\pi}\right) = \frac{QK}{4\pi r^2}\,.$$

(d) Mật độ điện tích phân cực mặt tại $r = a, b$ là

$$\sigma_P = \frac{QK}{4\pi a} \quad \text{tại} \quad r = a\,; \quad \sigma_P = -\frac{QK}{4\pi b} \quad \text{tại} \quad r = b\,.$$

1061

Đối với trường hợp dòng điện dừng tuân theo định luật Ohm, hãy tìm điện trở giữa hai vật dẫn hình cầu đồng tâm bán kính $a < b$ chứa đầy một vật liệu có độ dẫn σ. Hãy nói rõ từng giả thiết.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả thiết rằng các vật dẫn và vật liệu trên là đồng nhất để cho toàn bộ điện tích Q chứa trên mặt cầu bên trong được phân bố đều trên bề mặt nó. Theo định luật Gauss và tính đối xứng cầu cho biểu thức sau

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{e}_r\,,$$

trong đó ε là hằng số điện môi của vật liệu. Từ định luật Ohm $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, ta có

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{e}_r\,.$$

Khi đó dòng điện toàn phần là

$$I = \oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon}Q\,.$$

Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là

$$V = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_b^a \frac{I}{4\pi\sigma r^2}dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),$$

suy ra điện trở

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

4. NHỮNG PHƯƠNG PHÁP TIÊU BIỂU ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TẬP TĨNH ĐIỆN - TÁCH BIẾN, PHƯƠNG PHÁP ẢNH, HÀM GREEN VÀ KHAI TRIỂN ĐA CỰC (1062–1095)

1062

Một quả cầu điện môi có bán kính a và hằng số điện môi ε_1 được đặt trong một chất lỏng điện môi có kích thước vô hạn và hằng số điện môi ε_2. Một điện

trường đều **E** có ngay từ đầu trong chất lỏng đó. Hãy tìm điện trường tổng hợp ở bên trong và bên ngoài quả cầu.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

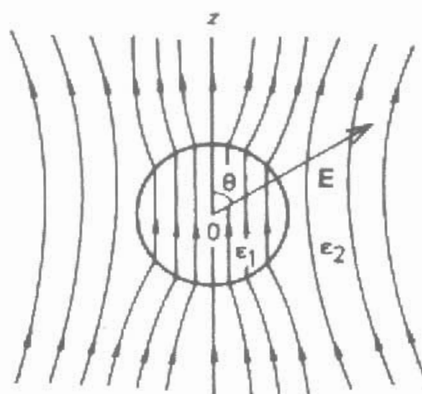
Lấy gốc toạ độ tại tâm của quả cầu và lấy hướng của điện trường ban đầu **E** làm trục cực z như trên hình 1.30. Giả sử điện thế tĩnh điện tại một điểm bên trong quả cầu là Φ_1 và tại một điểm ở ngoài quả cầu là Φ_2. Do đối xứng, ta có thể viết Φ_1 và Φ_2 như sau

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\,,$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\,,$$

trong đó A_n, B_n, C_n, D_n những hằng số, và P_n là đa thức Legrendre. Các điều kiện biên như sau:

(1) Φ_1 là hữu hạn tại $r = 0$.



Hình 1.30

(2) $\Phi_2|_{r\to\infty} = -Er\cos\theta = -ErP_1(\cos\theta)$.

(3) $\Phi_1 = \Phi_2|_{r=a}, \varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}|_{r=a}$.

Từ các điều kiện (1) và (2) ta nhận được

$$B_n = 0\,,\quad C_1 = -E\,,\quad C_n = 0\ (n \neq 1)\,.$$

Sau đó từ điều kiện (3) ta nhận được

$$-EaP_1(\cos\theta)+\sum_n\frac{D_n}{a^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_n A_na^nP_n(\cos\theta),$$

$$-\varepsilon_2\left[EP_1(\cos\theta)+\sum_n(n+1)\frac{D^n}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta)\right]=\varepsilon_1\sum_n A_na^{n-1}P_n(\cos\theta).$$

Các phương trình này sẽ thoả mãn đối với mọi góc θ khả dĩ. Do đó, các hệ số của $P_n(\cos\theta)$ ở hai vế của mỗi phương trình trên phải bằng nhau đối với mọi giá trị n. Điều này cho

$$A_1=-\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E,\quad D_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}Ea^3,\quad A_n=D_n=0,\quad (n\neq 1).$$

Do đó, điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu có thể biểu diễn như sau

$$\Phi_1=-\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}Er\cos\theta,$$

$$\Phi_2=-\left[1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]Er\cos\theta,$$

và điện trường bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{E}_1=-\nabla\Phi_1=\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\mathbf{E},\quad (r<a),$$

$$\mathbf{E}_2=-\nabla\Phi_2=\mathbf{E}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3\left[\frac{3(\mathbf{E}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\mathbf{E}}{r^3}\right],\quad (r>a).$$

1063

Hãy xác định điện trường bên trong và bên ngoài một quả cầu bán kính R và hằng số điện môi ε được đặt trong một điện trường đều có độ lớn E_0 và hướng dọc theo trục z.

(Columbia)

Lời giải:

Sử dụng lời giải của bài tập **1062** ta có

$$\mathbf{E}_1=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0,\quad (r<R),$$

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_0+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3\left[\frac{3(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\mathbf{E}_0}{r^3}\right],\quad (r>R).$$

1064

Một quả cầu có hằng số điện môi ε được đặt trong một điện trường đều $\mathbf{E}_0$. Hãy chứng minh rằng mật độ điện tích mặt cảm ứng là

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \,.$$

trong đó θ được đo từ hướng của $\mathbf{E}_0$. Nếu quả cầu được quay với tốc độ góc ω quanh hướng của $\mathbf{E}_0$ thì có sinh ra một từ trường không? Nếu không, hãy giải thích vì sao. Nếu có, hãy vẽ phác hoạ đường sức từ.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Theo lời giải của bài tập **1063** điện trường bên trong quả cầu là

$$\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \,,$$

từ dây có thể tính được độ phân cực điện môi

$$\mathbf{p} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \,.$$

Mật độ điện tích có trên bề mặt của quả cầu điện môi là

$$\sigma(\theta) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos\theta \,.$$

với $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị tốc độ vuông góc với mặt cầu. Khi đó mômen toàn phần lưỡng cực điện sẽ là

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \mathbf{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 \mathbf{E}_0 \,.$$

Lưu ý rằng $\mathbf{P}$ có hướng giống như $\mathbf{E}_0$. Khi quả cầu quay quanh hướng của $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{P}$ sẽ không thay đổi. Điều này có nghĩa là sự quay không sinh ra dòng phân cực và do đó không sinh ra từ trường.

1065

Một quả cầu dẫn điện lý tưởng được đặt trong một điện trường đều hướng theo trục z.

(a) Mật độ điện tích mặt trên mặt cầu là bao nhiêu?

(b) Mômen lưỡng cực cảm ứng của quả cầu là bao nhiêu?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Điều kiện biên trên bề mặt vật dẫn là

$$\Phi = \text{hằng số} = \Phi_s \,, \text{ tức là,}$$
$$\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sigma \,,$$

trong đó Φ_s là thế năng của quả cầu dẫn điện và σ là mật độ điện tích mặt của nó. Do đối xứng, thế năng tại một điểm (r, θ, φ) trong hệ toạ độ cầu với gốc toạ độ ở tâm quả cầu là

$$\Phi = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \,. \qquad (1)$$

Giả sử E_0 là cường độ điện trường đều ban đầu. Khi $r \to \infty$

$$\Phi = -E_0 r \cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta) \,.$$

Bằng cách làm bằng các hệ số của $P_n(\cos\theta)$ ở hai vế của phương trình (1) ta có

$$C_0 = 0 \,, \quad C_1 = -E_0, \quad D_1 = E_0 a^3 \,, \quad C_n = D_n = 0 \quad \text{với } n > 1 \,.$$

Do đó

$$\Phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos\theta \,, \qquad (2)$$

trong đó a là bán kính của quả cầu. Điều kiện biên thứ hai và phương trình (2) cho

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \,.$$

(b) Giả thiết rằng mômen lưỡng cực điện $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_z$ được đặt tại gốc toạ độ thay thế cho quả cầu. Điện thế tại r do lưỡng cực sinh ra là

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{P} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,.$$

So sánh phương trình này với số hạng thứ hai của phương trình (2) thấy rằng số hạng này của phương trình (2) tương ứng với sự đóng góp của một lưỡng cực có mômen

$$\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0 \,,$$

mà ta có thể coi như một mômen lưỡng cực cảm ứng của quả cầu.

1066

Mật độ điện tích mặt $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ được gắn lên bề mặt của một vỏ cầu có bán kính R (σ_0 là một hằng số và θ là góc cực). Cả bên trong và bên ngoài của vỏ cầu là chân không, không có điện tích. Hãy tính điện thế và điện trường ở cả bên trong và bên ngoài của vỏ cầu đó.

(*Columbia*)

Lời giải:

Gọi Φ_+, Φ_- là điện thế tương ứng ở bên ngoài và bên trong vỏ cầu. Cả Φ_+ và Φ_- đều thoả mãn phương trình Laplace và do đối xứng trụ chúng có các biểu thức sau

$$\Phi_+ = \sum_{n=0} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta)\,, \quad (r > R)\,;$$

$$\Phi_- = \sum_{n=0} a_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \quad (r < R)\,.$$

Các điều kiện biên tại $r = R$ đối với điện thế và vectơ điện cảm là

$$\Phi_- = \Phi_+\,,$$

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 P_1(\cos\theta) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_+}{\partial r} \right).$$

Thay vào các biểu thức trên của Φ_+ và Φ_-, rồi làm bằng các hệ số của $P_n(\cos\theta)$ ở hai vế của phương trình, ta nhận được

$$a_n = b_n = 0 \quad \text{đối với} \quad n \neq 1\,,$$

$$a_1 = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\,,\ b_1 = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} R^3 \quad \text{đối với} \quad n = 1\,.$$

Do đó

$$\Phi_+ = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos\theta\,, \quad r > R\,,$$

$$\Phi_- = \frac{\sigma_0 r}{3\varepsilon_0} \cos\theta\,, \quad r < R\,.$$

Từ hệ thức $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, ta nhận được

$$\mathbf{E}_+ = \frac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta \mathbf{e}_\theta\,, \quad r > R\,,$$
$$\mathbf{E}_- = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_z\,, \quad r < R\,.$$

1067

Xét một quả cầu bán kính R tâm đặt ở gốc toạ độ O. Giả thiết rằng một điện tích điểm q được đặt tại O và rằng đây là điện tích duy nhất ở bên trong hoặc bên ngoài quả cầu. Hơn nữa, điện thế trên mặt của quả cầu là $\Phi = V_0 \cos\theta$. Hỏi điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu là bao nhiêu?

(*Columbia*)

Lời giải:

Điện thế được cho bởi phương trình Poisson hoặc phương trình Laplace

$$\nabla^2\Phi_- = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(r)\,, \quad r < R\,;$$
$$\nabla^2\Phi_+ = 0\,, \qquad r > R\,.$$

Các nghiệm tổng quát hữu hạn trong các vùng tương ứng, có tính đến đối xứng là

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \quad r < R\,,$$
$$\Phi_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, \quad r > R\,.$$

Từ điều kiện $\Phi_- = \Phi_+ = V_0\cos\theta$ tại $r = R$ ta nhận được $A_0 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $A_1 = \frac{V_0}{R}$, $B_1 = V_0 R^2$, $B_0 = 0$, $A_n = B_n = 0$ đối với $n \neq 0, 1$, và do đó

$$\Phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0\cos\theta}{R} r\,, \quad r < R\,;$$
$$\Phi_+ = \frac{V_0 R^2}{r^2}\cos\theta\,, \qquad r > R\,.$$

1068

Nếu điện thế của một vỏ cầu có chiều dày bằng 0 chỉ phụ thuộc vào góc cực θ và được cho bởi $V(\theta)$, bên trong và bên ngoài quả cầu là không gian rỗng.

(a) Hãy chỉ ra cách để nhận được biểu thức điện thế $V(r,\theta)$ ở bên trong và bên ngoài quả cầu? để nhận được biểu thức đối với các nguồn điện trên quả cầu?

(b) Giải ra với $V(\theta) = V_0 \cos^2\theta$.

Một vài số hạng đầu tiên của đa thức Legendre là

$$P_0(\cos\theta) = 1\,, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta\,, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\,.$$

Ta cũng có

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0 \quad \text{nếu} \quad n \neq m$$

và

$$\int_0^\pi P_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}\,.$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Vì cả bên trong và bên ngoài vỏ cầu đều rỗng nên điện thế trong toàn bộ không gian thoả mãn phương trình Laplace. Như vậy điện thế bên trong quả cầu có dạng

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)\,,$$

trong khi điện thế bên ngoài quả cầu là

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,.$$

Giả sử bán kính của vỏ cầu là R, ta có

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)\,.$$

Nhân cả hai vế với $P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ và tích phân từ 0 đến π ta nhận được

$$a_n R^n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\,.$$

Do đó

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right]P_n(\cos\theta)r^n\,,$$

và một cách tương tự

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)R^{n+1}}{2}\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right]\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\,.$$

Sự phân bố điện tích trên vỏ cầu được cho bởi điều kiện biên đối với vectơ điện cảm

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \varepsilon_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} - \varepsilon_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R}\\ &= \varepsilon_0\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n+1)^2}{2R}\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right]P_n(\cos\theta)\,.\end{aligned}$$

(b) Từ

$$V(\theta) = V_0\cos^2\theta = \frac{2V_0}{3}P_2(\cos\theta) + \frac{V_0}{3}P_0(\cos\theta)\,,$$

ta nhận được

$$\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}V_0\,,\quad \text{đối với}\quad n=0\,;$$
$$\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{4}{15}V_0\,,\quad \text{đối với}\quad n=2\,;$$
$$\int_0^\pi V(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0\,,\quad \text{đối với}\quad n\neq 0,2\,.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{V_0}{3} + \frac{2V_0}{3}P_2(\cos\theta)\frac{r^2}{R^2}\,,\quad (r<R)\\ \Phi_2 &= \frac{V_0R}{3r} + \frac{2V_0}{3}P_2(\cos\theta)\frac{R^3}{r^3}\,,\quad (r>R)\\ \sigma(\theta) &= \frac{\varepsilon_0V_0}{3R}\left[1+5P_2(\cos\theta)\right].\end{aligned}$$

1069

Một quả cầu dẫn điện bán kính a mang một điện tích q được đặt trong điện trường đều $\mathbf{E}_0$. Tìm điện thế tại tất cả các điểm bên trong và bên ngoài quả cầu. Mômen lưỡng cực của điện tích cảm ứng trên quả cầu là bao nhiêu? Ba điện trường trong bài tập này làm xuất hiện sáu số hạng năng lượng. Hãy nhận biết sáu số hạng này, hãy nói rõ số hạng nào là hữu hạn hoặc bằng 0, số hạng nào là vô hạn hoặc không có giới hạn.

(*Columbia*)

Lời giải:

Trường ở trong bài tập này là chồng chập của ba trường: điện trường đều $\mathbf{E}_0$, trường lưỡng cực do các điện tích cảm ứng của quả cầu dẫn điện gây ra và một trường gây bởi điện tích q phân bố đồng đều trên khắp quả cầu dẫn điện.

Gọi Φ_1 và Φ_2 lần lượt là điện thế toàn phần ở bên trong và bên ngoài quả cầu. Khi đó ta có

$$\nabla^2\Phi_1 = \nabla^2\Phi_2 = 0\,, \quad \Phi_1 = \Phi_0\,,$$

trong đó Φ_0 là một hằng số. Các điều kiện biên là

$$\Phi_1 = \Phi_2\,, \quad \text{với} \quad r = a\,,$$
$$\Phi_2 = -E_0 r P_1(\cos\theta) \quad \text{với} \quad r \to \infty\,.$$

Do tính đối xứng trụ, nghiệm của phương trình Laplace là

$$\Phi_2 = \sum_n \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)\,.$$

Thay các điều kiện biên ở trên vào, ta tìm được

$$a_1 = -E_0\,, \quad b_0 = a\Phi_0\,, \quad b_1 = E_0 a^3\,,$$

Trong khi tất cả các hệ số khác bằng 0. Vì $\sigma = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=a}$, ta có

$$q = \int_0^\pi \left(3\varepsilon_0 E_0\cos\theta + \frac{\varepsilon_0\Phi_0}{a}\right) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = 4\pi a\varepsilon_0\Phi_0\,,$$

hay

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

Như vậy điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,, \quad (r < a)\,,$$

$$\Phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta\,, \quad (r > a)\,.$$

Trường ngoài quả cầu có thể coi như sự chồng chập của ba trường tạo nên điện thế Φ_2 có ba số hạng như thấy ở vế phải của biểu thức cuối cùng: một điện trường đều $\mathbf{E}_0$, một trường do điện tích q phân bố đều trên quả cầu và một trường lưỡng cực do các điện tích cảm ứng trên bề mặt của quả cầu gây ra. Số hạng cuối cùng có thể do một mômen lưỡng cực $\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$ đặt tại tâm quả cầu gây ra.

Năng lượng của ba điện trường này có thể chia thành hai loại: năng lượng tĩnh điện sinh ra do từng trường riêng biệt và năng lượng tương tác giữa các trường. Mật độ năng lượng của trường ngoài $\mathbf{E}_0$ là $\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$. Năng lượng toàn phần của nó $\int \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 dV$ là vô hạn, nghĩa là $W_1 \to \infty$, bởi vì $\mathbf{E}_0$ mở rộng trong toàn bộ không gian.

Năng lượng tĩnh điện toàn phần của một quả cầu dẫn điện được cô lập có điện tích q là

$$W_2 = \int_a^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a},$$

ở đó tổng năng lượng này là hữu hạn.

Cường độ điện trường bên ngoài quả cầu do mômen lưỡng cực $\mathbf{P}$ gây ra là

$$\mathbf{E}_3 = -\nabla\left(\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta\right) = \frac{2a^3 E_0\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{a^3 E_0 \sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta .$$

Mật độ năng lượng tương ứng là

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{a^6 E_0^2}{r^6}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{a^6 E_0^2}{r^6}(1 + 3\cos^2\theta) . \end{aligned}$$

Vì lưỡng cực không sinh ra một điện trường bên trong quả cầu nên năng lượng tĩnh điện toàn phần của $\mathbf{P}$ là

$$\begin{aligned} W_3 &= \int w_3 dV = \frac{\varepsilon_0 a^6 E_0^2}{2}\int_a^\infty \frac{1}{r^4}dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 (1 + 3\cos^2\theta) d\cos\theta \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{3}E_0^2 , \end{aligned}$$

năng lượng này cũng hữu hạn. Đối với quả cầu dẫn điện có điện tích toàn phần là q, mật độ điện tích mặt của nó là $\sigma = q/4\pi a^2$. Khi đó năng lượng tương tác

giữa quả cầu và điện trường ngoài $\mathbf{E}_0$ là

$$W_{12} = \int \sigma \cdot (-E_0 a \cos\theta) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = \frac{qaE_0}{2} \int_0^{\pi} \cos\theta d\cos\theta = 0\,.$$

Tương tự, năng lượng tương tác của quả cầu dẫn điện với trường của mômen lưỡng cực $\mathbf{P}$ là

$$W_{23} = \int_0^{\pi} \sigma \cdot \left(\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta\right) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = 0\,.$$

Năng lượng tương tác giữa mômen lưỡng cực $\mathbf{P}$ và điện trường ngoài $\mathbf{E}_0$ là

$$W_{13} = -\frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0 = -2\pi\varepsilon_0 a^3 E_0^2\,.$$

Năng lượng này là hữu hạn. Sự xuất hiện của hệ số $\frac{1}{2}$ trong biểu thức là do thực tế, lưỡng cực $\mathbf{P}$ chỉ là một lưỡng cực tương đương được cảm ứng bởi điện trường ngoài $\mathbf{E}_0$.

1070

Một vỏ cầu dẫn điện bán kính R bị cắt đôi. Hai bán cầu được cách điện với nhau và đặt gần nhau như trên hình 1.31 sao cho khoảng cách giữa hai nửa này có thể bỏ qua được. Nửa trên được giữ ở điện thế $\phi = \phi_0$ và nửa dưới được giữ ở điện thế $\phi = 0$. Hãy tính điện thế ϕ tại tất cả các điểm trong không gian bên ngoài bề mặt của các vật dẫn. Bỏ qua những số hạng giảm nhanh hơn $1/r^4$, r là khoảng cách tính từ tâm vật dẫn (nghĩa là, giữ lại những số hạng cho tới bậc đó bao gồm cả những số hạng phụ thuộc $1/r^4$) mà r là khoảng cách tính từ tâm của vật dẫn. (Gợi ý: Bắt đầu với nghiệm của phương trình Laplace trong hệ toạ độ thích hợp. Điều kiện biên của bề mặt vật dẫn phải được khai triển theo chuỗi các đa thức Legendre

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

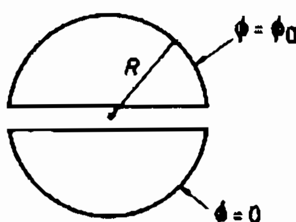
(Columbia)

Lời giải:

Dùng hệ toạ độ cầu (r, θ, ϕ) với gốc toạ độ tại tâm của quả cầu. Trục z được lấy vuông góc với đường cắt của hai bán cầu (xem hình 1.31). Thấy ngay rằng điện thế ϕ chỉ là một hàm của r và θ và thoả mãn phương trình Laplace hai chiều sau đây

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0, \quad (r\geq R).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là



Hình 1.31

$$\phi=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), \quad (r\geq R).$$

Chỉ giữ lại các thành phần đến $l=3$ như yêu cầu của đề bài, ta có biểu thức gần đúng

$$\phi\approx\sum_{l=0}^{3}\frac{A_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta).$$

Điều kiện biên tại $r=R$ là

$$\phi|_{r=R}=f(\theta)=\begin{cases}\phi_0, & \text{với} \quad 0\leq\theta<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{với} \quad \frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi.\end{cases}$$

Khai triển $f(\theta)$ như một chuỗi các đa thức Legendre, nhưng chỉ giữ lại các số hạng cho tới $l=3$, ta có

$$f(\theta)\approx\sum_{l=0}^{3}B_lP_l(cos\theta)$$

Dùng tính trực giao của các đa thức Legendre ta tìm được

$$B_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{(2l+1)\phi_0}{2}\int_0^1 P_l(x)dx.$$

Lấy tích phân của một vài số hạng đầu tiên của đa thức Legendre như đã cho, ta nhận được

$$\int_0^1 P_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1\,,$$

$$\int_0^1 P_2(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\,,$$

$$\int_0^1 P_2(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = 0\,,$$

$$\int_0^1 P_3(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)dx = -\frac{1}{8}\,,$$

Thay các giá trị này vào biểu thức trên sẽ cho

$$B_0 = \frac{1}{2}\phi_0\,, \quad B_1 = \frac{3}{4}\phi_0\,, \quad B_2 = 0\,, \quad B_3 = -\frac{7}{16}\phi_0\,.$$

Từ

$$\phi|_{r=R} \approx \sum_{l=0}^{3} \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l = \sum_{l=0}^{3} B_l P_l\,,$$

Ta nhận được

$$A_l = R^{l+1} B_l\,.$$

Do đó

$$\phi \approx \sum_{l=0}^{3} B_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta) = \phi_0 \left\{ \frac{R}{2r} + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta - \frac{7}{32}\left(\frac{R}{r}\right)^4 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta \right\}.$$

1071

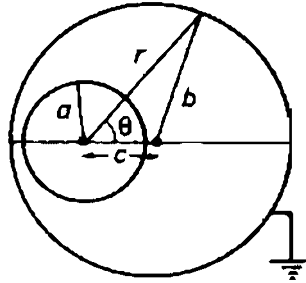
Trên hình 1.32, mặt cầu dẫn điện bên trong, bán kính a chứa điện tích Q, và mặt cầu bên ngoài bán kính b được nối đất. Khoảng cách giữa các tâm của chúng là c và là một đại lượng nhỏ.

(a) Chứng minh rằng trong phép gần đúng tới bậc nhất của c, phương trình mô tả mặt cầu bên ngoài khi dùng tâm của quả cầu bên trong là m gốc toạ độ sẽ là

$$r(\theta) = b + c\cos\theta\,.$$

(b) Nếu điện thế giữa hai mặt cầu chỉ chứa các thành phần góc $l = 0$ và $l = 1$. Hãy xác định điện thế này tới bậc nhất của c.

(*Wisconsin*)



Hình 1.32

Lời giải:

(a) Áp dụng định lý cosin đối với tam giác của hình 1.32 ta có phương trình tới bậc nhất của c

$$b^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta \simeq r^2 - 2cr\cos\theta\,,$$

hay

$$r \approx \frac{1}{2}\left(2c\cos\theta + \sqrt{4c^2\cos^2\theta + 4b^2}\right) \approx b + c\cos\theta\,.$$

(b) Sử dụng phương trình Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ và sự đối xứng trục, ta có thể biểu thị điện thế tại một điểm giữa hai quả cầu dưới dạng

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_r r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)\,.$$

Sau đó chỉ giữ lại các thành phần góc $l = 0, 1$, ta có

$$\Phi = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta\,.$$

Vì mặt của vật dẫn bên trong là một mặt đẳng thế, nên đối với $r = a$, Φ không phụ thuộc vào θ. Do đó

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0\,. \tag{1}$$

Mật độ điện tích trên bề mặt của quả cầu bên trong là

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a}$$

và ta có

$$\int_0^\pi \sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = Q \,.$$

Phương trình này cho

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \,. \qquad (2)$$

Vì quả cầu bên ngoài được nối đất, nên $\Phi = 0$ đối với $r \approx b + c\cos\theta$. Điều này dẫn đến

$$A_0 + \frac{B_0}{b + c\cos\theta} + \left[A_1 (b + c\cos\theta) + \frac{B_1}{(b + c\cos\theta)^2} \right] \cos\theta = 0 \,. \qquad (3)$$

Để giữ lại các số hạng bậc nhất của c, ta dùng các công thức gần đúng

$$(b + c\cos\theta)^{-1} = b^{-1} \left(1 + \frac{c}{b}\cos\theta \right)^{-1} \approx \frac{1}{b} \left(1 - \frac{c}{b}\cos\theta \right) ,$$

$$(b + c\cos\theta)^{-2} = b^{-2} \left(1 + \frac{c}{b}\cos\theta \right)^{-2} \approx \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{2c}{b}\cos\theta \right) .$$

Thay thế những biểu thức này vào phương trình (3), bỏ qua $c\cos^2\theta$ và các số hạng bậc cao hơn, ta có

$$A_0 + \frac{B_0}{b} + \left(-\frac{B_0 c}{b^2} + A_1 b + \frac{B_1}{b^2} \right) \cos\theta \approx 0 \,, \qquad (4)$$

Vì (4) đúng với bất kì giá trị nào của θ, ta cần có

$$A_0 + \frac{B_0}{b} = 0 \,,$$

$$-\frac{B_0 c}{b^2} + A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = 0 \,.$$

Dùng hai phương trình trên cùng với (1) và (2), ta tìm được

$$A_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \,,$$

$$A_1 = \frac{Qc}{4\pi\varepsilon_0 (b^3 - a^3)} \,, \quad B_1 = -\frac{Qca^3}{4\pi\varepsilon_0 (b^3 - a^3)} \,.$$

Do đó điện thế giữa hai mặt cầu là

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{cr}{b^3 - a^3}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\cos\theta\right\}.$$

1072

Lấy một hình trụ rất dài có bán kính r chế tạo bằng vật liệu cách điện. Phun một lớp mây êlectron lên bề mặt hình trụ. Chúng chuyển động tự do quanh bề mặt đó sao cho, ban đầu, chúng trải ra đồng đều với điện tích trên một đơn vị diện tích là σ_0. Sau đó đặt hình trụ vào trong một điện trường đều vuông góc với trục của hình trụ. Xét mật độ điện tích trên bề mặt của hình trụ, $\sigma(\theta)$, như một hàm của điện trường ngoài E_a. Trong khi làm việc này bạn có thể bỏ qua độ phân cực điện của hình trụ cách điện.

(a) Bài toán này khác ở phương diện nào so với một bài toán tĩnh điện chuẩn, trong đó chúng ta có một hình trụ dẫn điện tích điện? Khi nào nghiệm của hai bài toán đó là như nhau?

(b) Hãy tính $\sigma(\theta)$ trong trường hợp của một hình trụ dẫn điện và nêu phạm vi các giá trị của E_a mà nghiệm này áp dụng được cho trường hợp mô tả ở đây.

(*Chicago*)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ trụ (ρ, θ, z) với trục z dọc theo trục hình trụ và hướng của điện trường ngoài cho bởi $\theta = 0$. Gọi điện thế bên trong và bên ngoài lần lượt là φ_{I} và φ_{II}. Vì giả thiết hình trụ rất dài nên φ_{I} và φ_{II} không phụ thuộc vào z. Khi không có điện tích bên trong và bên ngoài hình trụ, dùng phương trình Laplace $\nabla^2\varphi_{\text{I}} = \nabla^2\varphi_{\text{II}} = 0$, với các điều kiện biên là

$$\varphi_{\text{I}} = \varphi_{\text{II}}|_{\rho=r}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_{\text{I}}}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial\varphi_{\text{II}}}{\partial\theta}\right)\bigg|_{\rho=r},$$

$$\varphi_{\text{I}}|_{\rho\to 0} \quad \text{là hữu hạn},$$

$$\varphi_{\text{II}}|_{\rho\to\infty} \to -E_a\rho\cos\theta.$$

Lưu ý rằng hai điều kiện đầu tiên có được từ tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ điện trường. Thêm nữa, vì các electron tự do chuyển động quanh bề mặt hình trụ, $E_\theta = 0$ trên bề mặt tại trạng thái cân bằng. Vì

không chứa z, nên có thể tìm nghiệm dưới dạng

$$\varphi_I = A_1 + B_1 \ln \rho + C_1 \rho \cos\theta + \frac{D_1}{\rho} \cos\theta ,$$

$$\varphi_{II} = A_2 + B_2 \ln \rho + C_2 \rho \cos\theta + \frac{D_2}{\rho} \cos\theta .$$

Khi đó, các điều kiện biên trên đòi hỏi cần thoả mãn

$$B_1 = D_1 = 0 , \quad C_2 = -E_a ,$$

và

$$A_1 + C_1 r \cos\theta = A_2 + B_2 \ln r - E_a r \cos\theta + \frac{D_2}{r} \cos\theta ,$$

$$- C_1 \sin\theta = E_a \sin\theta - \frac{D_2}{r^2} \sin\theta = 0 .$$

Phương trình cuối cùng cho giá trị

$$C_1 = 0 , \quad D_2 = E_a r^2 .$$

Áp dụng định luật Gauss đối với đơn vị chiều dài của hình trụ

$$\oint \mathbf{E}_{II} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} ,$$

tức là

$$-\frac{B_2}{r} \cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0 \cdot 2\pi r ,$$

ta nhận được

$$B_2 = -\frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0} .$$

Bỏ qua bất kì điện thế không đổi nào, ta lấy $A_2 = 0$. Khi đó

$$A_1 = B_2 \ln r = -\frac{\sigma_0 a \ln r}{\varepsilon_0} .$$

Cuối cùng, ta tìm được những biểu thức sau

$$\varphi_I = -\frac{\sigma_0 r \ln r}{\varepsilon_0} , \quad \mathbf{E}_I = 0 ,$$

$$\varphi_{II} = -\frac{\sigma_0 r \ln \rho}{\varepsilon_0} - E_a \rho \cos\theta + \frac{E_a r^2}{\rho} \cos\theta ,$$

$$\mathbf{E}_{II} = \left(\frac{\sigma_0 r}{\varepsilon_0 \rho} + E_a \cos\theta + \frac{E_a r^2}{\rho^2} \cos\theta \right) \mathbf{e}_\rho$$

$$- E_a \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\theta .$$

$$\rho(\theta) = D_{II_\rho}|_{\rho = r} = \sigma_0 + 2\varepsilon_0 E_a \cos\theta .$$

(a) Sự khác nhau giữa trường hợp này và trường hợp của vật dẫn điện hình trụ là: đối với vật dẫn điện hình trụ, $\sigma(\theta)$ có thể dương hoặc âm, còn trong trường hợp này $\sigma(\theta) \leq 0$. Tuy nhiên, khi $|E_a| < |\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}|$ thì hai bài tập có nghiệm giống nhau.

(b) Đối với trường hợp của một hình trụ dẫn điện trường tĩnh điện phải thoả mãn những điều sau:

(1) Bên trong vật dẫn $\mathbf{E}_\text{I} = 0$ và φ_I là một hằng số.

(2) Bên ngoài vật dẫn:

$$\nabla^2 \varphi_\text{II} = 0 \,,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_\text{II}}{\partial \theta}\right)_{\rho=r} = 0 \,, \quad \varphi_\text{II}|_{\rho\to\infty} \to -E_a \rho \cos\theta \,.$$

Nghiệm đối với φ_II giống như trước. Để lời giải của vật dẫn trên trùng với trường hợp của một hình trụ cách điện, điều kiện cần thiết là $|E_a| \leq |\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}|$, điều kiện này đảm bảo rằng mật độ điện tích mặt trên hình trụ là âm ở khắp mọi nơi.

1073

Hai lá nhôm nối đất, phẳng, có chiều dài bán vô hạn, tạo thành một góc 60°. Một điện tích điểm đơn lẻ $+q$ được đặt như trên hình 1.33. Hãy vẽ một hình lớn chỉ ra rõ ràng vị trí, giá trị của tất cả các điện tích ảnh. Hãy giải thích lập luận của bạn bằng hai hoặc ba câu.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

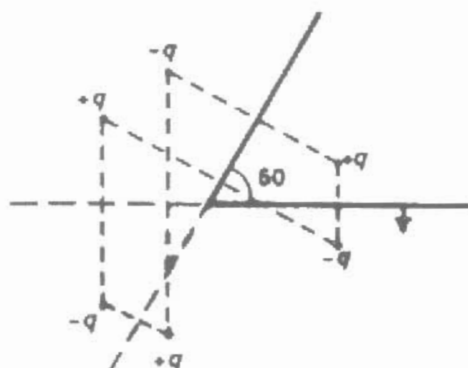
Như thấy trong hình 1.33, vì các mặt phẳng được nối đất nên các điện tích ảnh được phân bố một cách đối xứng ở hai phía của từng mặt phẳng.

1074

Một điện tích đặt trước một mặt phẳng kim loại:

(a) Nó bị mặt phẳng đẩy ra.

(b) Nó không biết có mặt phẳng ở đó.



Hình 1.33

(c) Nó bị hút vào mặt phẳng bởi ảnh gương là điện tích bằng về độ lớn và trái dấu.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1075

Điện thế tại một khoảng cách r tính từ trục của một sợi dây dẫn thẳng vô hạn có bán kính a mang một điện tích trên một đơn vị chiều dài σ là

$$\frac{\sigma}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + \text{const}\,.$$

Sợi dây này được đặt cách một mặt phẳng kim loại vô hạn một khoảng $b \gg a$, điện thế của mặt phẳng được giữ bằng 0. Hãy tìm điện dung trên một đơn vị chiều dài của sợi dây trong hệ này.

(Wisconsin)

Lời giải:

Trong một hệ mà điện thế của mặt phẳng kim loại được giữ bằng 0, ta tưởng tượng một sợi dây thẳng vô hạn với mật độ điện tích dài $-\sigma$ được đặt đối xứng trên phía kia của mặt phẳng. Khi đó điện dung giữa sợi dây ban đầu và mặt phẳng kim loại là điện dung giữa hai sợi dây thẳng nằm cách nhau một khoảng cách $2b$.

Khi đó điện thế $\varphi(r)$ tại một điểm giữa hai sợi dây cách sợi dây ban đầu một khoảng cách r (và cách sợi dây ảnh một khoảng cách $2b - r$) là

$$\varphi(r) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{1}{2b - r} .$$

Do đó hiệu điện thế giữa hai sợi dây là

$$V = \varphi(a) - \varphi(2b - a) = \frac{\sigma}{\pi} \ln \left(\frac{2b - a}{a} \right) \approx \frac{\sigma}{\pi} \ln \frac{2b}{a} .$$

Vậy điện dung của hệ này trên một đơn vị chiều dài của sợi dây là

$$C = \frac{\sigma}{V} = \pi / \ln \frac{2b}{a} .$$

1076

Một điện tích $q = 2\,\mu$C được đặt cách một tấm kim loại dẫn điện, phẳng vô hạn, nối đất một khoảng a=10 cm. Hãy tìm:

(a) điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm phẳng đó,

(b) lực tác dụng lên điện tích q,

(c) công toàn phần cần thiết để dịch chuyển từ từ điện tích đó đến vô cực so với tấm phẳng.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phương pháp ảnh đòi hỏi rằng điện tích ảnh $-q$ được đặt đối xứng với $-q$ qua tấm phẳng. Điều này có nghĩa là điện tích cảm ứng toàn phần trên bề mặt của vật dẫn là $-q$.

(b) Lực tác dụng lên điện tích $+q$ là

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{0,2^2} = 0,9 \text{ N} ,$$

ở đây ta đã sử dụng $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}$ C^2/(N·m^2).

(c) Công toàn phần cần thiết để dịch chuyển điện tích đó một cách từ từ đến vô cực là

$$W = \int_a^\infty F dr = \int_a^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2} dr = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a} = 0,09 \text{ J} .$$

1077

Các điện tích $+q, -q$ đặt tại các điểm $(x, y, z) = (a, 0, a), (-a, 0, a)$ ở bên trên một mặt phẳng dẫn điện được nối đất nằm tại $z = 0$. Hãy tìm:

(a) lực toàn phần tác dụng lên điện tích $+q$,

(b) công thực hiện chống lại các lực tĩnh điện để lắp đặt hệ điện tích này,

(c) mật độ điện tích mặt tại điểm $(a, 0, 0)$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Phương pháp ảnh yêu cầu các điện tích ảnh $+q$ đặt tại $(-a, 0, -a)$ và $-q$ đặt tại $(a, 0, -a)$ (xem H. 1.34). Như vậy lực tổng hợp tác dụng lên $+q$ tại $(a, 0, a)$ là

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(2a)^2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{(2a)^2}\mathbf{e}_z + \frac{1}{(2\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z\right)\right]$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_x + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_z\right].$$

Lực này có độ lớn

$$F = \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

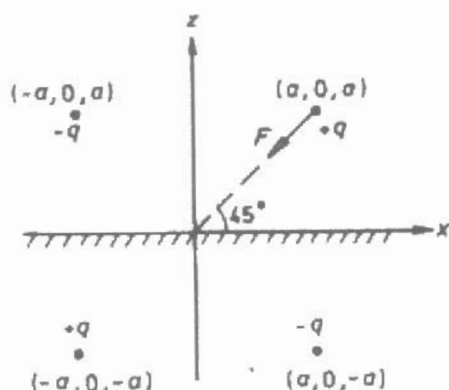
Lực này nằm trong mặt phẳng xz và hướng tới gốc toạ độ theo hướng tạo với trục x một góc 45° như thấy trên hình 1.34.

(b) Chúng ta có thể dựng lại hệ bằng cách đưa từ từ các điện tích $+q$ và $-q$ từ vô hạn theo các đường đi đối xứng tới các điểm $(a, 0, a)$ và $(-a, 0, a)$ tương ứng như sau:

$$L_1 : z = x\,,\ y = 0\,,$$
$$L_2 : z = -x\,,\ y = 0\,,$$

Khi các điện tích ở tại $(l, 0, l)$ trên đường L_1 và tại $(-l, 0, l)$ trên đường L_2 thì từng điện tích chịu tác dụng một lực $\frac{(\sqrt{2}-1)q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2}$ có hướng song song với hướng của đường đi sao cho công toàn phần thực hiện bởi các ngoại lực là

$$W = -2\int_\infty^a F dl = 2\int_a^\infty \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2} dl = \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}.$$



Hình 1.34

(c) Xét điện trường tại điểm $(a, 0, 0^+)$ ở ngay bên trên mặt phẳng dẫn điện. Cường độ điện trường tổng hợp $\mathbf{E}_1$ sinh ra do $+q$ tại $(a, 0, a)$ và $-q$ tại $(a, 0, -a)$ là

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\mathbf{e}_z .$$

Điện trường tổng hợp $\mathbf{E}_2$ sinh ra bởi $-q$ tại $(-a, 0, a)$ và $+q$ tại $(-a, 0, -a)$ là

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1}{5\sqrt{5}}\mathbf{e}_z .$$

Do đó, điện trường toàn phần tại $(a, 0, 0^+)$ là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1\right)\mathbf{e}_z ,$$

và mật độ điện tích mặt tại điểm này là

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1\right) .$$

1078

Giả thiết rằng vùng $z > 0$ trong không gian 3 chiều chứa đầy một vật liệu điện môi tuyến tính đặc trưng bởi hằng số điện môi ε_1, trong khi vùng $z < 0$ có

một vật liệu điện môi ε_2. Giữ cố định một điện tích $-q$ tại $(x, y, z) = (0, 0, a)$ và một điện tích q tại $(0, 0, -a)$. Người ta phải tác dụng một lực như thế nào lên điện tích âm để giữ nó đứng yên?

(*Columbia*)

Lời giải:

Đầu tiên hãy xét trường hợp đơn giản khi một điện tích điểm q_1 được đặt tại $(0, 0, a)$. Phương pháp ảnh yêu cầu có các điện tích ảnh q_1' tại $(0, 0, -a)$ và q_1'' tại $(0, 0, a)$. Khi đó điện thế (trong đơn vị Gauss) tại một điểm (x, y, z) là

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{q_1'}{\varepsilon_1 r_2}, \quad (z \geq 0), \quad \varphi_2 = \frac{q_1''}{\varepsilon_2 r_1}, \quad (z < 0),$$

trong đó

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}.$$

Áp dụng các điều kiện biên tại $(x, y, 0)$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

ta nhận được

$$q_1' = q_1'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_1.$$

Tương tự, nếu một điện tích điểm q_2 được đặt tại $(0, 0, -a)$ bên trong chất điện môi ε_2, các điện tích ảnh của nó sẽ là q_2' tại $(0, 0, a)$ và q_2'' tại $(0, 0, -a)$ với các độ lớn

$$q_2' = q_2'' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_2.$$

Khi cả hai q_1 và q_2 cùng tồn tại, lực trên q_1 sẽ là lực tổng hợp từ q_2, q_1' và q_1''. Suy ra

$$\begin{aligned} F &= \frac{q_1 q_1'}{4a^2 \varepsilon_1} + \frac{q_1 q_2}{4a^2 \varepsilon_2} + \frac{q_1 q_1''}{4a^2 \varepsilon_2} \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2}. \end{aligned}$$

Trong bài tập đang xét $q_1 = -q$, $q_2 = +q$, và thay vào biểu thức của F ta được

$$F = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q^2}{4a^2} - \frac{q^2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2} = -\frac{q^2}{4\varepsilon_1 a^2}.$$

Do đó, lực $-F$ là lực cần thiết để giữ $-q$ đứng yên.

1079

Khi một đám mây bay qua một điểm nào đó trên mặt đất, một điện trường hướng thẳng đứng $E = 100$ V/m được ghi lại ở chỗ này. Đáy của đám mây có chiều cao $d = 300$ m tính từ mặt đất và đỉnh của đám mây có chiều cao $d = 300$ m tính từ đáy của nó. Giả sử đám mây trung hoà về điện nhưng có sự phân bố điện tích: một điện tích $+q$ ở đỉnh của nó và một điện tích $-q$ ở đáy của nó. Hãy ước lượng độ lớn của điện tích $+q$ và lực điện từ bên ngoài (hướng và độ lớn) tác dụng lên đám mây. Có thể giả thiết rằng không có các điện tích khác ở trong khí quyển ngoài các điện tích trên đám mây.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Vị trí của các điện tích ảnh được chỉ ra trên hình 1.35. Khi đó cường độ điện trường tại điểm 0 trên mặt đất là

$$E = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} - 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2d)^2},$$

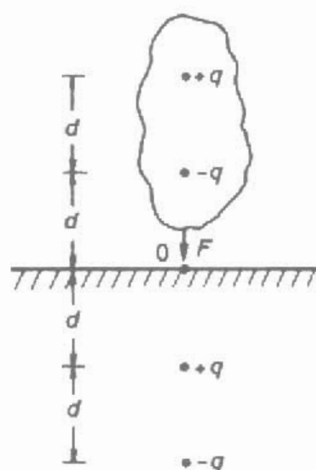
Từ đây ta nhận được

$$q = \frac{8\pi\varepsilon_0 d^2 E}{3} = 6,7\times 10^{-4}\ \text{C}.$$

Lực bên ngoài tác dụng lên đám mây là lực tĩnh điện giữa các điện tích ảnh và các điện tích ở trong đám mây, nghĩa là

$$\begin{aligned} F &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(2d)^2}+\frac{1}{(3d)^2}+\frac{1}{(3d)^2}-\frac{1}{(4d)^2}\right] \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\frac{2}{9}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right] = -4,05\times 10^{-3}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Như có thể thấy trên hình 1.35, lực này là lực hút.



Hình 1.35

1080

Một điện tích điểm q được đặt tại vectơ bán kính $\mathbf{s}$ hướng từ tâm của một quả cầu có bán kính a dẫn điện lý tưởng được nối đất.

(a) Nếu vùng bên ngoài quả cầu (ngoại trừ q) là chân không, hãy tính điện thế tại một điểm $\mathbf{r}$ bất kì bên ngoài quả cầu. Như thường lệ, lấy điện thế nối đất bằng 0.

(b) Lặp lại câu (a) nếu chân không được thay bằng một môi trường điện môi có hằng số điện môi ε.

(CUSPEA)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh.

(a) Như thấy trên hình 1.36, điện tích ảnh q' được đặt trên đường thẳng oq với khoảng cách s' tính từ tâm quả cầu. Lấy $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{\mathbf{s}'}{s'}$, điện thế tại $\mathbf{r}$ là

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}'|}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|r\mathbf{n}-s\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|r\mathbf{n}-s'\mathbf{n}'|}\right].\end{aligned}$$

Điều kiện biên yêu cầu phải thoả mãn $\phi(r = a) = 0$. Điều này có thể đạt được nếu

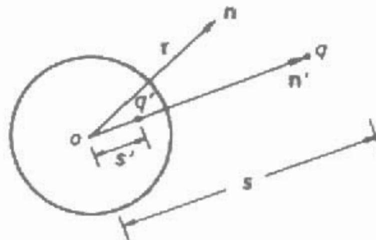
$$q' = -\frac{a}{s}q\,, \quad s' = \frac{a^2}{s}\,.$$

Khi đó, định lý về tính duy nhất của bài toán tĩnh điện cho điện thế tại một điểm bên ngoài quả cầu là

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} - \frac{a/s}{|\mathbf{r}-\frac{a^2}{s^2}\mathbf{s}|}\right].$$

(b) Khi bên ngoài quả cầu được chứa đầy một môi trường điện môi có hằng số điện môi ε, ta có thể thay một cách đơn giản ε_0 trong (a) bằng ε. Như vậy

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} - \frac{a/s}{|\mathbf{r}-\frac{a^2}{s^2}\mathbf{s}|}\right].$$



Hình 1.36

1081

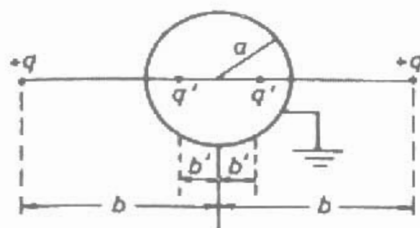
Hai điện tích giống nhau được đặt cách xa nhau một khoảng cách $2b$. Hãy tìm gần đúng bán kính tối thiểu a của một quả cầu dẫn điện được nối đất đặt giữa hai điện tích trên sao cho triệt tiêu được lực đẩy lẫn nhau của chúng.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Điện trường bên ngoài của quả cầu tương ứng với điện trường tổng hợp tính từ hai điện tích $+q$ đã cho và từ

hai điện tích ảnh q'. Các điện tích ảnh đều là $q' = -q\frac{a}{b}$ và chúng được đặt ở hai phía của tâm quả cầu, cách tâm quả cầu cùng một khoảng cách là $b' = \frac{a^2}{b}$ (xem H. 1.37).



Hình 1.37

Đối với mỗi điện tích $+q$ đã cho, ngoài lực đẩy tĩnh điện của điện tích $+q$ đã cho, còn có lực hút sinh ra do các điện tích ảnh. Để triệt tiêu lực tổng hợp, ta cần

$$\frac{q^2}{4b^2} = \frac{q^2\frac{a}{b}}{(b-\frac{a^2}{b})^2} + \frac{q^2\frac{a}{b}}{(b+\frac{a^2}{b})^2}$$
$$= \frac{2q^2a}{b^3}\left[1 + 3\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^8 + \dots\right] \approx \frac{2q^2a}{b^3},$$

Do đó, giá trị gần đúng của a ($a < b$) làm thoả mãn các yêu cầu của bài toán gần đúng bằng

$$a \approx \frac{b}{8}.$$

1082

(a) Hai điện tích bằng nhau $+Q$ được đặt cách nhau một khoảng cách là $2d$. Một quả cầu dẫn điện nối đất được đặt giữa chúng. Bán kính của quả cầu phải là bao nhiêu để hai điện tích này sinh ra một lực tổng hợp bằng 0?

(b) Lực tác dụng lên từng điện tích là bao nhiêu nếu như quả cầu đó có bán kính giống như đã được xác định ở phần (a) bây giờ được tích điện đến điện thế V?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Theo bài tập **1081** ta có $r_0 \approx d/8$.

(b) Khi quả cầu được tích điện đến điện thế V, điện thế bên ngoài quả cầu sẽ tăng một cách tương ứng

$$\phi = \frac{Vr_0}{r} \approx \frac{Vd}{8r},$$

trong đó r là khoảng cách giữa điểm điện trường và tâm của quả cầu. Một điện trường phụ được hình thành có giá trị là

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Vd}{8r^2}\mathbf{e}_r .$$

Do đó, lực tác dụng lên từng điện tích $+Q$ là

$$F = QE = \frac{QV}{8d} .$$

Hướng của lực đi ra xa quả cầu và nằm dọc theo đường thẳng nối điện tích với tâm quả cầu.

1083

Một điện tích q được đặt bên trong một vật dẫn hình vỏ cầu có bán kính trong r_1 và bán kính ngoài r_2. Hãy tìm lực điện tác dụng lên điện tích đó. Nếu vật dẫn được cách điện và không tích điện thì điện thế của bề mặt bên trong của nó là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

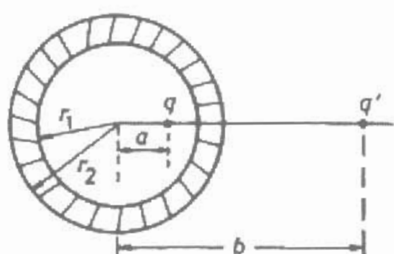
Lời giải:

Áp dụng phương pháp ảnh và gọi khoảng cách giữa q và tâm của vỏ cầu là a. Khi đó điện tích ảnh $q' = -\frac{r_1}{a}q$ được đặt tại $b = \frac{r_1^2}{a}$ (xem H. 1.38). Có thể nói rằng vì vật dẫn được cách điện và không tích điện nên nó là một vật đẳng thế với điện thế $\varphi = \varphi_0$. Khi đó điện trường bên trong vỏ cầu ($r < r_1$) bằng với điện trường do q và q' tạo ra.

Lực tác dụng lên điện tích q là lực tác dụng bởi q'

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(b-a)^2} = -\frac{\frac{r_1}{a}q^2}{4\pi\varepsilon_0(\frac{r_1^2}{a}-a)^2}$$

$$= -\frac{ar_1q^2}{4\pi\varepsilon_0(r_1^2-a^2)^2} .$$



Hình 1.38

Trong vùng $r > r_2$ điện thế là $\varphi_{\text{out}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Đặc biệt, điện thế của quả cầu dẫn điện tại $r = r_2$ là

$$\varphi_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Vì vật dẫn là một vật đẳng thế, nên điện thế của mặt trong của vỏ cầu dẫn điện cũng là $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$.

1084

Xét một lưỡng cực điện **P**. Giả thiết rằng lưỡng cực đó được giữ cố định tại điểm có toạ độ z_0 trên trục z và có hướng lập một góc θ trục đó (nghĩa là $\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_z = |\mathbf{P}|\cos\theta$). Giả thiết rằng mặt phẳng xy là một vật dẫn có điện thế bằng 0. Hãy tìm mật độ điện tích trên vật dẫn được cảm ứng từ lưỡng cực điện đó.

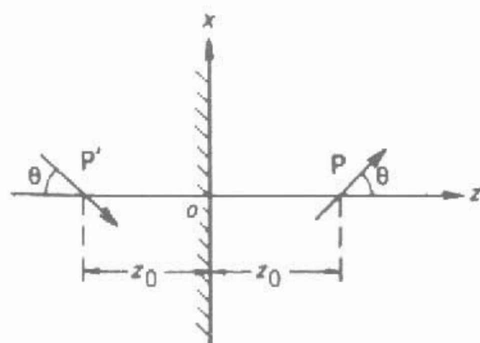
(*Columbia*)

Lời giải:

Như thấy trên hình 1.39, lưỡng cực là $\mathbf{P} = P(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ và lưỡng cực ảnh của nó là $\mathbf{P}' = P(-\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Trong vùng $z > 0$ điện thế tại một điểm $\mathbf{r} = (x, y, z)$ là

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{P[x\sin\theta + (z-z_0)\cos\theta]}{[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{P[-x\sin\theta + (z+z_0)\cos\theta]}{[x^2+y^2+(z+z_0)^2]^{3/2}}\right\}.$$

Khi đó mật độ điện tích cảm ứng trên bề mặt của vật dẫn là



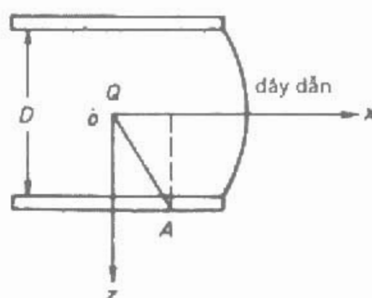
Hình 1.39

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{P\cos\theta}{2\pi(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} + \frac{3Pz_0(-x\sin\theta + z_0\cos\theta)}{2\pi(x^2 + y^2 + z_0^2)^{5/2}}.$$

1085

Hai tấm dẫn điện phẳng, lớn đặt cách nhau một khoảng cách D được nối với nhau bằng một dây dẫn. Một điện tích điểm Q được đặt tại điểm giữa của hai tấm đó như trên hình 1.40. Hãy tìm biểu thức của mật độ điện tích cảm ứng trên tấm ở phía dưới như hàm của D, Q và x (là khoảng cách từ tâm của tấm đó).

(Columbia)



Hình 1.40

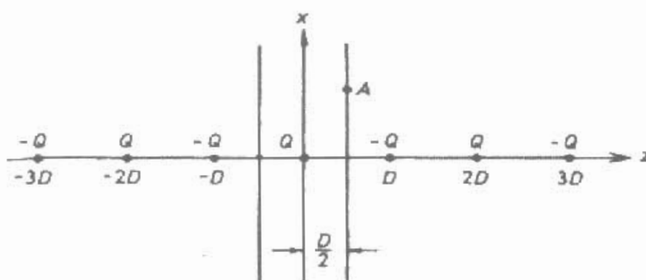
Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Vị trí của các điện tích ảnh được ghi rõ trên hình 1.41. Xét một điểm A bất kì trên tấm phía dưới. Chọn mặt phẳng xz chứa điểm A. Có thể thấy rằng điện trường tại A nằm trên bề mặt của một vật dẫn chỉ có thành phần z và độ lớn của nó là (lấy $d = \frac{D}{2}$)

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(d^2 + x^2)} \cdot \frac{2d}{(d^2 + x^2)^{1/2}} \\
&\quad - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0[(3d)^2 + x^2]} \cdot \frac{2 \cdot 3d}{[(3d)^2 + x^2]^{1/2}} \\
&\quad + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0[(5d)^2 + x^2]} \cdot \frac{2 \cdot 5d}{[(5d)^2 + x^2]^{1/2}} - \cdots \\
&= \frac{QD}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{[(n+\frac{1}{2})^2 D^2 + x^2]^{3/2}} .
\end{aligned}
$$

Suy ra biểu thức mật độ điện tích

$$
\sigma(x) = -\varepsilon_0 E_z = -\frac{QD}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{[(n+\frac{1}{2})^2 D^2 + x^2]^{3/2}} .
$$



Hình 1.41

1086

Hai tấm dẫn điện lớn, song song đặt cách nhau một khoảng cách nhỏ $4x$. Hai tấm đó đều được nối đất. Các điện tích Q và $-Q$ được đặt tại các khoảng cách x và $3x$ tính từ một tấm như trên hình 1.42.

(a) Tính năng lượng cần thiết để dịch chuyển hai điện tích đó ra khỏi giữa các tấm và ra xa vô cùng.

(b) Tính lực tác dụng từng điện tích (cả độ lớn và hướng).

(c) Tính lực tác dụng lên từng tấm kim loại (cả độ lớn và hướng).

(d) Tính điện tích cảm ứng toàn phần trên từng tấm (Gợi ý: Điện thế trên mặt phẳng nằm giữa hai điện tích là bao nhiêu?)

(e) Tính điện tích cảm ứng toàn phần trên bề mặt bên trong của từng tấm sau khi điện tích $-Q$ được rời đi, điện tích $+Q$ vẫn giữ tại chỗ?

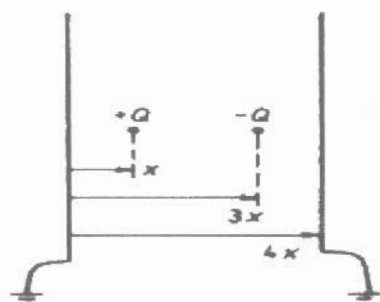
(*MIT*)

Lời giải:

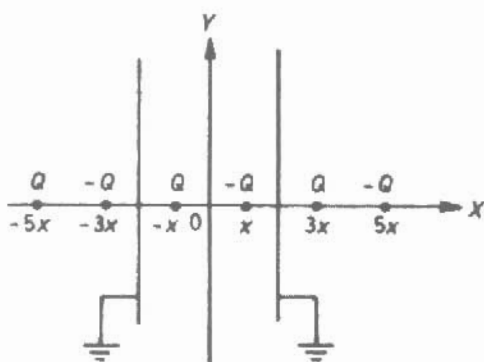
(a) Điện thế được tìm bằng phương pháp ảnh, phương pháp này đòi hỏi cần có các điện tích ảnh $+Q$ tại các toạ độ $\cdots -9x, -5x, 3x, 7x, 11x\cdots$ và các điện tích ảnh $-Q$ tại các toạ độ $\cdots -7x, -3x, 5x, 9x, 13x, \cdots$ dọc theo trục x như trên hình 1.43. Khi đó mật độ điện tích của hệ gồm các điện tích thực và các điện tích ảnh có thể biểu diễn như sau

$$\rho = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} Q\delta[x - (2k+1)x]$$

trong đó δ là hàm Dirac delta một chiều.



Hình 1.42



Hình 1.43

Năng lượng điện trường tĩnh điện của hệ là

$$W = \frac{1}{2}\sum QU = \frac{1}{2}QU_+ - \frac{1}{2}QU_-,$$

ở đây U_+ là điện thế tại điện tích $+Q$ sinh ra bởi các điện tích thực và các điện tích ảnh, không bao gồm bản thân điện tích $+Q$, trong khi đó U_- là điện thế tại điện tích $-Q$ sinh ra do các điện tích thực và các điện tích ảnh, không bao gồm bản thân điện tích $-Q$. Vì

$$\begin{aligned} U_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2Q}{(2x)}+\frac{2Q}{(4x)}-\frac{2Q}{(6x)}+\cdots\right] \\ &= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{-Q\ln 2}{4\pi\varepsilon_0 x}, \\ U_- &= -U_+ = \frac{Q\ln 2}{4\pi\varepsilon_0 x}, \end{aligned}$$

ta có

$$W = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2\,.$$

Do đó năng lượng cần thiết để dịch chuyển hai điện tích trên ra xa nhau và xa các tấm kim loại một khoảng cách vô hạn là $-W$.

(b) Lực tác dụng lên $+Q$ chỉ là lực tác dụng do điện trường của điện tích thực $-Q$ và các điện tích ảnh sinh ra bởi Q. Vì đối xứng nên lực này bằng 0. Tương tự, lực tác dụng lên $-Q$ cũng bằng 0.

(c) Xét lực tác dụng lên tấm dẫn điện bên trái. Đây là tổng của tất cả các lực tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái (nghĩa là các điện tích ảnh phía bên trái của tấm bên trái) sinh ra bởi các điện tích thực $+Q, -Q$ và bởi tất cả các điện tích ảnh của tấm bên phải (nghĩa là các điện tích ảnh phía bên phải của tấm bên phải).

Đầu tiên chúng ta hãy xét lực F_1 tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái sinh ra do điện tích thực $+Q$

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(4x)^2} + \cdots = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

lấy hướng dọc theo $+x$ là hướng dương. Sau đó chúng ta tìm lực F_2 giữa điện tích thực $-Q$ và các điện tích ảnh của tấm bên trái

$$F_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(4x)^2} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(6x)^2} - \cdots = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Cuối cùng xét lực F_3 tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái sinh ra bởi các điện tích ảnh của tấm bên phải

$$F_3 = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} .$$

Như vậy lực tổng hợp tác dụng lên tấm bên trái là

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \left(1 - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{4^2} + \cdots\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} .$$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 ,$$

ta nhận được

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \ln 2 .$$

Lực này hướng về phía bên phải. Bằng phương pháp tương tự ta cũng sẽ thấy rằng lực tác dụng lên tấm bên phải có độ lớn cũng bằng $\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} \ln 2$ và hướng về phía bên trái.

(d) Điện thế trên mặt phẳng $x = 0$ bằng 0, như vậy chỉ có một nửa đường sức xuất hiện từ điện tích $+Q$ đến được tấm bên trái, trong khi các đường sức xuất hiện từ điện tích $-Q$ không đạt đến được tấm bên trái chút nào. Do đó, điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm bên trái là $-\frac{Q}{2}$ và tương tự, điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm bên phải là $\frac{Q}{2}$.

(e) Khi điện tích $+Q$ tồn tại một mình, tổng của toàn bộ điện tích cảm ứng trên hai tấm là $-Q$. Nếu tổng điện tích cảm ứng trên tấm bên trái là $-Q_x$ thì khi đó điện tích cảm ứng tổng cộng trên tấm phải là $-Q + Q_x$. Tương tự, nếu $-Q$ tồn tại một mình, tổng điện tích cảm ứng trên tấm trái là $Q - Q_x$ và tổng điện tích cảm ứng trên tấm phải là $+Q_x$ do tính đối xứng. Nếu hai điện tích đồng thời tồn tại, điện tích cảm ứng trên tấm trái là sự chồng chập của các điện tích cảm ứng sinh ra do cả hai điện tích $+Q$ và $-Q$. Do đó, sử dụng kết quả của (d) ta có

$$Q - 2Q_x = -\frac{Q}{2} ,$$

hay

$$Q_2 = \frac{3}{4}Q\,.$$

Như vậy sau khi $-Q$ được dịch chuyển đi, điện tích cảm ứng tổng cộng trên bề mặt bên trong của tấm bên trái là $-3Q/4$ và điện tích cảm ứng tổng cộng trên tấm bên phải là $-Q/4$.

1087

Phải đưa một điện tích dương tối thiểu là bao nhiêu tới một vật dẫn hình cầu bán kính a, cách điện và bị ảnh hưởng bởi một điện tích điểm $+q$ bên ngoài, cách tâm vật dẫn hình cầu một khoảng cách $r > a$, để đảm bảo cho mật độ điện tích mặt trên quả cầu có thể dương ở khắp mọi nơi? Điều gì sẽ xảy ra nếu điện tích bên ngoài là $-q$?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ Đềcác với gốc toạ độ tại tâm của quả cầu và trục z dọc theo đường thẳng nối tâm quả cầu với điện tích q. Rõ ràng là mật độ điện tích mặt cảm ứng lớn nhất có giá trị âm sẽ xuất hiện trên quả cầu tại điểm $(0, 0, a)$. Tác dụng của bề mặt quả cầu dẫn điện có thể được thay thế bằng tác dụng của một điện tích điểm $(-\frac{a}{r}q)$ đặt tại $(0, 0, \frac{a^2}{r})$ và một điện tích điểm $(\frac{a}{r}q)$ tại tâm quả cầu $(0, 0, 0)$. Khi đó điện trường $\mathbf{E}$ tại $(0, 0, a_+)$ là

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{a}{r}q}{a^2} - \frac{q}{(r-a)^2} - \frac{\frac{a}{r}q}{(a-\frac{a^2}{r})^2}\right]\mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{ar} - \frac{q}{(r-a)^2} - \frac{\frac{r}{a}q}{(r-a)^2}\right]\mathbf{e}_z\,.\end{aligned}$$

Do đó, mật độ điện tích mặt cảm ứng âm có giá trị cực đại là

$$\sigma_e = \varepsilon_0 E_n = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{ar} - \frac{1}{(r-a)^2} - \frac{r/a}{(r-a)^2}\right].$$

Nếu một điện tích dương Q được đưa tới quả cầu, nó sẽ phân bố đồng đều trên bề mặt quả cầu với mật độ điện tích mặt $Q/4\pi a^2$. Để tổng mật độ điện

tích bề mặt ở khắp mọi nơi đều dương ta cần có

$$Q \geq -\sigma \cdot 4\pi a^2 = a^2 q\left[\left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{ar}\right]$$
$$= \frac{a^2(3r-a)}{r(r-a)^2} q\,.$$

Mặt khác, điện trường tại điểm $(0, 0, -a_-)$ là

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{ra} + \frac{1}{(r+a)^2} - \frac{r/a}{(r+a)^2}\right]\mathbf{e}_z\,.$$

Nếu ta thay thế q bằng $-q$, mật độ điện tích mặt cảm ứng âm cực đại sẽ xuất hiện tại $(0, 0, -a)$. Khi đó giống như trên, điện tích dương cần có là

$$Q \geq -\sigma \cdot 4\pi a^2 = -\varepsilon_0 \cdot 4\pi a^2\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\cdot\left[\frac{1}{ra} + \frac{1}{(r+a)^2} - \frac{r/a}{(r+a)^2}\right]$$
$$= q\left[\frac{a}{r} + \frac{a^2}{(r+a)^2} - \frac{ar}{(r+a)^2}\right] = \frac{qa^2(3r+a)}{r(r+a)^2}\,.$$

1088

(a) Hãy tìm điện thế tĩnh điện phát sinh do một lưỡng cực điện có độ lớn d nằm tại khoảng cách L tính từ tâm của một quả cầu dẫn điện nối đất bán kính a; giả thiết rằng trục của lưỡng cực đó chạy qua tâm của quả cầu.

(b) Xét hai quả cầu dẫn điện được cách điện (bán kính a) trong một điện trường đều có hướng sao cho đường thẳng nối tâm của chúng, có chiều dài R và song song với điện trường. Khi R lớn, hãy mô tả một cách định tính điện trường tổng hợp tính tới bậc R^{-4}.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

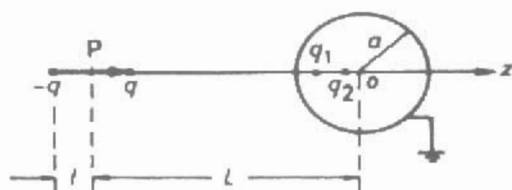
(a) Lấy tâm quả cầu làm gốc toạ độ và trục đối xứng của hệ là trục z, khi đó chúng ta có thể viết $\mathbf{P} = d\mathbf{e}_z$. Xem $\mathbf{P}$ như một điện tích dương q và một điện tích âm $-q$ đặt cách nhau một khoảng cách $2l$ sao cho $d = \lim_{l \to 0} 2ql$, ta có thể sử dụng phương pháp ảnh. Như đã chỉ ra trên hình 1.44, toạ độ của q và $-q$ tương ứng là

$$q: \quad z = \quad L + l, \quad -q: \quad z = -L - l.$$

Lấy q_1 và q_2 là các điện tích ảnh tương ứng của q và $-q$. Đối với bề mặt quả cầu là đẳng thế, độ lớn và vị trí của q_1 và q_2 có thể viết như sau (hình 1.44)

$$q_1 = -\frac{a}{L-l}q \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L-l}\right),$$

$$q_2 = \frac{a}{L+l}q \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L+l}\right).$$



Hình 1.44

Vì $L \gg 1$, dùng công thức tính gần đúng

$$\frac{1}{L \pm l} \approx \frac{1}{L} \mp \frac{l}{L^2}$$

độ lớn và vị trí của các điện tích ảnh lần lượt là

$$q_1 = -\frac{a}{L}q - \frac{ad}{2L^2} \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, \frac{-a^2}{L} - \frac{a^2 l}{L^2}\right),$$

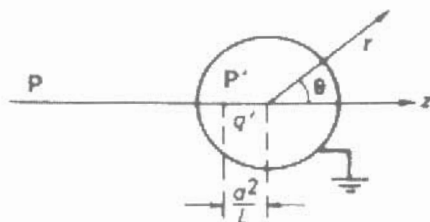
$$q_2 = \frac{a}{L}q - \frac{ad}{2L^2} \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L} + \frac{a^2 l}{L^2}\right),$$

trong đó ta đã sử dụng $d = 2ql$. Do đó một lưỡng cực ảnh với mômen lưỡng cực $\mathbf{P}' = \frac{a}{L}q \cdot \frac{2a^2 l}{L^2}\mathbf{e}_z = \frac{a^3}{L^3}\mathbf{P}$ và một điện tích ảnh $q' = -\frac{ad}{L^2}$ sẽ được sử dụng để thay thế cho tác dụng của q_1 và q_2. Cả $\mathbf{P}'$ và q' đều được đặt tại $r' = (0, 0, -\frac{a^2}{L})$ (xem H. 1.45). Do đó điện thế tại r bên ngoài quả cầu là sự chồng chập của các điện thế do $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$, và q' sinh ra, nghĩa là

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{P}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}+L\mathbf{e}_z)}{|\mathbf{r}+L\mathbf{e}_z|^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{ad}{L^2\left(r^2+\frac{a^2r}{L}\cos\theta+\frac{a^4}{L^2}\right)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{a^3d\left(r\cos\theta+\frac{a^2}{L}\right)}{L^3\left(r^2+\frac{a^2r}{L}\cos\theta+\frac{a^4}{L^2}\right)^{3/2}} + \frac{d(r\cos\theta+L)}{(r^2+2rL\cos\theta+L^2)^{3/2}}\right].$$



Hình 1.45

(b) Một quả cầu dẫn điện bán kính a ở trong một điện trường ngoài $\mathbf{E}$ tương ứng với một lưỡng cực điện có mômen $\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 a^2\mathbf{E}$ đối với điện trường bên ngoài quả cầu. Hai quả cầu dẫn điện cách biệt với nhau trong bài tập này có thể coi như một lưỡng cực nếu chúng ta sử dụng phép gần đúng bậc 0. Nhưng khi chúng ta sử dụng phép gần đúng có bậc cao hơn thì tương tác giữa hai quả cầu dẫn điện phải được xét đến. Bây giờ sự tác dụng của quả cầu thứ nhất lên quả cầu thứ hai giống như trường hợp (a) của bài tập này (khi hai quả cầu được tách xa nhau với một khoảng cách lớn). Nói một cách khác, tác dụng này có thể coi như tác dụng của một lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}' = \frac{a^3}{R^3}\mathbf{P}$ và điện tích ảnh $q' = -\frac{ap}{R^2}$. Khi $a^2 \ll L$, lưỡng cực ảnh và điện tích ảnh có thể xem một cách gần đúng là đặt tại tâm quả cầu. Như vậy điện trường tại một điểm bên ngoài quả cầu là tổng hợp của các điện trường sinh ra do một điện tích điểm q' và một lưỡng cực có mômen $\mathbf{P} + \mathbf{P}' = (1 + \frac{a^3}{R^3})\mathbf{P}$ đặt tại mỗi tâm của hai quả cầu đó. Khi đó, điện thế sẽ có thể được biểu thị với những số hạng tới bậc $1/R^4$.

1089

Một lưỡng cực điện có mômen **P** được đặt tại khoảng cách r tính từ một quả cầu dẫn điện có bán kính a đã được cách điện. Lưỡng cực này có hướng đi ra xa quả cầu. Giả thiết rằng $r \gg a$ và quả cầu không chứa điện tích thực.

(a) Nêu các điều kiện biên về điện trường **E** tại bề mặt của quả cầu.

(b) Hãy tìm gần đúng lực tác dụng lên lưỡng cực đó.

(MIT)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ cầu với trục z dọc theo hướng của lưỡng cực **P** và lấy gốc toạ độ tại tâm quả cầu. Các điều kiện biên đối với **E** trên bề mặt của quả cầu là

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0 \,, \quad E_t = 0 \,,$$

trong đó σ là mật độ điện tích mặt.

(b) Hệ có các ảnh tương tự các ảnh của bài tập **1088** gồm một lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}' = (\frac{a}{r})^3\mathbf{P}$ và một điện tích ảnh $q' = -\frac{aP}{r^2}$ đặt tại $\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r}\mathbf{e}_z$. Thêm nữa, phải đặt một điện tích ảnh $q'' = -q'$ tại tâm của quả cầu khi quả cầu dẫn điện đó được cách điện và không tích điện. Tuy nhiên, vì $r \gg a$ nên chúng ta có thể coi q' và q'' như một tổ hợp tạo nên một lưỡng cực ảnh có mômen $\mathbf{P}'' = \frac{a\mathbf{P}}{r^2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{a^3}{r^3}\mathbf{P}$. Vì $r \gg a$, các lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}'$ và $\mathbf{P}''$ có thể được coi gần đúng như định xứ tại tâm của quả cầu. Tổng mômen lưỡng cực ảnh là

$$\mathbf{P}_{\text{ảnh}} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}'' = 2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathbf{P} \,.$$

Khi đó bài tập thực chất là tìm lực tác dụng lên của $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ lên **P**. Điện thế tại một điểm **r** do $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ tạo ra là

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{P}_{\text{ảnh}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \,,$$

và điện trường tương ứng là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_{\text{ảnh}})\mathbf{r} - r^2\mathbf{P}_{\text{ảnh}}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \,.$$

Tại vị trí của **P**, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_z$, khi đó điện trường do $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ tạo ra là

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_{\text{ảnh}}}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{a^3 P}{\pi\varepsilon_0 r^6}\mathbf{e}_z = \frac{a^3}{\pi\varepsilon_0 r^6}\mathbf{P} \,.$$

Năng lượng của **P** trong trường này là

$$W = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} = -\frac{a^3P^2}{\pi\varepsilon_0 r^6},$$

Từ đây suy ra lực tác dụng lên **P** như sau

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{6a^3P^2}{\pi\varepsilon_0 r^7}\mathbf{e}_z = -\frac{6a^3P\mathbf{P}}{\pi\varepsilon_0 r^7}.$$

1090

Giả thiết rằng thế năng giữa hai điện tích điểm q_1 và q_2 ở cách nhau một khoảng cách r thực tế là $q_1q_2e^{-Kr}/r$ thay cho q_1q_2/r với K rất nhỏ. Có thể thay thế phương trình Poisson cho điện thế như thế nào? Hãy đưa ra thiết kế phác thảo một thực nghiệm để kiểm chứng cho sự khác D của K. Hãy đưa ra cơ sở lý thuyết cho phác thảo của bạn.

(Chicago)

Lời giải:

Với giả thiết đã cho, hàm Poisson được thay thế bằng

$$\nabla^2\phi + K^2\phi = -4\pi\rho$$

trong hệ đơn vị Gauss, trong đó ρ là mật độ điện tích. Để kiểm chứng cho sự khác không của K hãy xét một lồng Faraday có dạng một vỏ cầu dẫn điện S, thể tích V, bao quanh và có tâm tại q_1 như thấy trong hình 1.46. Giả sử bán kính vectơ của q_2 là $\mathbf{r}'_0$. Kí hiệu điểm nguồn bằng $\mathbf{r}'$ và điểm điện trường bằng $\mathbf{r}$, sử dụng định lý Green

$$\int_V (\psi\nabla'^2\phi - \phi\nabla'^2\psi)dV' = \oint_S (\psi\nabla'\phi - \phi\nabla'\psi)\cdot d\mathbf{S}'.$$

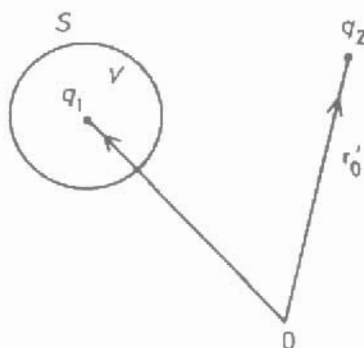
Hãy chọn để ϕ là điện thế ở bên trong S do q_2 nằm ngoài S gây ra. Điện thế trong trường hợp này được viết như sau

$$\nabla^2\phi + K^2\phi = 0,$$

vì $\rho = 0$ (là mật độ điện tích tương ứng với sự phân bố của q_2) bên trong S và một hàm Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ thoả mãn đối với ψ nên có thể viết biểu thức sau

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ,$$
$$G = 0 \quad \text{trên} \quad S ,$$

trong đó $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ là hàm Dirac delta.



Hình 1.46

Các tích phân trong phương trình tích phân được viết như sau

$$\int_V \psi\nabla'^2\phi dV' = \int_V G\nabla'^2\phi dV' = -K^2\int_V G\phi dV' ,$$
$$\int_V \phi\nabla'^2\psi dV' = \int_V \phi\nabla'^2 G dV' = -4\pi\int_V \phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV' = -4\pi\phi(\mathbf{r}) ,$$
$$\oint_S \psi\nabla'\phi\cdot d\mathbf{S}' = \oint_S G\nabla'\phi\cdot d\mathbf{S}' = 0 \quad \text{as} \quad G = 0 \quad \text{on} \quad S ,$$
$$\oint \phi\nabla'\psi\cdot d\mathbf{S}' = \phi_S\oint_S \nabla' G\cdot d\mathbf{S}' = \phi_S\int_V \nabla'^2 G dV'$$
$$= -4\pi\phi_S\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV' = -4\pi\phi_S$$

Vì ϕ = hằng số = ϕ_S đối với S là một vật dẫn. Lưu ý rằng định lý đive đã được sử dụng trong phương trình cuối cùng.

Khi này phương trình tích phân trở thành

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\left(4\pi\phi_S + K^2\int_V G\phi dV'\right)$$
$$= \phi_S + \frac{K^2}{4\pi}\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')dV' .$$

Nếu $K = 0$ thì $\phi(\mathbf{r}) = \phi_S$, nghĩa là, quả cầu V là một thể tích đẳng thế, như vậy không có một lực nào tác dụng lên q_1. Nếu $K \neq 0$ thì $\phi(\mathbf{r})$ sẽ phụ thuộc vào $\mathbf{r}$, như vậy q_1 sẽ chịu tác dung một lực là $-q_1\nabla\phi$. Do đó đánh giá lực trên q_1 sẽ xác định được $K = 0$ hay không.

1091

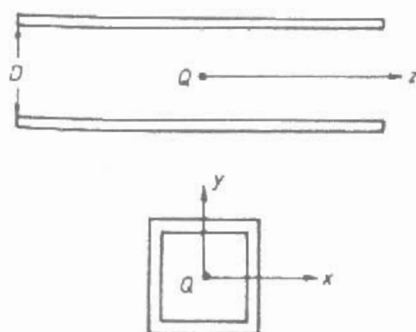
Một ống dẫn điện rất dài có mặt cắt hình vuông bên trong với kích thước D như trên hình 1.47. Phía xa từ một trong hai đầu của ống dẫn treo lơ lửng một điện tích điểm nằm tại tâm của mặt cắt vuông.

(a) Hãy xác định điện thế tại tất cả các điểm bên trong ống dẫn, có thể dưới dạng một chuỗi vô hạn.

(b) Tìm biểu thức tiệm cận đối với điện thế này đối với tất cả các điểm nằm xa điện tích điểm đó.

(c) Phác hoạ một vài đường sức của điện trường trong vùng xa điện tích điểm đó. (Gợi ý: Tránh dùng các ảnh).

(UC, Berkeley)



Hình 1.47

Lời giải:

(a) Phương trình Poisson đối với điện thế và các điều kiện biên có thể viết

như sau

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= -\tfrac{Q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,, \\ \varphi\big|_{x=\pm D/2} &= 0\,, \\ \varphi\big|_{y=\pm D/2} &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Bằng phép biến đổi Fourior

$$\bar{\varphi}(x,y,k) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y,z)e^{ikz}dz\,,$$

Các phương trình trên sẽ trở thành

$$\left.\begin{aligned} \left(\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)\bar{\varphi}(x,y,k) &= -\tfrac{Q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\,, \\ \bar{\varphi}(x,y,k)\big|_{x=\pm D/2} &= 0\,, \\ \bar{\varphi}(x,y,k)\big|_{y=\pm D/2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Kí hiệu $F(\Omega)$ là không gian các hàm số bằng 0 tại $x = \pm\frac{D}{2}$ hoặc $y = \pm\frac{D}{2}$. Tập hợp các cơ sở đầy đủ và unita trong không gian hàm này là

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{2}{D}\cos\tfrac{(2m+1)\pi x}{D}\cos\tfrac{(2m'+1)\pi y}{D}\,,\ \tfrac{2}{D}\cos\tfrac{(2m+1)\pi x}{D}\sin\tfrac{2n'\pi y}{D}\,, \\ &\tfrac{2}{D}\sin\tfrac{2n\pi x}{D}\cos\tfrac{(2m'+1)\pi y}{D}\,,\ \tfrac{2}{D}\sin\tfrac{2n\pi x}{D}\sin\tfrac{2n'\pi x}{D}\,. \\ &m,m'\geq 0\,,\ n,n'\geq 1\,. \end{aligned}\right\}$$

Trong không gian hàm này $\delta(x)\delta(y)$ có thể khai triển như sau

$$\delta(x)\delta(y) = \left(\frac{2}{D}\right)^2\sum_{m,m'=0}^{\infty}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{D}\cos\frac{(2m'+1)\pi y}{D}\,. \qquad (2)$$

Giả sử $\bar{\varphi}(x,y,k)$ là nghiệm tổng quát có dạng

$$\bar{\varphi}(x,y,k) = \sum_{m,m'=0}^{\infty}\varphi_{mm'}(k)\cos\frac{(2m+1)\pi x}{D}\cos\frac{(2m'+1)\pi y}{D}\,. \qquad (3)$$

Thay (3) vào phương trình (1), đồng thời kết hợp với phương trình (2), ta được

$$\bar{\varphi}(x,y,k) = \frac{4Q}{\varepsilon D^2}\sum_{m,m'=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m+1)\pi x}{D}\cos\frac{(2m'+1)\pi y}{D}}{k^2+\left(\frac{(2m+1)\pi}{D}\right)^2+\left(\frac{(2m'+1)\pi}{D}\right)^2}\,.$$

Áp dụng công thức tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|z|}, \quad (\lambda > 0),$$

cuối cùng ta có

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0 D} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos\frac{(2m'+1)\pi y}{D}}{\sqrt{(2m+1)^2 + (2m'+1)^2}} \cdot e^{-\frac{\pi|z|}{D}\sqrt{(2m+1)^2+(2m'+1)^2}} .$$

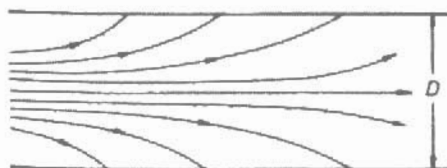
(b) Đối với các điểm ở xa điện tích điểm chúng ta chỉ cần chọn một số thành phần với $m = m' = 0$ cho điện thế, nghĩa là

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 \pi D} \cos\frac{\pi x}{D} \cdot \cos\frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}|z|} .$$

(c) Đối với vùng $z > 0$, biểu thức tiệm cận của điện trường đối với $z \gg D$ là

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 D^2} \sin\frac{\pi x}{D} \cos\frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z} , \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 D^2} \cos\frac{\pi x}{D} \sin\frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z} , \\ E_z &= \frac{2Q}{\varepsilon_0 D^2} \cos\frac{\pi x}{D} \cos\frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z} . \end{aligned} \right\}$$

Các đường sức ở xa điện tích điểm được vẽ phác trên hình 1.48



Hình 1.48

1092

Xét hai lưỡng cực $\mathbf{P}_1$ và $\mathbf{P}_2$ đặt cách nhau một khoảng cách d. Hãy tìm lực tác dụng giữa chúng do tương tác tĩnh điện giữa hai mômen lưỡng cực đó đối với sự định hướng bất kì của $\mathbf{P}_1$ và $\mathbf{P}_2$. Trong trường hợp đặc biệt, khi $\mathbf{P}_1$ song song với đường nối hai lưỡng cực, hãy xác định sự định hướng của $\mathbf{P}_2$ để cho lực hút là cực đại.

(Columbia)

Lời giải:



Hình 1.49

Trong hình 1.49 vectơ bán kính có hướng từ $\mathbf{P}_1$ đến $\mathbf{P}_2$. Lấy điện trường do $\mathbf{P}_1$ sinh ra như một điện trường ngoài, cường độ của nó tại vị trí của $\mathbf{P}_2$ được tính bởi công thức

$$\mathbf{E}_e = \frac{3(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^5} .$$

Do đó lực tác dụng lên $\mathbf{P}_2$ là

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\mathbf{P}_2 \cdot \nabla)\mathbf{E}_e \\ &= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^7}\{r^2[(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{r} + (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}_2 + (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}_1] - 5(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}\}.\end{aligned}$$

Nếu $\mathbf{P}_1 \| \mathbf{r}$, giả sử $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r} = P_2 r\cos\theta$. Khi đó $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1 P_2 \cos\theta$ và lực tác dụng giữa $\mathbf{P}_1$ và $\mathbf{P}_2$ trở thành

$$\mathbf{F} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\{-3P_1P_2\cos\theta\mathbf{r} + P_1 r\mathbf{P}_2\} .$$

Lực hút cực đại rõ ràng đạt được khi $\theta = 0°$, và khi đó $\mathbf{P}_2$ cũng song song với $\mathbf{r}$. Giá trị cực đại của lực này là

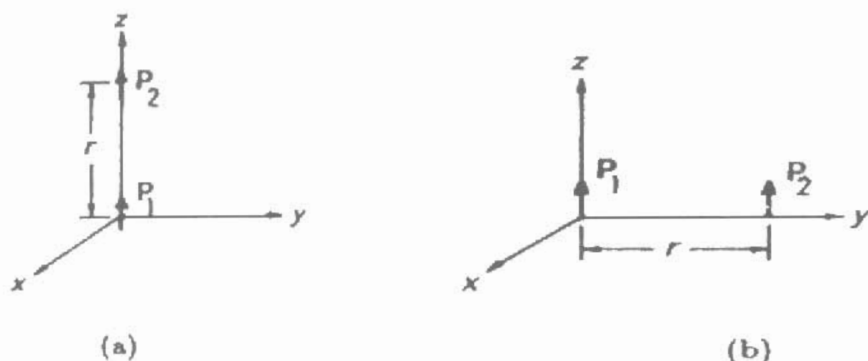
$$\mathbf{F}_{\max} = -\frac{3P_1P_2\mathbf{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^5} .$$

Lưu ý rằng dấu âm biểu thị lực hút.

1093

Một lưỡng cực điện với mômen lưỡng cực $\mathbf{P}_1 = P_1\mathbf{e}_z$ được đặt tại gốc của một hệ toạ độ. Một lưỡng cực thứ hai có mômen $\mathbf{P}_2 = P_2\mathbf{e}_z$ được đặt như ở hình (a) trên trục $+z$ cách gốc toạ độ một khoảng cách r, hoặc như ở hình (b) trên trục $+y$ cách gốc toạ độ một khoảng cách r. Hãy chứng minh rằng lực giữa hai lưỡng cực này là lực hút trong từng lượng hình 1.50(a) và là lực đẩy trong trường hợp hình 1.50(b). Hãy tính độ lớn của lực trong hai trường hợp trên.

(Columbia)



Hình 1.50

Lời giải:

Điện trường do $\mathbf{P}_1$ sinh ra là

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\left(\frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{\mathbf{P}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3P_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{e}_r ,$$

trong đó θ là góc giữa $\mathbf{P}_1$ và $\mathbf{r}$. Năng lượng tương tác giữa $\mathbf{P}_2$ và $\mathbf{P}_1$ là

$$W_e = -\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{3P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos^2\theta .$$

Do đó các thành phần của lực tác dụng trên $\mathbf{P}_2$ là

$$F_r = -\frac{\partial W_e}{\partial r} = \frac{3P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} - \frac{9P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\cos^2\theta ,$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial W_e}{\partial\theta} = -\frac{3P_1P_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\sin\theta\cos\theta .$$

(a) Trong trường hợp $\theta = 0$, ta có

$$F_\theta = 0\,, \quad F_r = -\frac{3P_1P_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\,.$$

Dấu âm biểu thị lực hút.

(b) Trong trường hợp $\theta = \frac{\pi}{2}$, khi đó ta có

$$F_\theta = 0\,, \quad F_r = \frac{3P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\,.$$

Dấu dương biểu thị lực đẩy.

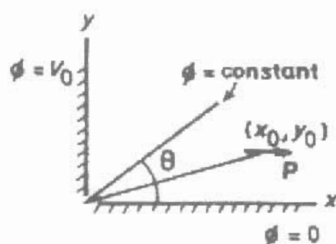
1094

Một lưỡng cực điện có mômen $\mathbf{P} = (P_x, 0, 0)$ được đặt tại điểm $(x_0, y_0, 0)$, trong đó $x_0 > 0$ và $y_0 > 0$. Các mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$ là các tấm phẳng dẫn điện có một khe rất nhỏ tại gốc toạ độ. Điện thế của mặt phẳng tại $x = 0$ được giữ tại giá trị V_0 đối với với mặt phẳng $y = 0$. Lưỡng cực này đủ yếu để có thể bỏ qua các điện tích cảm ứng trên các tấm phẳng. Hình 1.51 là một phác hoạ của các vật dẫn có điện thế tĩnh điện không đổi.

(a) Dựa trên hình 1.51 hãy rút ra biểu thức của điện thế tĩnh điện $\phi(x, y)$.

(b) Hãy tính lực tác dụng lên lưỡng cực đó.

(MIT)



Hình 1.51

Lời giải:

(a) Bất kì mặt phẳng nào đi qua trục z đều là một mặt đẳng thế có điện thế chỉ phụ thuộc vào góc θ mà nó tạo với mặt phẳng $y = 0$

$$\phi(x, y) = \phi(\theta)\,.$$

Do đó phương trình Laplace chỉ dạng một chiều như sau

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 0\,,$$

với nghiệm

$$\phi(\theta) = \frac{2V_0}{\pi}\theta\,,$$

ở đây đã tính đến các điều kiện biên $\phi = 0$ đối với $\theta = 0$ và $\phi = V_0$ đối với $\theta = \frac{\pi}{2}$. Phương trình này cũng có thể được viết lại trong hệ toạ độ Đềcác như sau

$$\phi(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(b) Khi đó điện trường là

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{2V_0}{\pi}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{e}_x - \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{e}_y\right).$$

Do đó, lực tác dụng lên lưỡng cực $(\mathbf{P}_x, 0, 0)$ là

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{E} = P_x\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x}\Big|_{x=x_0,y=y_0} \\ &= \frac{2V_0P_x}{\pi}\left(-\frac{2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}\mathbf{e}_x + \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}\mathbf{e}_y\right).\end{aligned}$$

1095

Bên trong một bộ ngưng tụ khói, một sợi dây dài bán kính R có một điện tích tĩnh điện λ Culông trên một đơn vị chiều dài. Hãy tìm lực hút giữa sợi dây này và một hạt khói hình cầu không tích điện, có hằng số điện môi ε và bán kính a trước khi hạt đó chạm tới sợi dây (giả thiết $a < R$). Hãy thảo luận về nguồn gốc của lực này.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Vì $a \ll R$, nên ta có thể xem hạt khói nằm trong một điện trường đều. Với hệ đơn vị Gauss, điện trường bên trong một chất điện môi hình cầu nằm trong một điện trường ngoài đều là (xem bài tập **1062**)

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathbf{E}_{\text{ex}}\,.$$

Quả cầu nhỏ (do cảm ứng, điện tích có thể nằm ở hai phía) có thể coi như một lưỡng cực điện có mômen

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_{\text{ex}} = \frac{4\pi a^3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_{\text{ex}} .$$

Năng lượng của một hạt khói đã bị phân cực trong điện trường ngoài là

$$W = -\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{ex}} = -\frac{2\pi a^3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} E_{\text{ex}}^2 .$$

$\mathbf{E}_{\text{ex}}$ có hướng bán kính từ trục của sợi dây và được tính bởi định lý Gauss là

$$\mathbf{E}_{\text{ex}} = \frac{\lambda}{2\pi r}\mathbf{e}_r .$$

Do đó

$$W = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{2\pi(\varepsilon + 2)r^2} ,$$

và lực tác dụng lên hạt khói là

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{\pi(\varepsilon + 2)r^3}\mathbf{e}_r .$$

Ngay trước khi hạt đó chạm tới sợi dây, $r = R$ và lực đó là

$$\mathbf{F} = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{\pi(\varepsilon + 2)R^3}\mathbf{e}_r .$$

Dấu âm chỉ ra rằng lực này là lực hút. Lực này được sinh ra bởi sự không đều của điện trường theo bán kính vì nó được cho bởi $-\nabla W$. Sự phân cực của hạt khói trong điện trường ngoài làm cho nó có tác dụng giống như một lưỡng cực điện, trong một điện trường không đều nó sẽ chịu một lực điện.

5. CÁC ỨNG DỤNG KHÁC (1096–1108)

1096

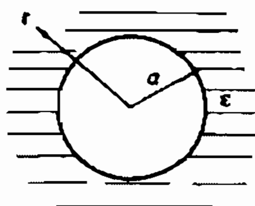
Một quả cầu bán kính a có một điện tích liên kết Q phân bố đồng đều trên khắp bề mặt của nó. Quả cầu này được bao quanh bằng một môi trường điện môi lỏng đồng đều với hằng số điện môi cố định ε như trên hình 1.52. Chất lỏng cũng chứa một mật độ điện tích tự do cho bởi công thức

$$\rho(\mathbf{r}) = -kV(\mathbf{r}),$$

trong đó k là hằng số và $V(\mathbf{r})$ là điện thế tại $\mathbf{r}$ so với vô cực.

(a) Hãy tính điện thế ở mọi nơi, lấy $V = 0$ tại $\mathbf{r} \to \infty$.

(b) Hãy tính áp suất trong chất điện môi như một hàm của $\mathbf{r}$.



Hình 1.52

Lời giải:

Điện thế thoả mãn phương trình Poison

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{kV(\mathbf{r})}{\varepsilon}, \quad r > a. \tag{1}$$

Do tính đối xứng cầu của bài tập này chúng ta có $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Phương trình (1) khi này trở thành

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \frac{k}{\varepsilon}V(r), \quad r > a.$$

Viết $V = u/r$, ta có

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{k}{\varepsilon}u. \tag{2}$$

Nghiệm của phương trình (2) có thể được phân loại theo giá trị của k

(1) Nếu $k > 0$, nghiệm sẽ là

$$u = A\exp\left(\pm\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r\right).$$

Do đó:

$$V = \frac{A}{r}\exp\left(\pm\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r\right).$$

Điều kiện $V = 0$ khi $r \to \infty$ chỉ ra rằng ở đây chỉ được phép lấy số mũ âm. Định lý Gauss đối với mặt cầu

$$-\oint_S \frac{\partial V}{\partial r} dS = Q\,,$$

suy ra

$$A = \frac{Qe^{\alpha a}}{4\pi(\alpha a + 1)}\,,$$

trong đó $\alpha = \sqrt{k/\varepsilon}$. Mặt khác, vì không có điện trường bên trong quả cầu, nên điện thế ở đó là một hằng số bằng với điện thế trên bề mặt. Do đó

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Qe^{\alpha(a-r)}}{4\pi(\alpha a+1)r}\,, & r > a\,, \\ \frac{Q}{4\pi a(\alpha a+1)}\,, & r \le a\,. \end{cases}$$

Sự ổn định của chất lỏng có nghĩa là thoả mãn biểu thức

$$p\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{T} = \text{hằng số}\,,$$

ở đó $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{T}$ là tenxơ ứng xuất Maxwell. Nếu chất lỏng phẳng lặng, hằng số này bằng 0 và ta có

$$p\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}\,.$$

Khi ε cố định, ta còn có

$$\mathbf{T} = \mathbf{DE} - \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\mathbf{I} = \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} (\Delta V)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, áp suất sẽ là

$$p = -\frac{\varepsilon}{2}(\nabla V)^2 = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{(1+\alpha r)^2}{r^2}V^2(r)\,.$$

(2) Nếu $k < 0$, với $\beta^2 = -k/\varepsilon$, nghiệm của phương trình (2) trở thành

$$V(r) = \frac{B}{r}e^{i\beta r}\,,$$

với phần thực

$$V(r) = \frac{B}{r}\cos(\beta r)\,.$$

Thay vào định lý Gauss

$$-\oint_S \frac{\partial V}{\partial r} dS = Q$$

ta được

$$B = \frac{Q}{4\pi(\beta a \sin \beta a + \cos \beta a)} .$$

Do đó điện thế là

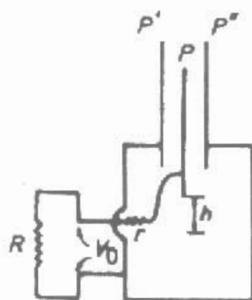
$$V = \begin{cases} \frac{Q \cos \beta a}{4\pi(\beta a \sin \beta a + \cos \beta a) r} , & r > a , \\ \frac{Q}{4\pi a(\beta a \tan \beta a + 1)} , & r \leq a , \end{cases}$$

và áp suất sẽ là

$$p = -\frac{\varepsilon}{2}(\nabla V)^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{(\beta r + \tan \beta r + 1)^2}{r^2} V^2(r) .$$

1097

Các tấm kim koại phẳng P, P', và P'' được để thẳng đứng (xem H. 1.53) và tấm P có khối lượng M chuyển động thẳng đứng giữa P' và P''. Ba tấm tạo thành một đôi tụ điện phẳng mắc song song. Cho điện tích trên tụ điện này là q. Bỏ qua tất cả các hiệu ứng mép. Giả thiết rằng tụ điện này đang phóng điện qua một điện trở tải R bên ngoài và bỏ qua điện trở nội có giá trị nhỏ. Giả thiết rằng sự phóng điện đủ chậm sao cho hệ ở trong trạng thái cân bằng tĩnh tại mọi thời điểm.



Hình 1.53

(a) Năng lượng hấp dẫn của hệ phụ thuộc vào độ cao h của tấm P như thế nào?

(b) Năng lượng tĩnh điện của hệ phụ thuộc vào độ cao h và vào điện tích q như thế nào?

(c) Hãy xác định h như một hàm của q.

(d) Hiệu điện thế đầu ra tăng, giảm hay giữ ổn định khi tụ điện này phóng điện?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Năng lượng hấp dẫn của hệ là

$$W_g = Mgh\,.$$

(b) Giả thiết rằng khoảng cách giữa các tấm P và P' và khoảng cách giữa P và P'' đều là d. Cũng giả thiết rằng cả ba tấm đều có chiều rộng a và chiều dài l, và khi $h = h_0$ thì đỉnh của tấm P ngang hàng với đỉnh của các tấm P' và P''. Hệ có thể coi như hai tụ điện mắc song song, mỗi tụ điện có điện tích $q/2$ và điện dung là

$$C = \frac{\varepsilon_0 a(l + h - h_0)}{d}$$

khi chiều cao của tấm P là h.

Khi đó năng lượng tĩnh điện được trữ trong hệ là

$$W_e = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^2 \frac{1}{C} = \frac{q^2 d}{4\varepsilon_0 a(l + h - h_0)}\,.$$

(c) Tổng năng lượng của hệ là

$$W = W_g + W_e = \frac{q^2 d}{4\varepsilon_0 a(l + h - h_0)} + Mgh\,.$$

Vì quá trình phóng điện chậm, nên đối với mỗi q, P sẽ điều chỉnh đến một vị trí cân bằng h, ở đó năng lượng của hệ là tối thiểu. Như vậy đối với mỗi q, $\frac{\partial W}{\partial h}\big|_q = 0$ sẽ cho

$$h = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0 a M g}} + h_0 - l\,.$$

Do đó ta thấy h thay đổi tuyến tính với q.

(d) Khi hệ đang phóng điện qua R, q giảm và h cũng giảm. Do đó hiệu điện thế đầu ra là

$$V_0 = \frac{q}{2} \Big/ \frac{\varepsilon_0 a(l + h - h_0)}{d} = \sqrt{\frac{Mgd}{\varepsilon_0 a}}$$

không thay đổi theo q, nghĩa là V_0 giữ không đổi khi tụ điện phóng điện.

1098

Một tụ điện bao gồm hai bản cực phẳng song song, đặt cách nhau một khoảng cách d, được nhúng thẳng đứng trong một chất lỏng điện môi có hằng số điện môi K và mật độ ρ. Hãy tính chiều cao mà chất lỏng đó dâng lên giữa hai bản cực,

(a) khi tụ điện được mắc với một ắcquy được giữ ở một hiệu điện thế không đổi V qua các bản cực,

(b) khi tụ điện mang một điện tích Q nhưng ngắt khỏi ắcquy. Hãy giải thích cơ chế vật lý của hiệu ứng và chỉ ra một cách rõ ràng nó được sử dụng trong tính toán của bạn như thế nào. (Có thể bỏ qua các hiệu ứng của sức căng bề mặt và kích thước hữu hạn của các bản cực).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Khi tụ điện được tích điện, nó có xu hướng hút chất lỏng điện môi. Khi lực hút tĩnh điện cân bằng với trọng lượng của chất lỏng điện môi dâng lên thì mức chất lỏng sẽ không dâng lên nữa. Như thấy trên hình 1.54, b là chiều rộng và a là chiều dài của các bản cực, x là chiều cao của phần tụ điện tiếp xúc với chất lỏng và h là chiều cao mà bề mặt chất lỏng dâng lên giữa các bản cực. Khi đó điện dung của tụ điện (trong đơn vị Gauss) sẽ là

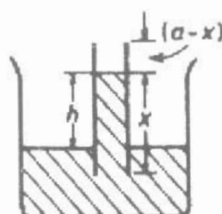
$$C = \frac{b}{4\pi d}\left[Kx + (a - x)\right] = \frac{b}{4\pi d}\left[(K - 1)x + a\right],$$

ở đó K là hằng số điện môi của chất lỏng.

(a) Nếu hiệu điện thế V không thay đổi, như đã thấy trong bài tập **1051**(a), chất điện môi sẽ chịu tác dụng một lực hút tĩnh điện hướng lên trên

$$F_e = \frac{(K - 1)bV^2}{8\pi a}.$$

Lực này được cân bằng bởi trọng lượng $mg = \rho ghbd$ trong trạng thái cân



Hình 1.54

bằng. Do đó chiều cao chất lỏng dâng lên là

$$h = \frac{V^2(K-1)}{8\pi\rho g d^2} .$$

(b) Nếu thay vì điện tích Q đã được giữ không đổi thì theo bài tập **1051**(b) lực hút tĩnh điện là

$$F = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{2\pi d Q^2(K-1)}{b[(K-1)x + a]^2} .$$

Tại trạng thái cân bằng, mức chất lỏng sẽ đạt đến độ cao

$$h = \frac{2\pi Q^2(K-1)}{\rho g b^2[(K-1)x + a]^2} .$$

1099

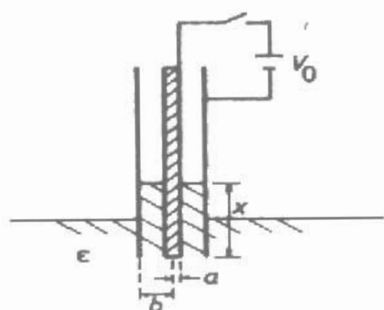
Một tụ điện trụ gồm một thanh dẫn điện dài bán kính a và một vỏ dẫn điện dài có bán kính trong là b. Một đầu của hệ được nhúng trong một chất lỏng có hằng số điện môi ε và mật độ ρ như trên hình 1.55. Một hiệu điện thế V_0 được đặt vào tụ điện. Giả thiết rằng tụ điện được cố định trong không gian và không có một dòng điện dẫn nào chạy qua chất lỏng. Hãy tính chiều cao cân bằng của cột chất lỏng trong ống.

(MIT)

Lời giải:

Gọi l là chiều dài của ống hình trụ và x là chiều cao của chất lỏng điện môi chứa trong hình trụ đó. Bỏ qua hiệu ứng rìa, điện dung của tụ điện là

$$C = \frac{2\pi[(\varepsilon - \varepsilon_0)x + \varepsilon_0 l]}{\ln(b/a)} .$$



Hình 1.55

Vì hiệu điện thế V_0 đặt vào tụ điện được giữ không đổi, nên theo bài tập **1051** lực tác dụng lên chất điện môi hướng lên trên và có độ lớn là

$$F = \frac{V_0^2}{2}\frac{dC}{dx} = \frac{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)V_0^2}{\ln(b/a)} .$$

Lực này cân bằng với trọng lượng của cột chất lỏng

$$\frac{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)V_0^2}{\ln(b/a)} = \rho g \cdot \pi(b^2 - a^2)h ,$$

Suy ra

$$h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)V_0^2}{\rho g(b^2 - a^2)\ln(b/a)} .$$

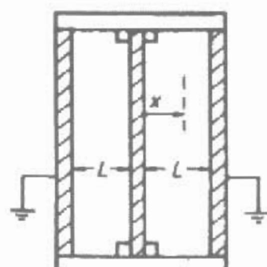
1100

Như thấy trên hình 1.56, tấm kim loại ở giữa chứa tổng điện tích Q có thể chuyển động được nhưng nó bịt kín không cho khí lọt qua khi nó trượt theo thành bình. Không khí ở hai phía của tấm kim loại có thể chuyển động đó ban đầu có cùng áp suất là p_0. Hãy tìm (các) giá trị của x, ở đó tấm kim loại có thể ở trong trạng thái cân bằng ổn định.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Ban đầu, vì điện thế ở hai phía của tấm ở giữa như nhau, nên ta có thể coi ba tấm đó tạo nên hai tụ điện song song với điện dung C_1 và C_2. Khi tấm giữa



Hình 1.56

được đặt tại vị trí x, Điện dung toàn phần của các tụ điện song song này là

$$C = C_1 + C_2 = \frac{A}{\varepsilon_0(L+x)} + \frac{A}{\varepsilon_0(L-x)} = \frac{2AL}{\varepsilon_0(L^2-x^2)}\,.$$

Do đó năng lượng tĩnh điện của hệ là

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 Q^2(L^2-x^2)}{4AL}\,.$$

Vì điện tích Q được phân bố trên khắp tấm giữa nên khi tấm đó chuyển dịch đã thực hiện một công chống lại lực tĩnh điện. Do đó lực tĩnh điện được cho bởi

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{Q^2\varepsilon_0 x}{2AL}\,.$$

Vì $F > 0$, lực này hướng theo chiều tăng x. Vì một vật dẫn điện cũng là vật dẫn nhiệt tốt nên sự chuyển động của tấm giữa được coi như đẳng nhiệt. Gọi áp suất do không khí sinh ra ở phía trái và phía phải của tấm giữa lần lượt là p_1 và p_2. Theo định luật Boyle, ta có

$$p_1 = \frac{p_0 L}{L+x}\,, \quad p_2 = \frac{p_0 L}{L-x}\,.$$

Khi tấm giữa ở vị trí cân bằng, lực tĩnh điện được cân bằng với lực sinh ra do sự chênh lệch áp suất, tức là

$$F_e = (p_2 - p_1)A\,,$$

hay

$$\frac{Q^2\varepsilon_0 x}{2AL} = \frac{2Ap_0 Lx}{L^2-x^2}\,.$$

Vị trí cân bằng của tấm giữa là

$$x = \pm L\left(1 - \frac{4p_0A^2}{\varepsilon_0 Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1101

Hãy quan sát một người ở gần bạn nhất. Thực chất anh ta (hoặc cô ta) không phải là dạng cầu nhưng giả thiết rằng anh ta (hoặc cô ta) là như vậy. Ấn định cho anh ta (hoặc cô ta) một bán kính hiệu dụng R và cần nhớ rằng anh ta (hoặc cô ta) là một vật dẫn điện khá tốt. Phòng ở trong trạng thái cân bằng tại nhiệt độ T và được che chắn điện từ. Hãy làm một ước lượng thô về giá trị căn quân bình phương (rms) của điện tích trên người đó.

(*Princeton*)

Lời giải:

Điện dung của một vật dẫn điện hình cầu bán kính R là $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Nếu quả cầu này chứa điện tích Q thì năng lượng điện của nó là $Q^2/2C$. Theo nguyên lý cổ điển về sự phân bố đều năng lượng

$$\frac{\overline{Q^2}}{2C} = \frac{1}{2}kT,$$

hay

$$\sqrt{\overline{Q^2}} = \sqrt{CkT},$$

trong đó k là hằng số Boltzman.

Lấy $R = 0,5$ m, $T = 300$ K, ta nhận được

$$\begin{aligned}\sqrt{\overline{Q^2}} &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0 RkT} \\ &= \sqrt{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 0,5 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300} \\ &= 4,8 \times 10^{-16}\ \text{C}.\end{aligned}$$

1102

Một quả cầu dẫn điện cô lập, bán kính a, có tâm đặt tại một khoảng cách z tính từ một tấm dẫn vô hạn (nối đất). Giả thiết rằng $z \gg a$, hãy tìm:

(a) sự đóng góp chủ yếu vào điện dung giữa quả cầu và mặt phẳng dẫn điện.

(b) bổ chính bậc nhất (không triệt tiêu) vào giá trị ở câu (a) khi điện dung được biểu diễn dưới dạng khai triển chuỗi luỹ thừa theo a/z.

(c) số hạng chính của lực tác dụng giữa quả cầu và mặt phẳng, khi quả cầu mang điện tích Q. Năng lượng để tách hoàn toàn quả cầu khỏi mặt phẳng dẫn điện đó là bao nhiêu? Năng lượng này như thế nào so với năng lượng để tách hoàn toàn hai quả cầu giống như vậy có điện tích $+Q$ và $-Q$, khoảng cách ban đầu giữa chúng là $2z$? Hãy giải thích sự khác nhau giữa hai giá trị đó.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Để tìm bổ chính số hạng chủ yếu, ta có thể coi khoảng cách giữa quả cầu dẫn điện và mặt phẳng dẫn là vô hạn. Khi đó điện dung của toàn hệ tương ứng với điện dung của một quả cầu dẫn điện cô lập có bán kính a, giá trị của nó là

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a\,.$$

(b) Để tìm bổ chính bậc nhất, ta xét điện trường được thiết lập bởi một điện tích Q đặt tại tâm của quả cầu và một điện tích ảnh $-Q$ của nó đặt tại khoảng cách z tính từ phía kia của mặt phẳng. Tại một điểm trên đường thẳng đi qua tâm quả cầu và vuông góc với mặt phẳng, độ lớn của điện trường này là

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(z-h)^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(z+h)^2}\,,$$

ở đây h là khoảng cách từ điểm này đến mặt phẳng. Điện thế của quả cầu khi đó là

$$\begin{aligned} V &= -\int_0^{z-a} E dh = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(z-h)}\bigg|_0^{z-a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(z+h)}\bigg|_0^{z-a} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[1 - \frac{a}{2z-a}\right] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{a}{2z}\right). \end{aligned}$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{Q}{V} \approx 4\pi\varepsilon_0 a\left(1 + \frac{a}{2z}\right)$$

và bổ chính bậc nhất là $2\pi\varepsilon_0 a^2/z$.

(c) Khi quả cầu mang điện tích Q, số hạng chính của lực giữa nó và mặt phẳng dẫn điện chỉ là lực hút giữa hai điện tích điểm Q và $-Q$ cách nhau một khoảng cách $2z$. Lực đó là

$$F = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 z^2}.$$

Năng lượng cần thiết để tách hoàn toàn quả cầu ra khỏi mặt phẳng là

$$W_1 = -\int_z^\infty F dr = \int_z^\infty \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 z}.$$

Mặt khác, năng lượng cần thiết để tách hoàn toàn hai điện tích Q và $-Q$ cách nhau một khoảng cách ban đầu $2z$ là

$$W_2 = -\int_{2z}^\infty F dr = \int_{2z}^\infty \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 z} = 2W_1.$$

Sự khác nhau về năng lượng cần thiết trong hai trường hợp này là do trong trường hợp đầu phải chuyển dịch Q từ z đến ∞ trong khi ở trường hợp thứ hai phải chuyển dịch Q từ z đến ∞ và $-Q$ từ $-z$ đến $-\infty$ với lực giống nhau, đều có giá trị bằng $-Q^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ áp dụng cho cả ba điện tích.

1103

Một lưỡng cực có chiều dài cố định $2R$, có khối lượng m ở mỗi đầu và có điện tích $+Q_2$ ở một đầu, điện tích $-Q_2$ ở đầu kia. Lưỡng cực này ở trên một quỹ đạo bao quanh một điện tích điểm cố định $+Q_1$ (các đầu của lưỡng cực bị buộc phải nằm trong mặt phẳng quỹ đạo). Hình 1.57 cho định nghĩa của các toạ độ r, θ, α. Hình 1.58 cho các khoảng cách nối từ $+Q_1$ đến các đầu của lưỡng cực.

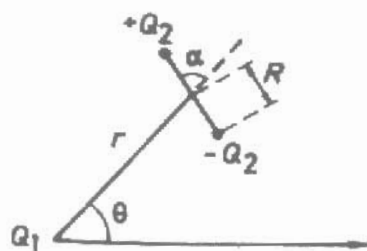
(a) Hãy sử dụng hình thức luận Lagrange để xác định các phương trình chuyển động trong hệ toạ độ (r, θ, α), lấy gần đúng $r \gg R$ khi tính điện thế.

(b) Lưỡng cực ở trên một quỹ dạo hình tròn quanh Q_1 với $\dot{r} \approx \ddot{r} \approx \ddot{\theta} \approx 0$ và $\alpha \ll 1$. Hãy tìm chu kì của các dao động nhỏ theo toạ độ α.

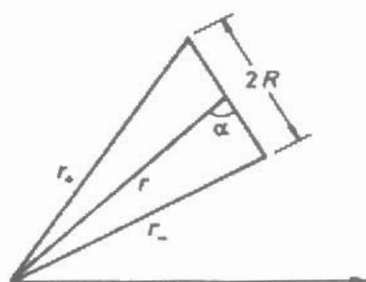
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Góc giữa lưỡng cực và trục cực là $(\theta + \alpha)$, như vậy tốc độ góc của lưỡng cực quanh khối tâm của nó là $(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$. Khi đó động năng của lưỡng cực là



Hình 1.57



Hình 1.58

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\cdot 2mR^2\cdot(\dot{\theta}+\dot{\alpha})^2 \\
&= m\dot{r}^2 + m(r^2+R^2)\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\alpha}^2 + 2mR^2\dot{\theta}\dot{\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

Hơn nữa, thế năng của lưỡng cực là

$$
V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_-}\,.
$$

Vì

$$
\begin{aligned}
r_\pm &= \sqrt{r^2 + R^2 \pm 2rR\cos\alpha} = r\sqrt{1 \pm 2\frac{R}{r}\cos\alpha + (\frac{R}{r})^2} \\
&\approx r\sqrt{1 \pm 2\frac{R}{r}\cos\alpha} \approx r\left(1 \pm \frac{1}{2}\cdot 2\frac{R}{r}\cos\alpha\right) = r \pm R\cos\alpha\,, \\
&\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = -\frac{2R\cos\alpha}{r^2 - R^2\cos^2\alpha} \approx -\frac{2R\cos\alpha}{r^2}\,,
\end{aligned}
$$

và thế năng là

$$
V = -\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2R\cos\alpha}{r^2}\,.
$$

Từ các biểu thức trên tìm được Lagrange $L = T - V$. Phương trình Lagrange

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0
$$

cho

$$
m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2R\cos\alpha}{r^2} = 0\,; \tag{1}
$$

Từ các phương trình Lagrange khác

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

$$(r^2 + R^2)\ddot{\theta} + R^2\ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0\,, \qquad (2)$$

và $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ cho

$$mR(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sin\alpha}{r^2} = 0\,. \qquad (3)$$

Các phương trình (1)-(3) là các phương trình chuyển động của lưỡng cực.

(b) Khi $\dot{r} \approx \ddot{r} \approx 0$, r là một hằng số. Cũng với $\ddot{\theta} = 0, \alpha \ll 1$ (nghĩa là $\sin\alpha \approx \alpha$), phương trình (3) trở thành

$$mR\ddot{\alpha} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\alpha}{r^2} = 0\,.$$

Điều này cho thấy rằng chuyển động theo α là dao động điều hoà với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{mRr^2}}\,.$$

Chu kì của các dao động nhỏ này là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q_1 Q_2} \cdot mRr^2}\,.$$

1104

Khí quyển của trái đất là một vật dẫn điện vì nó chứa các hạt tải tự do được sinh ra do sự ion hoá của các tia vũ trụ. Hãy cho rằng mật độ các điện tích tự do này không đổi theo không gian và thời gian và không phụ thuộc vào vị trí nằm ngang.

(a) Hãy xây dựng các phương trình và các điều kiện biên để tính toán điện trường khí quyển như một hàm của độ cao so với mặt biển nếu điện trường ở gần mặt đất là một hằng số theo thời gian và có phương thẳng đứng, nó không thay đổi theo chiều nằm ngang và có độ lớn là 100 vôn/mét. Bạn có thể giả thiết rằng mặt đất là hoàn toàn phẳng nếu muốn.

(b) Hãy ước tính sự phụ thuộc vào độ cao so với mặt biển của độ dẫn.

(c) Giải các phương trình của phần (a).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đây là bài tập về trường dừng trong một vật dẫn. Phương trình liên tục $\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ và định luật Ohm $j = \sigma E$ cho phương trình cơ bản sau

$$\frac{dj}{dz} = 0\,, \tag{1}$$

lấy trục z theo chiều thẳng đứng.

Điều kiện biên được cho là

$$E|_{z=0} = 100 \text{ V/m}\,.$$

(b) Vì tần số va chạm giữa một điện tích tự do và những phân tử khí quyển tỉ lệ với mật độ của các phân tử khí quyển, trong khi độ dẫn tỉ lệ nghịch với tần số va chạm, nên độ dẫn sẽ tỉ lệ nghịch với mật độ của các phân tử khí quyển. Đối với một khí quyển đẳng nhiệt, mật độ của các phân tử khí quyển là

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}\,,$$

ở đây m là khối lượng trung bình của một phân tử, g là gia tốc trọng trường, k là hằng số Bolztman và T là nhiệt độ tuyệt đối. Ngoài ra, độ dẫn cũng tỉ lệ với mật độ của các điện tích tự do. Vì mật độ này được giả thiết là không phụ thuộc vào chiều cao so với mặt biển nên sự phụ thuộc chiều cao so với mặt biển của độ dẫn có thể được cho dưới dạng:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{mgz}{kT}} . \qquad (2)$$

(c) Phương trình (1) cho

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{E}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz} .$$

Sử dụng phương trình (2) và tích phân ta có

$$E = E_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} ,$$

trong đó $E_0 = 100$ V/m.

1105

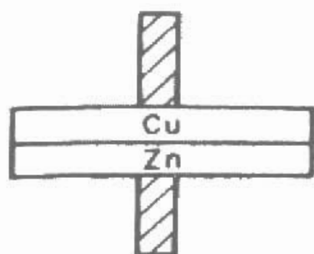
Hai tấm kim loại phẳng, mỗi tấm có đường kính 5 cm, một tấm bằng đồng, một tấm bằng kẽm (và cả hai được lắp cán cách điện), được đặt tiếp xúc với nhau (xem H. 1.59) và sau đó tách ra xa nhau thật nhanh.

(a) Hãy ước tính điện tích cực đại có thể chờ đợi tìm thấy trên từng tấm sau khi tách ra xa nhau ($\gg 5$ cm).

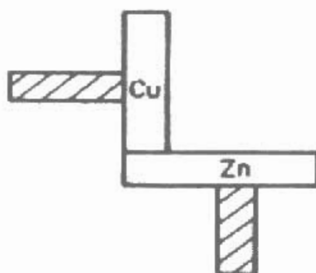
(b) Ông Volta trong thí nghiệm loại này (năm 1795) đã quan sát được điện tích có bậc độ lớn là 10^{-9} C. Hãy so sánh kết quả này với kết quả tính toán của bạn trong phần (a), giải thích sự khác nhau.

(c) Có thể mong đợi điện tích bằng bao nhiêu nếu các tấm kim loại đó, trước khi tách ra, được sắp xếp như trên hình 1.60.

(Columbia)



Hình 1.59



Hình 1.60

Lời giải:

(a) Khi hai tấm kim loại đang trong tiếp xúc, chúng có thể được coi như một tụ điện phẳng. Gọi δ là khoảng cách được tách ra giữa chúng và V là hiệu điện thế, độ lớn của điện tích trên từng tấm là

$$Q = CV = \frac{\pi\varepsilon_0(\frac{d}{2})^2 V}{\delta}.$$

Vì $d = 0,05$ m, lấy điện thế tiếp xúc $V \sim 10^{-3}$ V và $\delta \sim 10^{-10}$ m, ta nhận được

$$Q \approx 1,7 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

(b) Các giá trị ước lượng ở trên lớn hơn so với kết quả thí nghiệm của Volta ($\approx 10^{-9}$ C). Điều này chắc chắn do những nguyên nhân sau đây. Đầu tiên, do độ gồ ghề của bề mặt các tấm kim loại, sự cách nhau trung bình của chúng phải lớn hơn 10^{-10}m. Thứ hai, trong quá trình tách ra các điện tích có thể tích tụ trên một vài đỉnh của tấm (cũng vì có độ gồ ghề), do vậy một vài điện tích có thể bị mất đi giữa hai tấm kim loại.

(c) Theo hình 1.60, điện tích tiếp xúc nhỏ hơn so với điện tích tiếp xúc trong trường hợp (a), do đó các điện tích tương ứng sau khi tách ra sẽ giảm đi nhiều.

1106

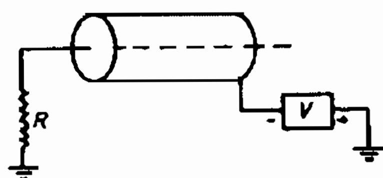
Một buồng ion hoá được chế tạo gồm một ống hình trụ bán kính a và chiều dài L với một sợi dây bán kính b dọc theo trục của hình trụ. Ống hình trụ được nối với một hiệu điện thế âm cao $-V_0$ và sợi dây được nối đất qua một điện trở R như thấy trên hình 1.61. Buồng ion hoá được chứa đầy khí argon tại áp suất không khí. Hãy mô tả (một cách định lượng) hiệu điện thế ΔV qua điện trở R như một hàm của thời gian đối với trường hợp, trong đó một hạt ion hoá di chuyển trong ống song song với trục tại khoảng cách $r = a/2$ tính từ trục giữa và tạo ra tổng số $N = 10^5$ cặp êlectron - ion.

Cho: $a = 1$ cm, $b = 0,1$ mm, $L = 50$ cm, $V_0 = 1000$ V, $R = 10^5\Omega$,

Độ linh động của ion argon $\mu_+ = 1,3 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{V}}$.

Độ linh động của electron $\mu_- = 6 \times 10^3 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{V}}$.

(Gợi ý: Để làm gần đúng một cách hợp lý, bạn phải tính hằng số thời gian RC của hệ này)



Hình 1.61

Hiệu điện thế thế (1000 V) là không đủ để sinh ra sự nhân ion ở gần sợi dây (nghĩa là đây không phải là một máy đếm tỉ lệ). Lưu ý rằng hình dạng chi tiết của sườn xung lên là quan trọng

(*Princeton*)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, φ, z) với trục z dọc theo trục của ống hình trụ. Điện trường tại điểm (r, φ, z) thoả mãn biểu thức $\mathbf{E} \propto \frac{1}{r}\mathbf{e}_r$ theo định lý Gauss. Từ

$$-\int_b^a E(r)dr = -V_0$$

ta nhận được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V_0}{r\ln(\frac{a}{b})}\mathbf{e}_r\,.$$

Nếu Q_0 là điện tích trên sợi dây, định lý Gauss cho

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 Lr}\mathbf{e}_r\,.$$

Theo đó điện dung của buồng là

$$\begin{aligned}C &= Q_0/V_0 = 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(a/b)\\ &= 2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 0,5 \Big/ \ln\left(\frac{1}{0,01}\right)\\ &= 6 \times 10^{-12}\ \mathrm{F}\,.\end{aligned}$$

Vì vậy hằng số thời gian của mạch điện là

$$RC = 10^5 \times 6 \times 10^{-12} = 6 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}\,.$$

Độ linh động của một hạt tích điện được định nghĩa như sau $\mu = \frac{1}{E}\frac{dr}{dt}$, hoặc $dt = \frac{dr}{\mu E}$. Do đó thời gian cần để đẩy hạt từ r_1 tới r_2 là

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu_0 \frac{V_0}{r\ln(a/b)}} = \frac{\ln(a/b)}{2\mu V_0}(r_2^2 - r_1^2)\,.$$

Đối với một êlectron, để đẩy từ $r = a/2$ đến sợi dây, ta cần có lượng thời gian

$$\begin{aligned}\Delta t_- &\approx \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\right] \approx \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0}\cdot\frac{a^2}{4} \\ &= \frac{\ln 100}{2\times 6\times 10^3\times 10^{-4}\times 1000}\times\frac{10^{-4}}{4} = 9,6\times 10^{-8}\ \text{s}\end{aligned}$$

và đối với một ion dương để đạt đến thành của ống hình trụ, ta cần một thời gian

$$\begin{aligned}\Delta t_+ &= \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_+ V_0}\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{\ln\frac{a}{b}}{2\mu_+ V_0}\cdot\frac{3a^2}{4} \\ &= \frac{\ln 100}{2\times 1,3\times 10^{-4}\times 1000}\times\frac{3\times 10^{-4}}{4} = 1,3\times 10^{-3}\ \text{s}\,.\end{aligned}$$

Từ kết quả trên dẫn đến $\Delta t_- \ll RC \ll \Delta t_+$. Khi các êlectron đẩy từ $r = a/2$ đến sợi dây anode tại $r = b$ thì các ion dương về cơ bản ở trạng thái dừng tại $r = a/2$ và sự phóng điện qua điện trở R cũng được bỏ qua. Hiệu điện thế đầu ra ΔV của sợi dây anode tại $t \le \Delta t_-$ (lấy $t = 0$ ngay khi các hạt tải gây ion hoá rơi vào buồng) có thể dẫn ra được từ nguyên lý bảo toàn năng lượng. Khi một điện tích q ở trong buồng dịch chuyển một đoạn thì công thực hiện bởi điện trường là $q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ tương ứng với sự giảm của năng lượng lưu trữ trong điện dung $d(\frac{CV^2}{2})$. Do đó $CVdV = -q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -qEdr$. Bởi vì $\Delta V \ll V_0, V \approx V_0$ nên ta có thể viết

$$CV_0 dV = -qEdr\,.$$

Lấy tích phân ta được

$$\begin{aligned}CV_0\Delta V &= -q\int_{a/2}^{r} Edr = -q\int_{a/2}^{r}\frac{V_0}{r\ln(\frac{a}{b})}dr \\ &= -q\frac{V_0}{\ln(\frac{a}{b})}\ln\left(\frac{2r}{a}\right).\end{aligned}$$

Lưu ý rằng

$$\Delta t_- \approx \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\right],$$

ta có

$$t = \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - r^2\right],$$

hay

$$r = \frac{a}{2}\left\{1 - \frac{t}{\Delta t_-}\left(1 - \frac{2b}{a}\right)^2\right\}^{1/2},$$

và vì $q = -Ne$,

$$\Delta V = \frac{Ne}{C}\ln\left\{1 - \frac{[1-(\frac{2b}{a})^2]t}{\Delta t_-}\right\}^{1/2} \Big/ \ln\left(\frac{a}{b}\right), \quad 0 \le t \le \Delta t_- .$$

tại $t = \Delta t_-$,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{Ne}{C}\ln\left(\frac{2b}{a}\right)\Big/\ln\left(\frac{a}{b}\right)\\ &= -\frac{10^5 \times 1,6 \times 10^{-19}}{6 \times 10^{-12}} \times \frac{\ln 50}{\ln 100}\\ &= -2,3 \times 10^{-3}\ \text{V}.\end{aligned}$$

Khi đó, điện áp này được phóng điện qua mạch RC. Do đó sự thay đổi của ΔV theo thời gian như sau:

$$\Delta V = 5,86 \times 10^{-3}\ln\left[1 - \frac{(1-\frac{1}{50^2})^{1/2}t}{9,6\times 10^{-8}}\right]\ \text{V}, \quad \text{với} \quad 0 \le t \le 9,6 \times 10^{-8}\ \text{s};$$

$$\Delta V = -2,3 \times 10^{-3}\exp\left(-\frac{t}{6\times 10^{-7}}\right)\ \text{V}, \quad \text{với} \quad t > 9,6 \times 10^{-8}\ \text{s}.$$

Điều này có nghĩa là hiệu điện thế qua hai đầu của điện trở R giảm tới $-2,3$ mV trong thời gian Δt_- và sau đó tăng đến 0 với hằng số thời gian RC. Nhận xét cuối cùng là khi các ion được đẩy đi một cách từ từ và các điện tích cảm ứng trên hai điện cực của buồng ion hoá được phóng điện nhanh qua mạch RC thì ảnh hưởng của chúng lên dạng sóng của ΔV có thể hoàn toàn bỏ qua.

1107

Một chùm êlectron mạnh năng lượng cao có thể xuyên vuông góc qua một lá kim loại được nối đất. Chùm tia này bắt đầu phóng tại $t = 0$ với cường độ dòng điện $I = 3 \times 10^6$ amp và diện tích tiết diện của chùm là $A = 1000$ cm^2. Sau khi chùm tia đã chạy qua trong 10^{-8} giây, hãy tính điện trường do điện tích không gian của chùm sinh ra tại điểm P trên mặt sau của lá kim loại và ở gần trục của chùm tia.

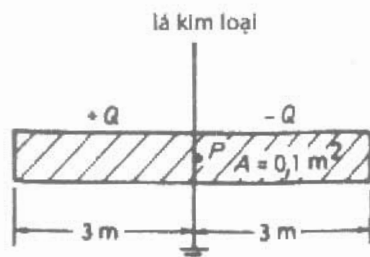
(*Wisconsin*)

Lời giải:

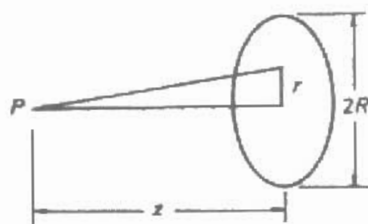
Tại $t = 10^{-8}$ s, chùm tia tạo thành một hình trụ điện tích ở phía phải của lá kim loại với diện tích điện tích tiết diện là $A = 1000$ cm^2 như thấy trên hình 1.62. Chiều dài h của hình trụ là $ct = 3 \times 10^8 \times 10^{-8} = 3$ m, khi giả thiết rằng các êlectron năng lượng đủ cao để cho tốc độ của chúng gần với tốc độ ánh sáng. Ta có thể coi điện tích toàn phần

$$-Q = -It = -3 \times 10^6 \times 10^{-8} = -3 \times 10^{-2} \text{ C}$$

phân bố đồng đều trong hình trụ này. Vì điện tích ở phía trái của lá kim loại không đóng góp vào điện trường tại điểm P (hiệu ứng che chắn) nên sự tác dụng của lá kim loại nối đất có thể được thay bằng một hình trụ điện tích ảnh. Hình trụ ảnh này và hình trụ thật đối xứng với nhau qua lá kim loại và điện tích của chúng trái dấu nhau (xem hình 1.62).



Hình 1.62



Hình 1.63

Trước hết, ta hãy tính điện trường tại điểm P trên trục của một đĩa tích điện đều có mật độ điện tích mặt σ như trên hình 1.63. Điện thế tại P là

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma\cdot 2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma\pi dr^2}{\sqrt{z^2+r^2}}$$
$$= \frac{\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\sqrt{z^2+r^2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2}-z\right],$$

và cường độ điện trường tại P là

$$E_P = -\frac{\partial\varphi_P}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-1\right).$$

Bây giờ trở lại hình 1.62. Điện trường tại điểm P tạo ra bởi hình trụ điện tích bên phải là

$$E_P = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^h \left(\frac{Q}{h\pi R^2}dz\right)\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-1\right)$$
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hR^2}\int_0^h\left(\frac{\frac{1}{2}dz^2}{\sqrt{z^2+R^2}}-dz\right)$$
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hR^2}\left[\sqrt{z^2+R^2}\Big|_0^h - h\right]$$
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hR^2}\left[\sqrt{h^2+R^2}-R-h\right].$$

Do đó điện trường toàn phần tại P là

$$E_P = \frac{-Q}{\pi\varepsilon_0 hR^2}\left[R+h-\sqrt{R^2+h^2}\right]$$
$$= \frac{-3\times 10^{-2}}{\pi\times 8,85\times 10^{-12}\times 3\times\frac{0,1}{\pi}}\times\left[3+\sqrt{\frac{0,1}{\pi}}-\sqrt{3^2+\frac{0,1}{\pi}}\right]$$
$$= -1,42\times 10^9\ \text{V/m}.$$

Dấu âm biểu thị rằng cường độ điện trường hướng về bên phải.

1108

Hình 1.64 trình bày một phần cấu trúc tuần hoàn kiểu răng lược gồm các điện cực kim loại xen kẽ với các vùng trống trong một máy gia tốc tĩnh điện.

Điện thế trên một điện cực bất kì cao hơn điện thế ở điện cực trước nó là V_0. Cấu trúc này là cấu trúc hai chiều trong đó các điện cực có kích thước vô hạn theo hướng z. Đối tượng của bài tập này là tìm điện trường trong vùng $|y| < W$.

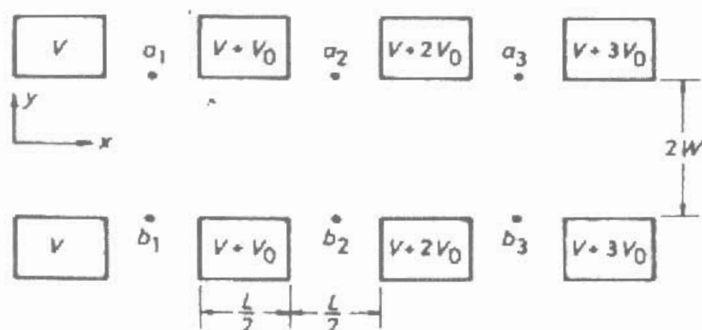
(a) Để đơn giản về mặt toán học, ta giả thiết rằng **E** dọc theo những đường thẳng, ví dụ như đường thẳng giữa các điểm a và b, là không đổi và không có thành phần y. Điều này ngụ ý gì về điện thế tĩnh điện giữa a và b? Người ta phải làm như thế nào để đạt được điều kiện biên như vậy trong thực tiễn?

(b) Như một sự hướng dẫn cho các tính toán tiếp theo, hãy sử dụng các lập luận vật lý để vẽ phác các đường sức điện trường (có cả hướng) trong cấu trúc này.

(c) Hãy tìm biểu thức của điện thế tĩnh điện $\varphi(x, y)$ trong vùng $|y| < W$ như là một tổng vô hạn các nghiệm riêng của phương trình Laplace.

(d) Hãy tìm điện trường $\mathbf{E}(x, y)$.

(*MIT*)



Hình 1.64

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ như trên hình 1.64. Điện trường giữa các điểm a_i và b_i là không đổi và không có thành phần y. Điều này chỉ ra rằng các đường sức điện trường giữa a_i và b_i là song song với trục x. Về phương diện toán học,

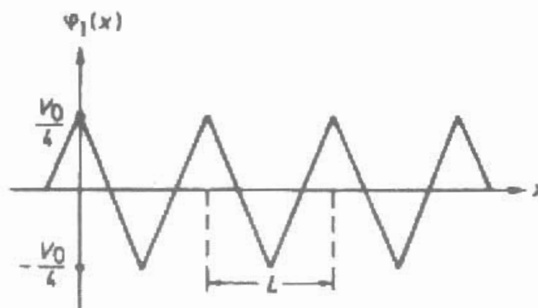
điện thế có thể biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}\varphi(x, +W) &= \begin{cases} V + nV_0, & x \in \left[\frac{2n}{2}L, \frac{2n+1}{2}L\right], \\ V - nV_0, & x \in \left[\frac{2n-1}{2}L, \frac{2n}{2}L\right], \end{cases} \\ &= \frac{V_0 x}{L} - \frac{V_0}{4} + V \\ &+ \begin{cases} nV_0 + \frac{V_0}{4} - \frac{V_0 x}{L}, & x \in \left[\frac{2nL}{2}, \frac{2n+1}{2}L\right] \\ -nV_0 + \frac{V_0}{4} + \frac{V_0 x}{L}, & x \in \left[-\frac{2n-1}{2}L, \frac{2nL}{2}\right] \end{cases} (n = 0, \pm 1, \dots) \\ &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x).\end{aligned}$$

Do đó $\varphi_2(x)$ biểu thị hình sóng răng cưa như trên hình 1.65. Chuỗi Fourier theo các hàm cosin của nó có chu kì L là

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, \pm W) &= \frac{2}{L}\sum_{m-1}^{\infty} \cos\frac{2m\pi x}{L}\int_0^L \varphi_2(x, \pm W)\cos\frac{2m\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2V_0}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\frac{2(2m+1)\pi x}{L}.\end{aligned}$$

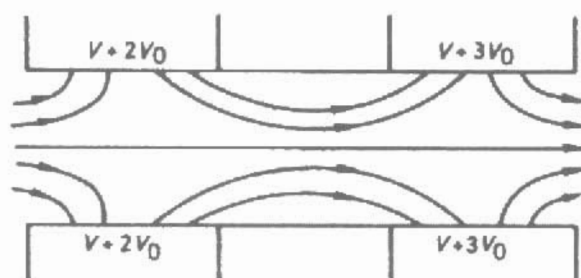
Để thực hiện được những điều này trong một máy gia tốc tĩnh điện, khoảng cách của các điện cực theo hướng y phải lớn hơn rất nhiều so với L.



Hình 1.65

(b) Các đường sức điện trường trong máy gia tốc được chỉ ra trên hình 1.66 (ở đây chúng tôi chỉ vẽ các đường sức giữa hai điện cực lân cận; bức tranh tổng thể sẽ được lặp lại giống hệt như vậy).

(c) Điện thế trong vùng $|y| < W$ thoả mãn phương trình và các điều kiện



Hình 1.66

biên sau

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x, y) = 0 \,, \\ \phi(x, \pm W) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \,. \end{cases}$$

Định nghĩa $\psi(x, y) = \phi(x, y) + V - \frac{V_0}{4} + \frac{V_0 x}{L}$, nó thoả mãn phương trình và điều kiện biên sau

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) = 0 \,, \\ \psi(x, \pm W) = \varphi_2(x) \,. \end{cases}$$

Vì $\varphi_2(x)$ trong điều kiện biên là một hàm tuần hoàn chẵn với chu kì L (xem hình 1.65), nên cũng phải là hàm tuần hoàn chẵn của x. Do đó, ta có thể viết

$$\psi(x, y) = \psi_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\psi_m(y)$$

và thay nó vào phương trình của $\psi(x, y)$. Ta ngay lập tức nhận được

$$\psi_m(y) = a_m \cosh\frac{2m\pi y}{L} + b_m \sinh\frac{2m\pi y}{L} \,.$$

Cũng như vậy, thay $\psi(x, y)$ vào điều kiện biên và so sánh các hệ số, ta nhận được

$$\psi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi y\right]}{\cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi W\right]} \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi x\right] \,.$$

Do đó

$$\phi(x,y) = V - \frac{V_0}{L} + \frac{V_0 x}{L} + \frac{2V_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\cosh[\frac{2(2n+1)}{L}\pi W]} \cdot \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi y\right]\cos\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi x\right].$$

(d) Sử dụng $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, ta nhận được các thành phần điện trường như sau

$$\begin{cases} E_x = -\frac{V_0}{L} + \frac{4V_0}{\pi L}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cosh[\frac{2(2n+1)}{L}\pi y]\sin[\frac{2(2n+1)}{L}\pi x]}{(2n+1)\cosh[\frac{2(2n+1)}{L}\pi W]}, \\ E_y = -\frac{4V_0}{\pi L}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sinh[\frac{2(2n+1)}{L}\pi y]\cos[\frac{2(2n+1)}{L}\pi x]}{(2n+1)\cosh[\frac{2(2n+1)}{L}\pi W]}. \end{cases}$$

PHẦN II

TỪ TRƯỜNG TĨNH
VÀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ CHUẨN DỪNG

1. TỪ TRƯỜNG CỦA CÁC DÒNG ĐIỆN (2001–2038)

2001

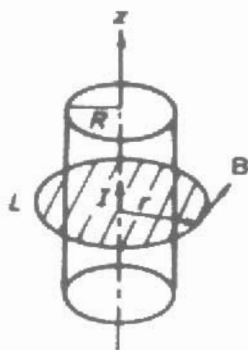
Một dây dẫn hình trụ có độ từ thẩm μ mang một dòng điện không đổi I. Nếu bán kính của dây dẫn là R, hãy tìm **B** và **H** bên trong và bên ngoài dây dẫn.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ với trục z dọc theo trục của dây dẫn và hướng dương dọc theo chiều dòng điện như chỉ rõ trên hình 2.1. Vì sự phân bố đồng đều của dòng điện, nên mật độ dòng điện là

$$\mathbf{j} = \frac{I}{\pi R^2}\mathbf{e}_z .$$



Hình 2.1

Xét một điểm ở khoảng cách r tính từ trục của dây dẫn. Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I ,$$

với L là vòng tròn bán kính r có tâm nằm trên trục z, đối với $r > R$, ta có

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta ,$$

hay

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$$

vì đối xứng nên $\mathbf{H}(r)$ và $\mathbf{B}(r)$ không phụ thuộc θ. Đối với $r < R$, ta có

$$I(r) = \pi r^2 j = \frac{Ir^2}{R^2}$$

và định luật Ampe cho các kết quả sau

$$\mathbf{H}(r) = \frac{Ir}{2\pi R^2}\mathbf{e}_\theta\,, \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}\mathbf{e}_\theta\,.$$

2002

Một vật dẫn hình trụ dài không nhiễm từ có bán kính trong là a và bán kính ngoài là b mang một dòng điện I. Mật độ dòng điện trong vật dẫn là đồng đều. Hãy tìm từ trường do dòng điện này sinh ra như một hàm của bán kính, trong các trường hợp sau:

(a) bên trong không gian rỗng ($r < a$);

(b) bên trong thành vật dẫn ($a < r < b$);

(c) bên ngoài vật dẫn ($r > b$).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ trụ như trong bài tập 2001. Mật độ dòng điện trong vật dẫn là

$$j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}\,.$$

Dòng điện chạy qua một tiết diện bao quanh bởi một vòng tròn bán kính r với $a < r < b$ là

$$I(r) = \pi(r^2 - a^2)j = \frac{I(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}\,.$$

Do đối xứng, định luật Ampe về lưu số cho các kết quả sau

(a) $\mathbf{B} = 0, \ (r < a)$.

(b) $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\mathbf{e}_\theta\,, \ (a < r < b)$.

(c) $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$, $(r > b)$.

2003

Hướng của từ trường do một dây dẫn thẳng, dài có mang một dòng điện sinh ra là

(a) cùng hướng với dòng điện;

(b) theo hướng bán kính;

(c) dọc theo các vòng tròn bao quanh dòng điện.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

2004

Từ trường do một sợi cáp dài mang một dòng điện 30.000 A sinh ra tại một khoảng cách 1 m là bao nhiêu? Chọn trong các giá trị sau đây:

(a) 3×10^{-3} Tesla, (b) 6×10^{-3} Tesla, (c) 0,6 Tesla.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2005

Một yếu tố dòng điện idl được đặt tại gốc toạ độ. Dòng điện có hướng theo trục z. Thành phần x của từ trường tại một điểm $P(x, y, z)$ là bao nhiêu trong các trường hợp sau?

(a) 0, (b) $-iydl/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, (c) $ixdl/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2006

Xét 3 dây dẫn thẳng, dài vô hạn với bán kính bằng 0, đặt cách nhau những khoảng cách bằng nhau, mỗi sợi dây mang một dòng điện I có cùng hướng.

(a) Hãy xác định vị trí của hai điểm có từ trường bằng 0.

(b) Vẽ phác các đường sức từ trường.

(c) Nếu dây dẫn ở giữa được dịch lên phía trên một khoảng cách x rất nhỏ ($x \ll d$) trong khi 2 dây dẫn kia được giữ cố định. Hãy mô tả một cách định tính sự chuyển động tiếp theo của dây dẫn ở giữa.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Giả sử ba dây dẫn cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó các điểm có từ trường bằng 0 cũng phải nằm trong cùng mặt phẳng đó. Gọi khoảng cách của một điểm như vậy đến dây dẫn giữa là x. Khi đó khoảng cách của điểm này tới hai dây dẫn kia là $d \pm x$. Áp dụng định luật Ampe về lưu số ta nhận được vị trí cũ một điểm có từ trường bằng 0 từ phương trình

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)}\,.$$

Phương trình trên có hai nghiệm

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}d\,,$$

tương ứng với hai điểm nằm trong khoảng giữa dây dẫn giữa và một trong hai dây dẫn bên cạnh, cả hai điểm đều cách dây dẫn giữa một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}d$.

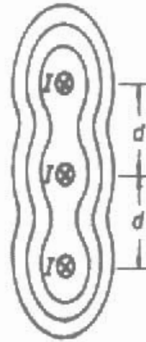
(b) Các đường sức từ trường được biểu diễn trên hình 2.2(a).

(c) Khi dây dẫn giữa được dịch đi một khoảng cách x nhỏ trong cùng mặt phẳng, lực tổng hợp tác dụng lên một đơn vị chiều dài của dây dẫn giữa là

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d+x)} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d-x)}\,.$$

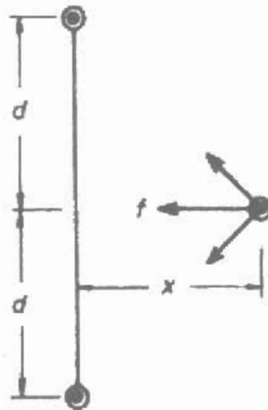
Vì $x \ll d$, lực này được tính gần đúng là

$$f \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2}x\,.$$



Hình 2.2 (a)

Như vậy, lực này tỉ lệ thuận nhưng ngược hướng với sự dịch chuyển. Do đó, dây dẫn giữa sẽ dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi m}{\mu_0}}\frac{d}{I}$, trong đó m là khối lượng trên một đơn vị chiều dài của dây dẫn giữa.



Hình 2.2 (b)

Tuy nhiên, đây mới chỉ là một trong các mode dao động chuẩn tắc của dây dẫn giữa. Một mode dao động khác được thấy khi dây dẫn này dịch chuyển một khoảng cách nhỏ x ra ngoài và vuông góc với mặt phẳng như trên hình 2.2(b). Lực tổng hợp tác dụng lên dây dẫn này có hướng $-x$, đó là

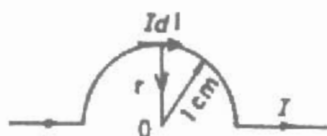
$$f = -2 \cdot \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{d^2+x^2}}\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2}x\,.$$

Chuyển động này cũng là một dao động điều hoà với cùng một chu kì như mode dao động tính.

2007

Trên hình 2.3 một dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện $I = 1$A. Nó có được uốn sao cho có một nửa đường tròn bán kính 1 cm bao quanh gốc toạ độ. Hãy tính từ trường tại gốc toạ độ đó.

(UC, Berkeley)



Hình 2.3

Lời giải:

Các phần thẳng của dây dẫn không đóng góp vào từ trường tại gốc toạ độ O, bởi vì đối với chúng $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = 0$. Ta chỉ cần xét sự đóng góp của phần nửa vòng tròn. Từ trường tại O do phân tử dòng điện $I d\mathbf{l}$ sinh ra là

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \,.$$

Vì trên nửa vòng tròn này $I d\mathbf{l}$ và $\mathbf{r}$ vuông góc với nhau nên $d\mathbf{B}$ luôn luôn hướng vào trong trang giấy. Khi đó từ trường toàn phần do nửa vòng tròn sinh ra tại O là

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4r} \,.$$

Với $I = 1$ A, $r = 10^{-2}$ m, cảm ứng từ tại O là

$$B = 3,14 \times 10^{-5} \text{ T} \,,$$

nó có hướng vuông góc và đi vào phía trong trang sách.

2008

Một xôlênôit bán vô hạn, có bán kính R và n vòng dây trên một đơn vị dài mang một dòng điện I. Hãy tìm biểu thức của thành phần theo bán kính của từ trường $B_r(z_0)$ ở gần trục tại đầu của xôlênôit, ở đó $r \ll R$ và $z = 0$.

(*MIT*)

Lời giải:

Trước hết, ta tìm biểu thức của cảm ứng từ tại một điểm trên trục của xôlênôit. Như ta thấy trên hình 2.4, từ trường tại điểm z_0 trên trục được cho bởi công thức

$$B(z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi R^2 nIdz}{[R^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} \,.$$

Đặt $z - z_0 = R\tan\theta$. Khi đó $dz = R\sec^2\theta d\theta$ và ta nhận được

$$B(z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi R^2 nI\cdot R\sec^2\theta d\theta}{R^3\sec^3\theta}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi nI\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi nI\sin\theta\Big|_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \,.$$

Vì

$$R\tan\theta_0 = z_0 \,,$$

ta có

$$\sin^2\theta_0 = \frac{1}{\cot^2\theta_0 + 1} = \frac{1}{(\frac{R}{z_0})^2+1} = \frac{z_0^2}{R^2+z_0^2} \,,$$

hay

$$\sin\theta_0 = \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} \,.$$

do đó

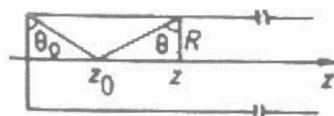
$$B(z_0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI\left(1 + \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right) .$$

Tiếp theo, chúng ta hình dung một hình trụ ngắn dọc theo trục z có chiều dày dz_0 và bán kính r như trên hình 2.5. Áp dụng phương trình Maxwel

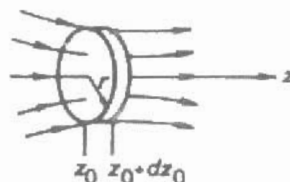
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

đối với bề mặt S của nó, ta nhận được

$$[B_z(z_0+dz) - B_z(z_0)]\cdot \pi r^2 = B_r(z_0) 2\pi r dz_0 \,.$$



Hình 2.4



Hình 2.5

Đối với $r \ll R$, chúng ta có thể lấy $B_z(z_0) = B(z_0)$. Khi đó phương trình trên cho

$$\frac{dB(z_0)}{dz_0}\pi r^2 = B_r(z_0)\cdot 2\pi r\,,$$

hay

$$B_r(z_0) = \frac{r}{2}\frac{dB(z_0)}{dz_0} = \frac{\mu_0 n I r R^2}{4(R^2+z_0^2)^{3/2}}\,.$$

Tại đầu của xôlênôit, tức $z_0 = 0$, thành phần theo bán kính của từ trường là

$$B_r(0) = \frac{\mu_0 n I r}{4R}\,.$$

2009

Một xôlênôit lõi không khí rất dài, bán kính b có n vòng/mét và mang một dòng điện $i = i_0 \sin\omega t$.

(a) Hãy viết biểu thức của từ trường **B** bên trong xôlênôit như một hàm của thời gian.

(b) Hãy viết biểu thức của điện trường **E** bên trong và bên ngoài xôlênôit như một hàm của thời gian (giả thiết rằng **B**=0 bên ngoài xôlênôit). Hãy vẽ phác dạng các đường sức của điện trường và vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của độ lớn của **E** vào khoảng cách tính từ trục của xôlênôit tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Bên trong xôlênôit, từ trường **B** là đều và có hướng theo trục, nghĩa là

$$\mathbf{B}(t) = \mu_0 n i(t)\mathbf{e}_z = \mu_0 n i_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_z\,.$$

(b) Sử dụng phương trình Maxwell $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$ và tính đối xứng trục, ta có thể tìm được điện trường tại các điểm cách trục một khoảng r bên trong và bên ngoài xôlênôit. Đối với $r < b$, ta có $E\cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \cdot \mu_0 n i_0 \omega \cos\omega t$, hay

$$E(t) = -\frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \cos\omega t\,.$$

Đối với $r > b$, ta có $E\cdot 2\pi r = -\pi b^2 \cdot \mu_0 n i_0 \omega \cos\omega t$, hay

$$E(t) = -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \cos\omega t\,.$$

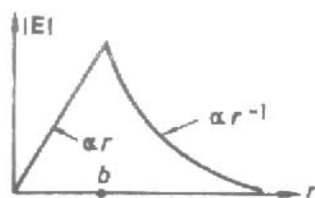
Viết dưới dạng vectơ, ta có

$$\mathbf{E}(t) - \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \cos(\omega t)\mathbf{e}_\theta\,, & (r < b) \\ -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \cos(\omega t)\mathbf{e}_\theta\,, & (r > b) \end{cases}$$

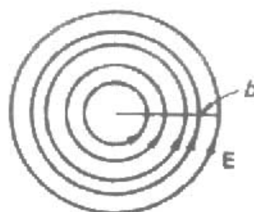
Tại $t = \frac{2\pi}{\omega}$, $\cos\omega t = 1$ và ta có

$$\mathbf{E}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \mathbf{e}_\theta & (r < b)\,, \\ -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \mathbf{e}_\theta & (r > b)\,. \end{cases}$$

Mối quan hệ giữa $|E|$ và r được biểu diễn trên hình 2.6. Đối với $r \le b$, các đường sức điện trường là các vòng tròn đồng tâm như trên hình 2.7.



Hình 2.6



Hình 2.7

2010

Giả thiết rằng từ trường của trái đất được sinh ra bởi một dòng điện tròn nhỏ đặt tại tâm của trái đất. Cho rằng từ trường ở gần cực trái đất là 0,8 gauss,

bán kính của trái đất là $R = 6 \times 10^6$m và $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, hay sử dụng định luật Biot Savart để tính độ lớn mômen từ của dòng điện nhỏ đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả thiết rằng trục của dòng điện tròn có bán kính nhỏ a trùng với trục quay của trái đất được lấy là trục z như trên hình 2.8. Sự đóng góp của một yếu tố dòng điện $Id\mathbf{l}$ vào cảm ứng từ trường $\mathbf{B}$ tại một điểm trên trục z, theo định luật Biot-Savart sẽ là

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

$d\mathbf{B}$ ở trong mặt phẳng chứa trục z và $\mathbf{r}$ và vuông góc với $\mathbf{r}$. Lấy tổng sự đóng góp của tất cả các yếu tố dòng điện, do tính đối xứng, $\mathbf{B}$ tổng hợp sẽ nằm dọc theo trục z, nghĩa là

$$\mathbf{B} = B_z\mathbf{e}_z, \quad \text{hay}$$
$$dB_z = dB \cdot \frac{a}{r}.$$

Tại cực trái đất, $z = R$. Do $R \gg a, r = \sqrt{R^2 + a^2} \approx R$ và

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{R^3}\oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{R^3} \cdot 2\pi a$$
$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{R^3},$$

Ở đó $S = \pi a^2$ là diện tích của dòng điện tròn.

Mômen từ của dòng điện tròn là $\mathbf{m} = IS\mathbf{e}_z$, do đó

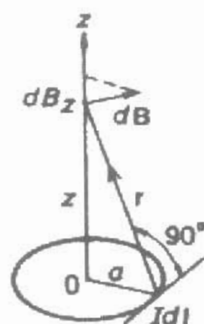
$$m = \frac{2\pi R^3}{\mu_0}B_z.$$

Sử dụng dữ liệu đã cho $R = 6 \times 10^6$ m, $B_z = 0,8$ Gs, ta nhận được độ lớn của mômen từ là

$$m \approx 8,64 \times 10^{-26} \text{ Am}^2.$$

2011

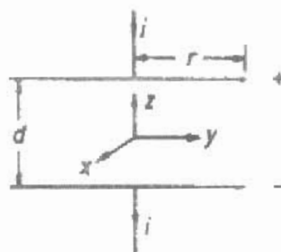
Một tụ điện (trong chân không) bao gồm hai bản kim loại tròn song song, mỗi bản có bán kính r đặt cách nhau một khoảng cách nhỏ d. Một dòng điện



Hình 2.8

i tích điện cho tụ điện. Hãy sử dụng vectơ Poynting để chỉ ra rằng tốc độ mà trường điện từ cung cấp năng lượng cho tụ điện chính là tốc độ năng lượng trường tĩnh điện trữ trong tụ điện thay đổi theo thời gian. Chứng minh rằng năng lượng đầu vào cũng là iV, ở đó V là hiệu điện thế giữa các bản kim loại. Giả thiết rằng điện trường là đều ra đến tận mép của các bản cực.

(*Wisconsin*)



Hình 2.9

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ như trong hình 2.9. Khi bản cực dương chứa điện tích Q, điện trường giữa các bản cực là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}(-\mathbf{e}_z) .$$

Vì Q thay đổi, $\mathbf{E}$ cũng thay đổi, làm sinh ra một từ trường giữa các bản cực.

Áp dụng biểu thức

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

đối với đường tích phân C là vòng tròn ở giữa các bản cực có diện tích S song song và bằng diện tích của các bản cực. Do tính đối xứng, ta thu được

$$H \cdot 2\pi r = \frac{dQ}{dt} = i\,,$$

hay

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r}(-\mathbf{e}_\theta)\,.$$

Do đó, vectơ Poynting của trường điện từ là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}(-\mathbf{e}_z) \times \frac{i}{2\pi r}(-\mathbf{e}_\theta) = -\frac{iQ}{2\pi^2 r^3 \varepsilon_0}\mathbf{e}_r\,.$$

Thông lượng năng lượng nạp vào tụ điện đi qua mặt cong bao quanh tụ điện. Tốc độ cung cấp năng lượng cho tụ điện là

$$P = N \cdot 2\pi r d = \frac{iQ}{\pi r^2 \varepsilon_0} d\,.$$

Năng lượng tĩnh điện trữ trong tụ điện được tính như sau

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot \pi r^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}\right)^2 \pi r^2 d = \frac{Q^2 d}{2\pi r^2 \varepsilon_0}\,,$$

và tốc độ tăng của năng lượng trong tụ điện là

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{d}{2\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot 2Q\frac{dQ}{dt} = \frac{iQ}{\pi r^2 \varepsilon_0} d\,.$$

Như vậy ta có

$$P = \frac{dW_e}{dt}\,.$$

mặt khác $Q = CV = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V$, hay $\frac{Qd}{\varepsilon_0 \pi r^2} = V$, do đó $P = iV$.

2012

Một tụ điện phẳng song song được chế tạo bằng hai bản cực tròn như trên hình 2.10. Hiệu điện thế giữa các bản cực (được cung cấp bằng các dây dẫn

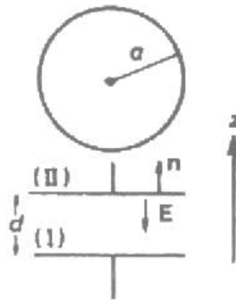
dài không có điện trở) phụ thuộc thời gian theo quy luật $V = V_0 \cos\omega t$. Giả thiết rằng $d \ll a \ll c/\omega$ sao cho hiệu ứng mép của điện trường và sự trễ có thể bỏ qua.

(a) Hãy sử dụng các phương trình Maxwell và lập luận đối xứng để xác định điện trường và từ trường trong vùng I như một hàm của thời gian.

(b) Hãy xác định dòng điện trong dây dẫn và mật độ dòng điện trong các bản cực như một hàm của thời gian?

(c) Từ trường trong vùng II là bao nhiêu? Tìm mối quan hệ giữa sự tính gián đoạn của B qua một bản cực với dòng điện bề mặt trong bản cực đó.

(CUSPEA)



Hình 2.10

Lời giải:

(a) Vì $d \ll a$ nên điện trường trong vùng I được tính gần đúng là $\mathbf{E}^{(I)} = E_z^{(I)}\mathbf{e}_z$, với

$$E_z^{(I)} = -\frac{V_0}{d}\cos\omega t$$

tại thời điểm t.

Áp dụng phương trình Maxwell

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

đối với đường cong tích phân L là vòng tròn bán kính r có tâm đặt trên đường thẳng nối các tâm các bản cực. Do đối xứng $\mathbf{B}^{(I)} = B_\phi^{(I)}\mathbf{e}_\phi$ (tức $B^{(I)}$ là tiếp tuyến với vòng tròn L), ta có

$$2\pi r B_\phi^{(I)} = \mu_0\varepsilon_0\pi r^2\left(\frac{V_0\omega}{d}\sin\omega t\right),$$

hay

$$B_\phi^{(I)} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0\omega}{2d} r\sin\omega t\,.$$

(b) Gọi σ là mật độ điện tích mặt của bản cực phía trên, bản này là mặt tiếp xúc giữa vùng I và vùng II. Ta có

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_z^{(I)} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\cos\omega t\,.$$

Khi đó điện tích toàn phần trên bản cực đó là

$$Q = \pi a^2\sigma = \frac{\pi a^2\varepsilon_0 V_0}{d}\cos\omega t\,.$$

Lưu ý rằng σ là đồng đều vì $E_z^{(I)}$ tại bất kì thời điểm t nào. Sự thay đổi theo thời gian của Q chỉ ra rằng một dòng điện chạy qua các dây dẫn là dòng điện xoay chiều

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\pi a^2\varepsilon_0 V_0\omega}{d}\sin\omega t\,.$$

Vì điện tích Q trên bản cực thay đổi liên tục theo thời gian, nên sẽ có dòng điện bề mặt trong bản cực. Như thấy trên hình 2.11, dòng điện này chảy về tâm của bản cực theo các hướng bán kính. Dòng điện toàn phần chảy qua vòng tròn đã được tô đậm là

$$i = -\frac{d}{dt}\left[\pi(a^2 - r^2)\sigma\right] = \frac{\pi(a^2 - r^2)\varepsilon_0 V_0\omega}{d}\sin\omega t\,.$$

Do đó, mật độ dòng tuyến tính (dòng trên một đơn vị dài) trong bản cực là

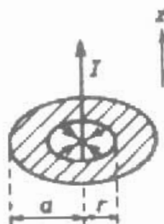
$$\mathbf{j}_l(r) = \frac{i}{2\pi r}\mathbf{e}_r = \frac{(a^2 - r^2)\varepsilon_0 V_0\omega}{2dr}\sin(\omega t)\mathbf{e}_r\,.$$

(c) Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{B}^{(II)}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I\,,$$

Hướng của I và chiều của vòng tròn L tuân theo quy tắc vặn ốc vít. Tại thời gian t, I chảy theo hướng $-z$ và do tính đối xứng trục nên

$$\mathbf{B}^{(II)} = B_\phi^{(II)}\mathbf{e}_\phi\,.$$



Hình 2.11

do đó

$$B_\phi^{(\text{II})} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0\varepsilon_0 a^2 V_0\omega}{2dr}\sin\omega t\,.$$

Như vậy,

$$\mathbf{B}_\phi^{(\text{II})} - \mathbf{B}_\phi^{(\text{I})} = \frac{\mu_0\varepsilon_0(a^2 - r^2)V_0\omega}{2dr}\sin(\omega t)\mathbf{e}_r = \mu_0 j_t\,,$$

hay

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{B}^{(\text{II})} - \mathbf{B}^{(\text{I})}) = \mu_0\mathbf{j}\,.$$

Đây chính là điều kiện biên đối với cường độ từ trường

$$H_t^{(\text{II})} - H_t^{(\text{I})} = j_t\,.$$

2013

Một tụ điện có các bản cực hình đĩa tròn bán kính R và khoảng cách giữa các bản cực $d \ll R$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi K_r. Một hiệu điện thế thay đổi theo thời gian $V = V_0\cos\omega t$ được đặt trên tụ điện.

(a) Hãy tìm điện trường như một hàm của thời gian (độ lớn và hướng) và tìm mật độ điện tích mặt tự do trên các bản cực tụ điện (bỏ qua hiệu ứng từ và hiệu ứng mép).

(b) Hãy tìm độ lớn và hướng của từ trường giữa các bản cực như một hàm của khoảng cách tính từ trục của đĩa bản cực.

(c) Hãy tính thông lượng của vectơ Poynting từ các cạnh hở của tụ điện.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bài tập này tương tự bài tập **2012**. Câu trả lời đối với (a) và (b) là

(a) $\mathbf{E} = \frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\mathbf{e}_z\,, \quad \sigma = \pm k_e\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\,,$

(b) $\mathbf{B} = \frac{k_e\varepsilon_0\mu_0\omega V_0}{2d} r\sin(\omega t)\mathbf{e}_\theta\,.$

(c) Vectơ Poynting tại $r = R$ là

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})|_{r=R} = -\frac{k_e\varepsilon_0\omega V_0^2 R}{2d^2}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\mathbf{e}_r\,.$$

Như vậy **N** có phương theo bán kính trong toạ độ trụ. Do đó thông lượng của vectơ Poynting từ các cạnh hở của tụ điện (nghĩa là mặt cong của hình trụ có chiều cao d và bán kính R) là

$$\phi = 2\pi RdN = \frac{\pi k_e\varepsilon_0\omega V_0^2 R^2\sin 2\omega t}{2d}\,.$$

2014

Một tụ điện phẳng có các bản cực hình tròn bán kính R và đặt cách nhau một khoảng cách $d \ll R$. Hiệu điện thế V trên các bản cực thay đổi theo quy luật $V = V_0\sin\omega t$. Giả thiết rằng điện trường giữa các bản cực là đều và bỏ qua hiệu ứng rìa và sự bức xạ.

(a) Hãy tìm hướng và độ lớn của cảm ứng từ **B** tại điểm P ở khoảng cách r ($r < R$) tính từ trục của tụ điện.

(b) Giả thiết rằng bạn muốn đo từ trường **B** tại điểm P bằng cách sử dụng một đoạn dây và một máy hiện sóng nhạy có trở kháng cao. Hãy vẽ phác bố trí thí nghiệm của bạn và ước lượng tín hiệu thu được từ máy hiện sóng.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Theo bài tập **2012**, cảm ứng từ tại điểm P là

$$\mathbf{B}(r,t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0 V_0\omega r}{2d}\cos(\omega t)\mathbf{e}_\theta\,.$$

(b) Hình 2.12 chỉ ra sơ đồ bố trí thí nghiệm. Một vòng hình vuông nhỏ có diện tích ΔS làm từ một dây dẫn có hai đầu được nối với máy hiện sóng được

đặt tại P sao cho mặt phẳng của vòng đó chứa trục của tụ điện. Một sóng hình sin sẽ xuất hiện trên máy hiện sóng, nó có biên độ và tần số đo được. Các biên độ và tần số này tương ứng với biên độ và tần số của một suất điện động ε. Khi đó từ biểu thức

$$|\varepsilon| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right| = \omega|\mathbf{B}|\Delta S$$

ta có thể tìm được biên độ của cảm ứng từ **B**.



Hình 2.12

2015

Tốc độ trôi của các êlectron trong 1 mm dây Cu mang dòng điện 10 A là bao nhiêu? $10^{-5}, 10^{-2}, 10^{1}, 10^{5}$ cm/s.

(*Columbia*)

Lời giải:

Là 10^{-2}cm/s.

2016

Tốc độ ngẫu nhiên trung bình của các êlectron tử trong một vật dẫn là bao nhiêu? $10^{2}, 10^{4}, 10^{6}, 10^{8}$ cm/s.

(*Columbia*)

Lời giải:

Là 10^{6} cm/s.

2017

Nêu điều kiện biên chính xác trong tĩnh từ học tại biên giữa hai môi trường khác nhau?

(a) Thành phần của **B** vuông góc với bề mặt có giá trị như nhau.

(b) Thành phần của **H** vuông góc với bề mặt có giá trị như nhau.

(c) Thành phần của **B** song song với bề mặt có giá trị như nhau.

(*CCT*)

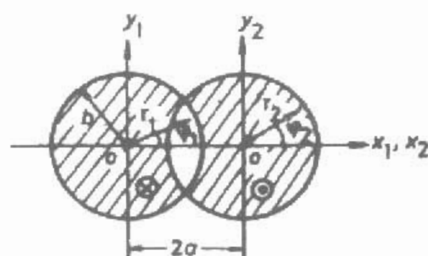
Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2018

Một hệ các vật dẫn có tiết diện được xác định bởi giao tuyến của hai vòng tròn bán kính b có tâm đặt cách nhau một khoảng cách $2a$, như trên hình 2.13. Phần dẫn điện được gạch chéo, vùng không gạch chéo có dạng thấu kính là vùng chân không. Vật dẫn bên trái chứa một dòng điện phân bố đồng đều có mật độ J đi vào phía trong trang sách và vật dẫn bên phải chứa một dòng điện phân bố đồng đều có mật độ J đi ra từ trang sách. Giả thiết rằng độ từ thẩm của vật dẫn giống như độ từ thẩm của chân không. Hãy tìm từ trường các điểm (x, y) bất kì trong vùng chân không giữa hai vật dẫn.

(*MIT*)



Hình 2.13

Lời giải:

Khi độ từ thẩm của vật dẫn giống độ từ thẩm của chân không, ta có thể coi rằng vùng có dạng thấu kính chứa đầy vật dẫn tương tự mà không ảnh

hưởng đến tính chất từ của hệ dẫn và cũng không ảnh hưởng đến sự phân bố từ trường của hệ. Khi đó ta có thể coi vùng này có hai dòng điện có mật độ $\pm J$ đi qua, nghĩa là hai dòng điện có độ lớn như nhau nhưng ngược hướng. Như vậy, ta có hai vật dẫn hình trụ, mỗi vật có dòng điện phân bố đều và cảm ứng từ trong vùng là tổng các phần đóng góp của chúng. Trong hệ toạ độ trụ riêng của chúng, định luật Ampe về lưu số cho ta các biểu thức

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2} J r_1 \mathbf{e}_{\varphi_1} , \quad (r_1 \leq b)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J r_2 \mathbf{e}_{\varphi_2} . \quad (r_2 \leq b)$$

Vì

$$\mathbf{e}_{\varphi_1} = (-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e}_{\varphi_2} = (-\sin\varphi_2, \cos\varphi_2) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} ,$$

ta có

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} J (y_1 \mathbf{e}_x - x_1 \mathbf{e}_y) ,$$
$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J (-y_2 \mathbf{e}_x + x_2 \mathbf{e}_y) .$$

Sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 2a \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

ta có

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J [-y_1 \mathbf{e}_x + (x_1 - 2a) \mathbf{e}_y] .$$

Do đó cảm ứng từ trong vùng có dạng thấu kính là

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J [(y_1 - y_2) \mathbf{e}_x + (x_1 - x_2 - 2a) \mathbf{e}_y] = -\mu_0 a J \mathbf{e}_y .$$

Điều này nghĩa là từ trường là đều và có hướng $-\mathbf{e}_y$.

2019

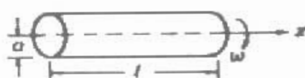
Một vỏ mỏng hình trụ chứa điện tích có chiều dài l và bán kính a, với $l \gg a$. Mật độ điện tích mặt trên vỏ trụ này là σ. Vỏ đó quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω tăng từ từ theo thời gian với $\omega = kt$, trong đó k là hằng số và $t \geq 0$ như trên hình 2.14. Bỏ qua các hiệu ứng rìa, hãy xác định:

(a) Từ trường bên trong hình trụ.

(b) Điện trường bên trong hình trụ.

(c) Năng lượng điện trường toàn phần và năng lượng từ trường toàn phần bên trong hình trụ.

(*Wisconsin*)



Hình 2.14

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ trụ (ρ, φ, z) với trục z dọc theo trục của hình trụ. Mật độ dòng điện bề mặt (dòng bề mặt trên một đơn vị chiều rộng) trên vỏ hình trụ là $\boldsymbol{\alpha} = \sigma\omega a\mathbf{e}_\varphi$. Nó có thể được biểu thị như một mật độ dòng khối (dòng trên một đơn vị diện tích tiết diện) $\mathbf{J} = \sigma\omega a\delta(\rho - a)\mathbf{e}_\varphi$. Do tính đối xứng, ta có $\mathbf{B} = B_z(\rho)\mathbf{e}_z$. Khi đó phương trình $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ rút gọn về dạng

$$-\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \mu_0\sigma\omega a\delta(\rho - a)\,.$$

Nó cho ta

$$\mathbf{B}(\rho) = \mu_0\sigma\omega a\mathbf{e}_z\,, \quad (\rho < a)\,.$$

(b) Áp dụng phương trình Maxwell

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

đối với L là một vòng tròn bán kính ρ trong mặt phẳng vuông góc với trục z và có tâm tại trục. Trên vòng tròn này $\mathbf{E}$ là thành phần tiếp tuyến và có cùng độ lớn, nghĩa là, $\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{e}_\varphi$. Do đó, lưu ý là $\omega = kt$, ta có

$$\mathbf{E}(\rho) = -\frac{\mu_0\sigma a k\rho}{2}\mathbf{e}_\varphi\,, \quad (\rho < a)$$

(c) $U_E = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 l\int_0^a \left(\frac{\mu_0\sigma a k\rho}{2}\right)^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\varepsilon_0\mu_0^2\sigma^2k^2a^6l}{16}$.

$$U_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0}dV = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0\sigma\omega a)^2\cdot\pi a^2 l = \frac{\pi\mu_0\sigma^2a^4k^2lt^2}{2}.$$

2020

Một hình trụ điện môi rắn, dài, bán kính a được phân cực vĩnh cửu sao cho sự phân cực theo hướng bán kính ở khắp mọi nơi với độ lớn tỉ lệ thuận với khoảng cách tính từ trục của hình trụ, nghĩa là $\mathbf{P} = \frac{1}{2}P_0 r\mathbf{e}_r$.

(a) Hãy tìm mật độ điện tích trong hình trụ.

(b) Nếu hình trụ được quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω không đổi mà không làm thay đổi **P**, hãy xác định từ trường trên trục của hình trụ tại những điểm không quá gần các đầu của nó.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, θ, z), ta có $P = P_r = P_0 r/2$. Mật độ điện tích liên kết là

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{P_0 r}{2}\right) = -P_0 .$$

(b) Khi $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$, mật độ dòng điện khối tại một điểm $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ trong hình trụ là

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{v} = \rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -P_0\omega\mathbf{e}_z \times (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) = -\mathbf{P}_0\omega r\mathbf{e}_\theta .$$

Trên bề mặt của hình trụ cũng có một sự phân bố điện tích bề mặt, có mật độ

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{P_0\mathbf{r}}{2}|_{r=a} = \frac{P_0 a}{2} .$$

sự phân bố này tạo ra một mật độ dòng mặt là

$$\boldsymbol{\alpha} = \sigma\mathbf{v} = \frac{P_0}{2}\omega a^2\mathbf{e}_\theta .$$

Để tìm từ trường tại một điểm trên trục của hình trụ mà không quá gần các đầu của nó, vì hình trụ rất dài, ta có thể lấy điểm này như gốc toạ độ và coi như hình trụ là dài vô hạn. Khi đó cảm ứng từ tại gốc toạ độ sẽ là

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3}dV' + \int_S \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3}dS'\right) ,$$

trong đó V và S lần lượt là thể tích và diện tích mặt cong của hình trụ và $\mathbf{r}' = (r, \theta, z)$ là một điểm nguồn. Nhớ rằng dấu âm xuất hiện vì $\mathbf{r}'$ hướng từ điểm trường tới một điểm nguồn. Xét tích phân

$$\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dV' = \int_V \frac{-P_0 \omega r \mathbf{e}_\theta \times (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r dr d\theta dz$$
$$= P_0 \omega \left[\int_V \frac{r^3 dr d\theta dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z - \int_V \frac{r^2 dr d\theta dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_r \right].$$

Vì hình trụ có thể coi là dài vô hạn, do tính đối xứng, tích phân thứ hai ở biểu thức trên bằng không. Đối với tích phân thứ nhất, ta đặt $z = r \tan \beta$. Khi đó ta có

$$\int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}'}{r'^3} dV' = P_0 \omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta \, d\beta \, \mathbf{e}_z = 2\pi P_0 \omega a^2 \mathbf{e}_z .$$

Tương tự, tích phân mặt cho

$$\int_S \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dS' = \int_S \frac{\frac{P_0}{2} \omega a^2 \mathbf{e}_\theta \times (a\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dS'$$
$$= -\frac{P_0}{2} \omega a^4 \int_S \frac{d\theta dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = -2\pi P_0 \omega a^2 \mathbf{e}_z .$$

Như vậy, cảm ứng từ **B** bằng không tại các điểm của trục hình trụ không quá gần các đầu của nó.

2021

Một hình trụ bán kính R và chiều dài vô hạn được làm từ chất điện môi phân cực vĩnh cửu. Vectơ phân cực **P** tỉ lệ với vectơ bán kính **r**, $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$, trong đó a là một hằng số dương. Hình trụ quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω. Xét trường hợp phi tương đối, $\omega R \ll c$.

(a) Hãy tìm điện trường **E** ở một bán kính r cả bên trong và bên ngoài hình trụ.

(b) Hãy tìm từ trường **B** ở một bán kính r cả bên trong và bên ngoài hình trụ.

(c) Tính năng lượng điện từ toàn phần lưu trữ được trên một đơn vị chiều dài của hình trụ trong các trường hợp sau:

(i) Trước khi hình trụ bắt đầu quay.

(ii) Trong khi nó quay.
Năng lượng tăng thêm được lấy từ đâu?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, θ, z) với trục của hình trụ nằm dọc theo hướng z, tốc độ góc quay của hình trụ là $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Mật độ điện tích khối bên trong hình trụ là

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (a\mathbf{r}) = -2a\,.$$

Khi đó mật độ điện tích mặt trên hình trụ là

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_r \cdot (a\mathbf{r})|_{r=R} = aR\,.$$

Do đó điện tích toàn phần trên một đơn vị chiều dài là $-2a \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot aR = 0$. Từ định lý Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$ và tính đối xứng trục, ta tính được

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{ar}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_r\,, & r < R\,, \\ 0 & r > R\,. \end{cases}$$

(b) Mật độ dòng khối là $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = -2a\omega r \mathbf{e}_\theta$, và mật độ dòng bề mặt là $\boldsymbol{\alpha} = \sigma \mathbf{v} = a\omega R^2 \mathbf{e}_\theta$. Nếu hình trụ dài vô hạn, do tính đối xứng, $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{e}_z$. Phương trình và điều kiện biên của $\mathbf{B}$ là

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}\,, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}\,.$$

trong đó $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$ lần lượt là cảm ứng từ ở bên trong và bên ngoài hình trụ. Từ hai phương trình suy ra

$$-\frac{\partial B_1}{\partial r} = -2\mu_0 a\omega r\,, \quad -\frac{\partial B_2}{\partial r} = 0\,.$$

Như vậy B_2 là một hằng số. Vì $B_2 \to 0$ khi $r \to \infty$, nên hằng số đó bằng 0. Điều kiện biên tại $r = R$,

$$-[B_2(R) - B_1(R)] = \mu_0 a\omega R^2\,,$$

dẫn đến

$$B_1(R) = \mu_0 a\omega R^2\,.$$

Tích phân phương trình vi phân đối với B_1 từ r tới R, ta nhận được

$$B_1(r) = B_1(R) - \mu_0 a\omega(R^2 - r^2) = \mu_0 a\omega r^2\,.$$

Do đó từ trường bên trong và bên ngoài hình trụ là

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 a\omega r^2 \mathbf{e}_z & r < R\,, \\ 0 & r > R\,. \end{cases}$$

(c) (i) Trước khi hình trụ bắt đầu quay, chỉ có điện năng tồn tại

$$W_e = \int_\infty \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV\,.$$

Như vậy năng lượng trữ trên một đơn vị chiều dài của hình trụ là

$$\frac{dW_e}{dz} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{ar}{\varepsilon_0}\right)^2 r dr = \frac{\pi a^2 R^2}{4\varepsilon_0}\,.$$

(ii) Khi hình trụ quay, cả hai năng lượng điện và từ cùng tồn tại. Năng lượng điện giống như trường hợp (i) và năng lượng từ trữ trên một đơn vị chiều dài của hình trụ là

$$\frac{dW_m}{dz} = \int_\infty \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 a\omega r^2)^2 r dr = \frac{\pi\mu_0 a^2 \omega^2 R^6}{6}\,.$$

Do đó năng lượng toàn phần lưu trữ trên một đơn vị chiều dài là

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{dW_e}{dz} + \frac{dW_m}{dz} = \frac{\pi a^2 R^4}{4\varepsilon_0} + \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega^2 R^6}{6} \\ &= \frac{\pi a^2 R^4}{4\varepsilon_0}\left[1 + \frac{2\omega^2 R^2}{3c^2}\right]. \end{aligned}$$

Năng lượng tăng thêm phải cung cấp thêm là năng lượng từ, được sinh ra từ công thực hiện bởi ngoại lực để làm cho hình trụ quay từ trạng thái đứng yên.

2022

Một dây cáp đồng trục bao gồm một vật dẫn rắn hình trụ bên trong bán kính R_1 và một vỏ mỏng dẫn điện hình trụ bên ngoài bán kính R_2. Tại một đầu hai vật dẫn nối với nhau bởi một điện trở và tại đầu kia chúng được nối với một ắc quy. Do đó, có một dòng điện i trong các vật dẫn và một hiệu điện thế V giữa chúng. Bỏ qua điện trở của bản thân dây cáp.

(a) Hãy tìm từ trường **B** và điện trường **E** trong vùng $R_2 > r > R_1$, nghĩa là, trong vùng giữa các vật dẫn.

(b) Hãy tìm năng lượng từ và năng lượng điện trên một đơn vị chiều dài trong vùng giữa các vật dẫn.

(c) Giả thiết rằng năng lượng từ trong vật dẫn bên trong được bỏ qua, hãy tìm độ tự cảm L trên một đơn vị chiều dài và điện dung C trên một đơn vị chiều dài.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) trong đó trục z nằm dọc theo trục của dây cáp và chiều dương của nó cùng chiều với dòng điện trong vật dẫn bên trong. Từ $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$ và tính đối xứng trục, ta có

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta .$$

Từ $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ và tính đối xứng trục, ta có

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathbf{e}_r ,$$

trong đó λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của vật dẫn bên trong. Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là $V = -\int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, cho

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 V / \ln \frac{R_2}{R_1} .$$

Do đó

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_r .$$

(b) Mật độ năng lượng từ là $w_m = \frac{B_2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2}(\frac{i}{2\pi r})^2$. Do đó năng lượng từ trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dW_m}{dz} = \int w_m dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{i}{2\pi r}\right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} .$$

Mật độ năng lượng điện là $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}(\frac{V}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}})^2$. Do đó năng lượng điện trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dW_e}{dz} = \int w_e dS = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} .$$

(c) Từ $\frac{dW_m}{dz} = \frac{1}{2}(\frac{dL}{dz})I^2$, độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dL}{dz} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\,.$$

Từ $\frac{dW_e}{dz} = \frac{1}{2}(\frac{dC}{dz})V^2$, điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dC}{dz} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\,.$$

2023

Các vật dẫn của một dây cáp đồng trục được nối với một ắc quy và điện trở như trên hình 2.15. Xuất phát từ các phương trình Maxwell, hãy tìm trong vùng giữa r_1 và r_2,

(a) điện trường theo V, r_1 và r_2,

(b) từ trường theo V, R, r_1 và r_2,

(c) vectơ Poynting.

(d) bằng cách tích phân vectơ Poynting chứng minh rằng công suất giữa r_1 và r_2 là V^2/R.

(*Wisconsin*)



Hình 2.15

Lời giải:

(a), (b) Theo bài tập **2022** ta có

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}\mathbf{e}_r\,, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta\,.$$

Vì $I = V/R$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 V}{2\pi r R}\mathbf{e}_\theta\,.$$

(c) $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \dfrac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r \times \dfrac{V}{2\pi r R} \mathbf{e}_\theta = \dfrac{V^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_z$.

(d) $P = \int_{r_1 < r < r_2} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{V^2}{2\pi R \ln \frac{r_2}{r_1}} \dfrac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr = \dfrac{V^2}{R}$.

2024

Giả thiết rằng từ trường trên trục của một ống hình trụ tròn, thẳng là

$$\mathbf{B} = B_0(1 + \nu z^2)\mathbf{e}_z .$$

Giả thiết thành phần θ của **B** là bằng 0 bên trong ống hình trụ.

(a) Hãy tính thành phần bán kính $B_r(r, z)$ của từ trường tại các điểm gần trục.

(b) Mật độ dòng $\mathbf{j}(r, z)$ cần thiết phải như thế nào ở bên trong hình trụ nếu từ trường mô tả còn đúng với mọi bán kính r?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Như ta trên hình 2.16, hãy xét một hình trụ nhỏ có chiều dày dz, bán kính r, vuông góc với trục z và áp dụng phương trình Maxwell $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Vì r rất nhỏ ta có

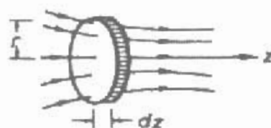
$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z) .$$

do đó

$$[B_z(0, z + dz) - B_z(0, z)]\pi r^2 + B_r(r, z) 2\pi r dz = 0 ,$$

hay

$$-\frac{\partial B(0, z)}{\partial z} dz \cdot \pi r^2 = B_r(r, z) \cdot 2\pi r dz ,$$



Hình 2.16

Suy ra

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B(0,z)}{\partial z} = -\frac{r}{2}\frac{d}{dz}[B_0(1+\nu z^2)] = -\nu B_0 r z\,.$$

(b) Giả thiết những phương trình dưới đây có hiệu lực ở mọi nơi

$$B_r(r,z) = -\nu B_0 r z\,,$$
$$B_z(r,z) = B_0(1+\nu z^2)\,.$$

Đối với một vật dẫn, $\dot{\mathbf{D}}$ có thể bỏ qua được và phương trình Maxwell sẽ trở về dạng đơn giản $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}$. Lưu ý rằng $B_\theta = 0$, $\frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = 0$, ta có

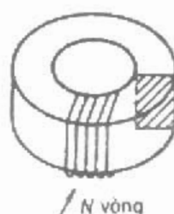
$$\mathbf{j}(r,z) = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_r}{\partial z}\mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{\mu_0}\nu B_0 r \mathbf{e}_\theta\,.$$

Đây là mật độ dòng điện phải tìm.

2025

Một ống dây hình xuyến có một lõi sắt tiết diện hình vuông (H. 2.17) và độ từ thẩm μ được quấn N vòng dây sát nhau mang dòng điện I. Hãy tìm độ lớn của độ từ hoá M ở mọi nơi trong lõi sắt.

(*Wisconsin*)



Hình 2.17

Lời giải:

Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = NI\,,$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}\,,$$

trong đó r là khoảng cách từ trục của hình xuyến.

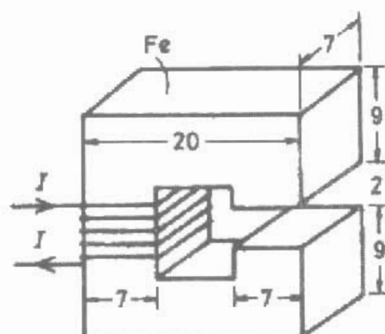
Độ từ hoá M bên trong lõi sắt là

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{\mu H}{\mu_0} - H = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \cdot \frac{NI}{2\pi r}\,.$$

2026

Trên hình 2.18 là một nam châm hình chữ C. Tất cả các kích thước được tính bằng cm. Độ từ thẩm tương đối của sắt mềm là 3000. Nếu một dòng điện $I = 1$ A cần sinh ra một từ trường khoảng 100 gauss trong khe hở thì cần phải có bao nhiêu vòng dây?

(*Wisconsin*)



Hình 2.18

Lời giải:

Xét một tiết diện của nam châm song song với mặt phẳng của tờ giấy và kí hiệu chu vi của nó bằng L. Chu vi này (bao gồm cả khe hở) là một hình vuông có các cạnh là $l = 20$ cm. Vì thành phần vuông góc của **B** là liên tục, nên cường độ từ trường trong khe hở là B/μ_0, trong khi cường độ từ trường bên trong nam châm là $B/\mu_0\mu_r$, ở đó μ_r là độ từ thẩm tương đối của sắt. Định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

áp dụng cho L trở thành

$$\frac{B}{\mu_0} d + \frac{B}{\mu_0 \mu_r}(4l - d) = NI\,,$$

trong đó $d = 2$ cm là chiều rộng của khe hở. Do đó

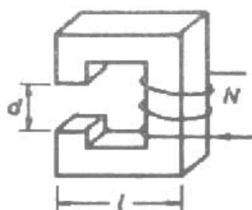
$$\begin{aligned} N &= \frac{B}{\mu_0 I}\left[d + \frac{1}{\mu_r}(4l - d)\right] \\ &= \frac{100 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1}\left(0,02 + \frac{0,2 \times 4 - 0,02}{3000}\right) \\ &= 161 \text{ vòng} \end{aligned}$$

Đây là kết quả cần tìm.

2027

Một nam châm điện được chế tạo bằng cách quấn N vòng dây mang dòng điện lên một lõi sắt có hình chữ C ($\mu \gg \mu_0$) như trên hình 2.19. Nếu diện tích tiết diện của lõi sắt là A, dòng điện là i, chiều rộng của khe hở là d và chiều dài từng cạnh của "C" là l, hãy tìm từ trường B trong khe hở.

(*Columbia*)



Hình 2.19

Lời giải:

Đặt $\mu_r = \mu/\mu_0$ vào kết quả của bài tập **2026**, ta tìm được

$$B = \frac{NI\mu_0\mu}{d(\mu - \mu_0) + 4l\mu_0}\,.$$

2028

Hãy thiết kế một nam châm (sử dụng một khối lượng đồng tối thiểu) để tạo ra một từ trường là 10.000 gauss trong 0,1 m khe hở có diện tích 1 m ×

2 m. Giả thiết rằng độ từ thẩm của sắt rất cao. Hãy tính công suất và trọng lượng của đồng cần thiết phải dùng. (Điện trở suất của đồng là 2×10^{-6} Ω-cm; khối lượng riêng của nó là 8 g/cm^3 và mật độ dòng điện cực đại của nó là 1000 A/cm^2). Lực hút giữa các cực của nam châm là bao nhiêu?

(*Princeton*)

Lời giải:

Gọi L là chu vi của một tiết diện của nam châm song song với mặt phẳng của biểu đồ như trên hình 2.20. Định luật Ampe về lưu số trở thành

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B}{\mu_0} x + \frac{B}{\mu} (L - x) = NI ,$$

trong đó x là chiều rộng của khe hở. Vì $\mu \gg \mu_0$, thành phần thứ hai trong phương trình trên có thể bỏ qua. Kí hiệu tiết diện của sợi dây đồng là S, dòng điện chạy qua S là $I = jS$. Đồng thời ta có

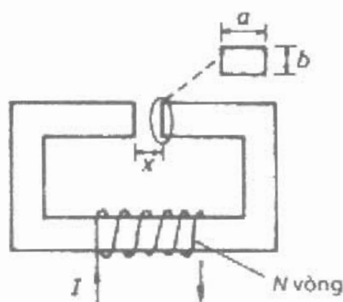
$$N = \frac{Bx}{\mu_0 j S} .$$

Công suất tiêu hao trong sợi dây chính là công suất cần thiết, nó được tính như sau

$$P = I^2 R = I^2 \rho \frac{2N(a + b)}{S} = 2j\rho(a + b) \frac{B}{\mu_0} x ,$$

trong đó ρ là điện trở suất của đồng. Sử dụng các dữ kiện đã cho ta nhận được

$$P = 9,5 \times 10^3 \text{ W} .$$



Hình 2.20

Gọi δ là khối lượng riêng của đồng, khi đó trọng lượng cần thiết của đồng là

$$2N(a-b)S\delta = 2(a+b)\frac{B}{j\mu_0}x\delta = 3.8 \text{ kg}.$$

Tiết diện của khe hở là $A = a \cdot b$. Do đó lực hút giữa các cực là

$$F = \frac{AB^2}{2\mu_0} = 8 \times 10^5 \text{ N}.$$

2029

Một thanh sắt mềm hình trụ có chiều dài L và đường kính d được uốn cong thành dạng hình tròn bán kính R để lại một khe hở sao cho hai đầu của thanh hầu như gặp nhau. Khoảng cách khe hở s không đổi so với bề mặt các đầu của thanh. Giả thiết $s \ll d, d \ll R$. N vòng dây được quấn chặt quanh thanh sắt và một dòng điện I chạy qua dây dẫn. Độ từ thẩm tương đối của sắt là μ_r. Bỏ qua hiện tượng rìa, từ trường B trong khe hở là bao nhiêu?

(*MIT*)

Lời giải:

Khi $s \ll d \ll R$, sự rò từ ở trong khe hở có thể bỏ qua. Khi đó từ trường trong khe hở giống như từ trường trong thanh sắt. Từ định luật Ampe về lưu số

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

ta nhận được

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)s}.$$

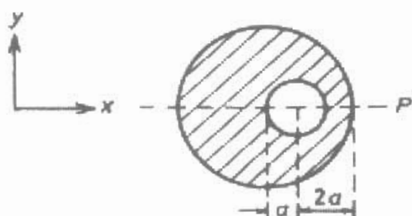
2030

Hình 2.21 cho thấy tiết diện của một ống hình trụ tròn dài vô hạn có bán kính $3a$ với một lỗ hổng hình trụ dài vô hạn bán kính a được đặt sao cho tâm của nó cách tâm của hình trụ lớn một khoảng cách a. Phần rắn của hình trụ mang một dòng điện I, phân bố đồng đều trên tiết diện và có chiều đi ra từ mặt phẳng của tờ giấy.

(a) Hãy tìm từ trường tại tất cả các điểm trên mặt phẳng P chứa các trục của hai hình trụ.

(b) Xác định từ trường trong lỗ hổng. Từ trường này có đặc tính đặc biệt đơn giản.

(UC, Berkeley)



Hình 2.21

Lời giải:

(a) Theo nguyên lý chồng chập, từ trường có thể được coi như hiệu từ trường $\mathbf{H}_2$ và $\mathbf{H}_1$, trong đó $\mathbf{H}_2$ là từ trường được tạo ra bởi hình trụ rắn (không có lỗ) bán kính $3a$ và $\mathbf{H}_1$ là từ trường tạo ra bởi hình trụ bán kính a tại vị trí của lỗ hổng. Dòng điện trong từng hình trụ phân bố đồng đều trên tiết diện. Các dòng I_1 và I_2 trong hình trụ nhỏ và hình trụ lớn có mật độ dòng tương ứng là $-j$ và $+j$. Sau đó, vì $I = I_2 - I_1 = 9\pi a^2 j - \pi a^2 j = 8\pi a^2 j$, ta có $j = \frac{I}{8\pi a^2}$ và

$$I_1 = \pi a^2 j = \frac{I}{8}, \quad I_2 = 9\pi a^2 j = \frac{9}{8} I .$$

Lấy trục z dọc theo trục của hình trụ lớn với hướng dương của nó theo hướng của I_2 mà ta đã giả thiết là đi ra từ mặt phẳng của tờ giấy. Lấy trục x đi qua trục của hình trụ nhỏ như thấy trên hình 2.21. Khi đó mặt phẳng P là mặt phẳng xz, nghĩa là mặt phẳng $y = 0$. Định luật Ampe cho $\mathbf{H}_1$ và $\mathbf{H}_2$ như sau (lưu ý rằng $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ lần lượt là các khoảng cách tương ứng của điểm trường đến hình trụ và lỗ hổng)

$$H_{2x} = -\frac{Iy}{16\pi a^2}, \qquad H_{2y} = \frac{Ix}{16\pi a^2}, \qquad (r \le 3a)$$

$$H_{2x} = -\frac{9Iy}{16\pi(x^2 + y^2)}, \qquad H_{2y} = \frac{9Ix}{16\pi(x^2 + y^2)}, \qquad (r > 3a)$$

$$H_{1x} = -\frac{Iy}{16\pi a^2}, \qquad H_{1y} = \frac{I(x-a)}{16\pi a^2}, \qquad (r_1 \le a)$$

$$H_{1x} = -\frac{Iy}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]}, \qquad H_{1y} = \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]}, \qquad (r_1 > a) .$$

Trên mặt phẳng P, $H_{2x} = H_{1x} = 0$. Do đó $H_x = 0, H_y = H_{2y} - H_{1y}$. Do đó ta có

(1) Bên trong lỗ hổng $(0 < x < 2a)$,

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi a^2} = \frac{Ia}{16\pi a^2} = \frac{I}{16\pi a}.$$

(2) Bên trong phần rắn ($2a \le x \le 3a$ hoặc $-3a \le x \le 0$),

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2+y^2]} = \frac{I(x^2-ax-a^2)}{16\pi a^2(x-a)}.$$

(3) Bên ngoài hình trụ $(|x| > 3a)$,

$$H_y = \frac{9Ix}{16\pi(x^2+y^2)} - \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2+y^2]} = \frac{(8x-9a)I}{16\pi x(x-a)}.$$

(b) Từ trường tại tất cả các điểm ở bên trong lỗ hổng $(r_1 \le a)$ là

$$H_x = -\frac{Iy}{16\pi a^2} + \frac{Iy}{16\pi a^2} = 0,$$

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi a^2} = \frac{I}{16\pi a}.$$

Từ trường này là đều bên trong lỗ hổng và có hướng theo hướng y dương.

2031

(a) Một quả cầu bán kính r có điện thế V được nhúng trong một môi trường dẫn điện có độ dẫn σ. Hãy tính dòng điện chạy từ quả cầu đến vô hạn.

(b) Hai quả cầu với điện thế $+V$ và 0 có tâm tại vị trí $x = \pm d$, với $d \gg r$. Hãy tính mật độ dòng điện đối với những điểm cách đều hai quả cầu (nghĩa là trên mặt phẳng yz) và các điểm ở xa ($\gg d$).

(c) Đối với hình học như trong câu (b) hãy tính từ trường trên mặt phẳng yz đối với những điểm ở xa.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Nếu quả cầu chứa điện tích Q, điện thế trên bề mặt nó sẽ là

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

Nghĩa là, $Q = 4\pi\varepsilon_0 rV$. Khi quả cầu được nhúng trong một môi trường dẫn điện có độ dẫn điện σ, thì dòng điện bắt đầu chạy ra từ quả cầu là

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi\sigma rV \, ,$$

trong đó S là mặt cầu và chúng ta giả thiết rằng môi trường là có điện trở thuần. Nếu điện thế V được duy trì thì dòng điện I sẽ là không đổi.

(b) Vì $d \gg r$ chúng ta coi các quả cầu như các điện tích điểm. Giả thiết rằng quả cầu với điện tích V mang một điện tích $+Q$ và quả cầu với điện thế bằng 0 mang điện tích $-Q$. Lấy đường thẳng nối tâm hai quả cầu là trục x và điểm giữa của đường thẳng này là gốc toạ độ. Khi đó điện thế của một điểm bất kì trên đường thẳng đó là

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x}\right) .$$

Khi đó hiệu điện thế giữa hai mặt cầu là

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x}\right)\Bigg|_{-d+r}^{d-r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4(d-r)}{r(2d-r)} \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

vì $d \gg r$ do đó

$$Q = 2\pi\varepsilon_0 rV \, .$$

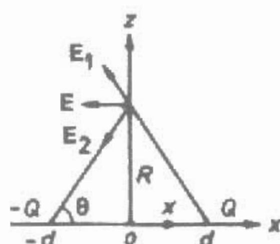
Trên mặt phẳng yz các điểm cùng khoảng cách tính từ hai quả cầu sẽ tạo thành một vòng tròn có tâm tại gốc toạ độ. Do tính đối xứng, độ lớn của điện trường và từ trường tại các điểm này sẽ giống nhau, như vậy chúng ta chỉ cần tính cho 1 điểm, ví dụ giao điểm của vòng tròn và trục z (xem hình 2.22). Gọi R là bán kính của vòng tròn, $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ là điện trường tương ứng sinh ra bởi $+Q$ và $-Q$. Tổng hợp của các trường này theo hướng $-x$ là

$$\mathbf{E} = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)}\cos\theta \mathbf{e}_x = -\frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)^{3/2}}\mathbf{e}_x \, .$$

Khi đó mật độ dòng điện tại điểm đã chọn này là

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma Qd}{2\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)^{3/2}}\mathbf{e}_x = -\frac{Vrd}{(R^2+d^2)^{3/2}}\mathbf{e}_x \, .$$

Vì chọn trục z là bất kì, nên các kết quả trên áp dụng được cho mọi điểm của vòng tròn.



Hình 2.22

(c) Sử dụng một vòng tròn bán kính R làm đường lấy tích phân L, theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}' = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' , \quad d\mathbf{S}' = r' dr' d\theta' \mathbf{e}_x ,$$

ta có

$$\begin{aligned} 2\pi RB &= -\mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \frac{Vrd}{(r'^2 + d^2)^{3/2}} dr' \\ &= 2\pi\mu_0 Vrd \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} - \frac{1}{d} \right) . \end{aligned}$$

Đối với các điểm ở xa, $R \gg d$, ta nhận được kết quả khá chính xác là

$$B = \frac{\mu_0 Vr}{R} .$$

Lưu ý rằng **B** là tiếp tuyến đối với vòng tròn R và theo chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía x dương.

2032

Xét một vỏ cầu mỏng điện môi có bán kính R và quay với tốc độ góc ω. Các điện tích có mật độ mặt không đổi σ trên mặt cầu sinh ra một từ trường đều tỉ lệ thuận với ω. Giả thiết rằng khối lượng của vỏ cầu này có thể bỏ qua.

(a) Hãy tìm từ trường ở bên trong và bên ngoài vỏ cầu quay đó.

(b) Một mômen lực không đổi **N** được đặt song song với ω. Sau bao nhiêu lâu thì nó sẽ làm cho vỏ cầu dừng lại?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

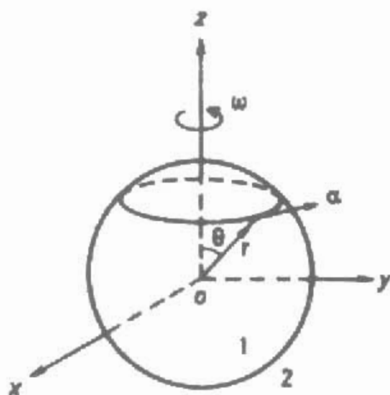
Sử dụng hệ toạ độ với trục z là trục quay và gốc toạ độ tại tâm của quả cầu (H. 2.23). Mật độ dòng điện trên bề mặt vỏ cầu trong hệ toạ độ cầu là

$$\alpha = R\sigma\omega \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

hoặc biểu thị như mật độ dòng điện khối

$$\mathbf{J} = \alpha\delta(r - R)\,.$$

Khi đó mômen lưỡng cực từ của quả cầu là



Hình 2.23

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}dV' = \frac{1}{2}\mathbf{e}_z \int\int r \cdot R\sigma\omega \sin\theta\delta(r - R)$$
$$\cdot 2\pi r \sin\theta \cdot rd\theta \cdot dr \cdot \sin\theta$$
$$= \mathbf{e}_z \pi R^4 \sigma\omega \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}R^4\sigma\omega\mathbf{e}_z\,.$$

Lưu ý rằng đối với bất kì cặp điểm đối xứng nào trên vòng tròn như ta thấy trên hình 2.23, tổng các đóng góp vào **m** là theo hướng z, do đó phải có thêm một thừa số $\sin\theta$ vào trong tích phân trên. Độ từ hoá của quả cầu là

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \sigma\omega R\mathbf{e}_z\,.$$

Vì không có dòng điện tự do trong và ngoài quả cầu, ta có thể áp dụng phương pháp về thế vô hướng từ. Các thế bên trong và bên ngoài thoả mãn phương trình Laplace

$$\nabla^2\varphi_1 = \nabla^2\varphi_2 = 0\,.$$

Chúng ta yêu cầu rằng $\varphi_1|_0$ là có hữu hạn và $\varphi_2|_\infty \to 0$. Bằng cách tách biến số ta nhận được các nghiệm sau

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \quad \varphi_2 = \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,.$$

Trên mặt cầu, áp dụng các điều kiện sau

$$\varphi_1 = \varphi_2|_{r=R}\,, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\sigma R\omega\cos\theta.$$

ta được

$$a_1 = \frac{\sigma R\omega}{3}\,, \quad b_1 = \frac{\sigma R^3\omega}{3}\,,$$

còn tất cả các hệ số khác bằng 0. Khi đó, các thế vô hướng từ sẽ là

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}\sigma R\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}\,, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3}\sigma R^3\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Do đó, các từ trường bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= -\nabla\varphi_1 = -\frac{1}{3}\sigma R\omega\mathbf{e}_z\,,\\
\mathbf{B}_1 &= \mu_0(\mathbf{H}_1+\mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\mathbf{e}_z\,, \quad (r\le R)\\
\mathbf{B}_2 &= \mu_0\mathbf{H}_2 = -\nabla\varphi_2 = \frac{\mu_0}{3}\sigma R^3\left(\frac{3(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right)\\
&= \frac{\mu_0}{3}\frac{R^4}{r^3}\sigma\omega(3\cos\theta\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z)\,, \quad (r>R)\,.
\end{aligned}$$

Trước khi tác dụng mômen lực không đổi **N**, năng lượng từ toàn phần của hệ là

$$\begin{aligned}
W_m &= \int_\infty \frac{B^2}{2\mu_0}dV = \int_{V_{\text{in}}}\frac{B^2}{2\mu_0}dV + \int_{V_{\text{out}}}\frac{B^2}{2\mu_0}dV\\
&= \frac{1}{2\mu_0}\cdot\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\\
&\quad + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{3}R^4\sigma\omega\right)^2\int_{V_{\text{out}}}\frac{(1+3\cos^2\theta)}{r^6}dV\,,
\end{aligned}$$

trong đó V_{in} và V_{out} là không gian bên trong và bên ngoài quả cầu. Lưu ý rằng

$$\int_{V_{out}} \left(\frac{1+3\cos^2\theta}{r^6}\right) dV = \int_R^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1+3\cos^2\theta)}{r^4} \sin\theta = \frac{4\pi}{3R^4},$$

ta có

$$W_m = \frac{4\pi}{9} \mu_0 \sigma^2 \omega^2 R^5 .$$

Giả thiết rằng sự quay dừng lại sau thời gian t do tác dụng của mômen lực không đổi **N**. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{dW_m}{dt} = N\omega .$$

Với N không đổi, ta nhận được thời gian cần tính

$$t = \frac{W_m}{N\omega} = \frac{4\pi\mu_0\sigma^2\omega R^5}{N} .$$

2033

Một vỏ cầu mỏng bán kính R chứa một mật độ điện tích mặt đồng đều σ. Vỏ cầu được quay với tốc độ góc không đổi ω quanh một đường kính.

(a) Hãy viết các điều kiện biên có liên hệ với các từ trường ở ngay bên trong và từ trường ở ngay bên ngoài vỏ cầu.

(b) Từ trường thoả mãn các điều kiện biên này là đều ở trong vỏ cầu và có dạng lưỡng cực ở ngoài vỏ cầu. Hãy xác định độ lớn của từ trường bên trong.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Gọi miền bên trong vỏ cầu là vùng 1, bên ngoài là vùng 2. Lấy trục quay là trục z. Mật độ dòng trên vỏ cầu là

$$\boldsymbol{\alpha} = \sigma R\omega \sin\theta \mathbf{e}_{\varphi} .$$

Các hệ thức biên trên mặt cầu là như sau

Theo hướng tiếp tuyến: $B_{1r} = B_{2r}\Big|_{r=R}$,

Theo hướng vuông góc: $\mathbf{e}_r \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0}\right)\Big|_{r=R} = \boldsymbol{\alpha}$, hay

$$B_{2\theta} - B_{1\theta}\big|_{r=R} = \mu_0\sigma\omega R\sin\theta\,.$$

(b) Theo bài tập **2032** ta thấy rằng từ trường bên trong và bên ngoài vỏ cầu sẽ là

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\mathbf{e}_z\,, \quad (r \le R) \tag{1}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{3}\sigma R^4\left(\frac{3(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right), \quad (r > R) \tag{2}$$

trong đó $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$. Lưu ý rằng từ trường bên trong vỏ cầu là một từ trường đều. Đồng thời, vì từ trường tạo ra bởi một lưỡng cực từ có mômen **m** được biểu thị như là $\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}]$, nên phương trình (2) chỉ ra rằng từ trường bên ngoài vỏ cầu là từ trường của một lưỡng cực có mômen

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}\sigma R^4\omega\mathbf{e}_z\,.$$

Từ $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$, chúng ta có thể viết lại phương trình (1) và (2) như sau

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)\,,$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta)\,.$$

Rõ ràng là các biểu thức này thoả mãn những điều kiện biên được đưa ra trong phần (a).

2034

Hãy xét một thể tích cầu có bán kính R bên trong nó được thiết kế để có một từ trường đều **B** như mong muốn. Cần phân bố dòng điện như thế nào trên mặt cầu để sinh ra từ trường này?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Bằng suy luận tương tự với một quả cầu phân cực đều, ta suy ra rằng từ trường bên trong một quả cầu được từ hoá đồng đều là một từ trường đều. Gọi **M** là độ từ hoá, khi đó mật độ dòng bề mặt là $\boldsymbol{\alpha}_S = -\mathbf{n}\times\mathbf{M}$. Lấy trục z dọc theo **M** sao cho $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$. Trong hệ toạ độ cầu

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta \quad (\mathbf{n} = \mathbf{e}_r)\,,$$

sao cho

$$\boldsymbol{\alpha}_S = -\mathbf{e}_r \times M(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) = M\sin\theta\mathbf{e}_\varphi .$$

Khi đó sử dụng thế vô hướng từ chúng ta sẽ tìm được từ trường bên trong quả cầu: $\mathbf{B} = \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M}$ (xem bài tập 2033). Do đó

$$\boldsymbol{\alpha}_S = \frac{3B}{2\mu_0}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi .$$

2035

Trên hình 2.24 là một vỏ cầu mỏng bán kính R có một điện tích cố định $+q$ phân bố đồng đều trên khắp bề mặt.

(a) Một tiết diện tròn nhỏ (bán kính $r \ll R$) của điện tích được lấy đi khỏi mặt cầu. Hãy tìm điện trường ở ngay bên trong và ở ngay bên ngoài mặt cầu tại lỗ rỗng đó.

Phần cắt được đặt trở lại và cho quả cầu quay với tốc độ góc không đổi $\omega = \omega_0$ quanh trục z.

(b) Hãy tính tích phân đường của điện trường dọc theo trục z từ $-\infty$ đến $+\infty$.

(c) Hãy tính tích phân đường của từ trường theo đường giống như trên.

Bây giờ tốc độ góc của quả cầu tăng tuyến tính với thời gian

$$\omega = \omega_0 + kt .$$

(d) Hãy tính tích phân đường của điện trường quanh đường tròn P (như thấy trên hình 2.25) đặt tại tâm của quả cầu. Giả thiết rằng pháp tuyến của mặt phẳng chứa đường tròn đó hướng dọc theo trục $+z$ và bán kính của đường tròn đó là $r_P \ll R$.

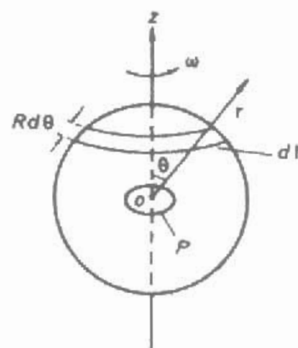
(Chicago)

Lời giải:

(a) Trước khi phần tròn nhỏ của điện tích được lấy đi, từ trường bên trong quả cầu bằng 0, trong khi điện trường bên ngoài quả cầu là $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Theo bài tập **1021**, điện trường đã được tạo ra bởi phần cắt nhỏ này là $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$. Do đó, sau khi phần cắt nhỏ lấy đi, điện trường chính xác bên trong và bên ngoài quả cầu tại lỗ rỗng đều là $\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$.



Hình 2.24



Hình 2.25

(b) Do tính đối xứng $\int_{\infty}^{\infty} Edz = 0$.

(c) Định luật Ampe về lưu số cho

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\infty}^{\infty} Bdz - \mu_0 I .$$

Vì dòng điện là $I = \frac{q\omega_0}{2\pi}$, ta có

$$\int_{\infty}^{\infty} Bdz = \frac{q\mu_0\omega_0}{2\pi} .$$

(d) Xét một vành tròn với bề rộng $Rd\theta$ như trên hình 2.25. Mật độ dòng điện mặt trên vành là $\frac{q}{4\pi R^2} \cdot \omega R \sin\theta$. Sự đóng góp của một cặp điểm đối xứng trên vành đó vào từ trường tại tâm của quả cầu sẽ được cộng lại để tạo cho kết quả theo hướng z. Như vậy tổng đóng góp của vành vào từ trường được tính theo định luật Biot - Savart như sau

$$\begin{aligned} dB_z &- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi-0}^{2\pi} \frac{q}{4\pi R^2} \omega R \sin\theta \cdot \frac{R}{R^3} \sin\theta R d\theta \cdot R \sin\theta d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 q\omega}{8\pi R} \sin^3\theta d\theta . \end{aligned}$$

Do đó

$$B_z = \frac{\mu_0 q\omega}{8\pi R} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0 q\omega}{6\pi R} .$$

Vì $r_p \ll R$, cảm ứng từ có thể coi là đồng đều trong vòng tròn P. Khi đó từ thông qua P là

$$\phi = \pi r_P^2 B = \frac{\mu_0 r_P^2 \omega q}{6R} = \frac{\mu_0 q r_P^2 (\omega_0 + kt)}{6R} .$$

Do đó

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 k r_P^2 q}{6R} .$$

2036

Một quả cầu dẫn điện cô lập có bán kính R, được tích điện đến điện thế V và quay quanh một đường kính với tốc độ góc ω.

(a) Hãy tìm cảm ứng từ **B** tại tâm của quả cầu.

(b) Mômen lưỡng cực từ của quả cầu quay này là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Sử dụng đáp số trong bài tập **2035**, từ trường tại tâm quả cầu là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi R} \mathbf{e}_z ,$$

trong đó Q là tổng điện tích của quả cầu và $\mathbf{e}_z$ là một vectơ đơn vị theo trục quay. Từ $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, ta nhận được $Q = 4\pi\varepsilon_0 RV$. Do đó

$$B = \frac{2}{3}\varepsilon_0 \mu_0 \omega V .$$

(b) Theo bài tập **2032**, mômen lưỡng cực từ của quả cầu là

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \omega \mathbf{e}_z ,$$

trong đó σ là mật độ điện tích mặt

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 V}{R} .$$

Do đó

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 R^3 \omega V \mathbf{e}_z .$$

2037

Một điện tích Q được phân bố đều trên bề mặt của một quả cầu bán kính r_0. Vật liệu bên trong và bên ngoài quả cầu là chân không.

(a) Hãy tính năng lượng tĩnh điện trong toàn không gian.

(b) Hãy tính lực tác dụng lên một đơn vị điện tích mặt cầu do sự có mặt của điện tích đó. Đối với $Q = 1C$ và $r_0 = 1$ cm, hãy tính trị số của lực đó.

(c) Quả cầu quay quanh một trục đi qua một đường kính với tốc độ góc không đổi ω. Hãy tính từ trường tại tâm của quả cầu.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) $W = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$.

(b) Mật độ điện tích mặt là $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$ và điện trường bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\mathbf{e}_r \,.$$

Sử dụng đáp số trong bài tập **1021**, lực điện tác dụng lên một đơn vị điện tích trên mặt ngoài là

$$\mathbf{f} = \left.\frac{\sigma \mathbf{E}}{2}\right|_{r=r_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r_0^4}\mathbf{e}_r \,.$$

Với dữ liệu đã cho, ta có

$$f = 3,6 \times 10^{12} \text{ N/cm}^2 \,.$$

(c) Sử dụng đáp số trong bài tập **2035**, ta có

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q\omega}{6\pi r_0}\mathbf{e}_z$$

trong đó $\mathbf{e}_z$ là một vectơ đơn vị theo trục quay.

2038

Một ống hình trụ tròn, thẳng, rỗng, dài được chế tạo bằng sắt có độ từ thẩm μ được đặt sao cho trục của nó vuông góc với từ trường đều $\mathbf{B}_0$ ban đầu.

Giả thiết rằng $\mathbf{B}_0$ đủ nhỏ sao cho nó không làm bão hoà sắt và độ từ thẩm μ không đổi trong vùng từ trường mà chúng ta quan tâm.

(a) Hãy vẽ phác các đường sức từ trong toàn bộ vùng đang xét trước và sau khi ống hình trụ đó được đặt vào từ trường.

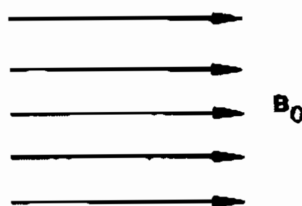
(b) Gọi đường kính trong và đường kính ngoài của ống hình trụ lần lượt là b và a. Tìm biểu thức của $\mathbf{B}$ bên trong ống hình trụ. Lưu ý rằng trong hệ toạ độ trụ, ta có

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

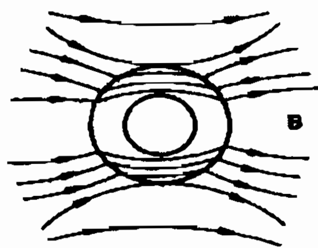
(Columbia)

Lời giải:

(a) Từ trường là đều trước khi ống hình trụ được đưa vào nên các đường sức từ như trong hình 2.26. Sau khi ống hình trụ được đặt trong từ trường, từ trường sẽ bị méo đi và các đường sức từ được thấy như trên hình 2.27.



Hình 2.26



Hình 2.27

(b) Chúng ta đưa vào thế vô hướng từ ϕ, thoả mãn phương trình $\mathbf{H} = -\nabla\phi$. Vì không có dòng điện tự do nên ta có $\nabla^2\phi = 0$. Trong hệ toạ độ trụ (r, θ, z), với trục z trùng với trục của hình trụ thì thế vô hướng từ thoả mãn phương trình

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\phi = 0\,. \quad (1)$$

Do tính đối xứng trục $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$. Đặt

$$\phi(r,\theta) = R(r)S(\theta)\,.$$

Khi đó phương trình trên sẽ được viết lại như sau

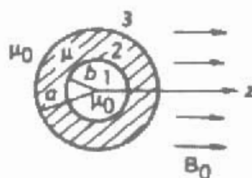
$$\frac{1}{R}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\theta^2} = \text{constant} = m^2\,,$$

Sở dĩ viết được như vậy, đó là vì sự thay đổi của r không ảnh hưởng đến biểu thức có chứa S. Điều này dẫn đến nghiệm tổng quát

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m})(g_m \cos m\theta + h_m \sin m\theta) . \tag{2}$$

Do tính đối xứng, $\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta)$ sao cho các hàm sin sẽ bị loại đi bằng cách đặt $h_m = 0$. Chia không gian thành ba phần như trên hình 2.28 và viết nghiệm tổng quát đối với chúng như sau

$$\phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} (c_{im} r^m + d_{im} r^{-m}) \cos m\theta , \quad (i = 1, 2, 3)$$



Hình 2.28

Tại các điểm ở xa hình trụ, $\frac{-\partial\phi_3}{\partial z} = H_0$, hay $\phi_3 = -H_0 z = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos\theta$. So sánh các hệ số của $\cos m\theta$ ta có

$$c_{31} = -\frac{B_0}{\mu_0} , \quad C_{3m} = d_{3m} = 0 \quad (m \neq 1) .$$

Do đó

$$\phi_3 = -\left(\frac{B_0 r}{\mu_0} - \frac{d_{31}}{r} \right) \cos\theta .$$

Chúng ta cũng đòi hỏi ϕ_1 có giá trị hữu hạn khi $r \to 0$. Do đó $d_{1m} = 0$ đối với mọi m và

$$\phi_1 = \sum_{m-1}^{\infty} c_{1m} r^m \cos m\theta .$$

Tiếp theo, xét các điều kiện biên tại $r = a$ và b. Ta có

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}, \\
\mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{r=b}, \\
\frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}\Big|_{r=a}, \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}\Big|_{r=b}.
\end{aligned}$$

Những điều kiện biên này cùng cho $c_{1m} = c_{2m} = d_{2m} = 0$ đối với $m \neq 1$ và đồng thời cho các phương trình sau

$$\begin{cases}
B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{a^2} = \mu\left(-c_{21} + \frac{d_{21}}{a^2}\right), \\
-B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{a^2} = \mu_0\left(c_{21} + \frac{d_{21}}{a^2}\right), \\
\mu\left(c_{21} - \frac{d_{21}}{b^2}\right) = \mu_0 c_{11}, \\
c_{21} + \frac{d_{21}}{b^2} = c_{11}.
\end{cases}$$

Giải ra đối với c_{11} ta được

$$c_{11} = \frac{4\pi a^2 B_0}{b^2(\mu - \mu_0)^2 - a^2(\mu + \mu_0)^2},$$

Suy ra

$$\phi_1 = c_{11} r \cos\theta.$$

Cường độ từ trường bên trong ống hình trụ sẽ là

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 = -\nabla\phi_1 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \\
&= -c_{11}(\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \\
&= -c_{11}\mathbf{e}_z \\
&= \frac{4\mu a^2}{a^2(\mu + \mu_0)^2 - b^2(\mu - \mu_0)^2}\mathbf{B}_0.
\end{aligned}$$

Nếu $\mu \gg \mu_0$, từ trường trở thành

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4}{\mu}\frac{\mathbf{B}_0}{1 - (\frac{b}{a})^2}.$$

Hiển nhiên, giá trị của μ càng lớn bao nhiêu thì sự che chắn từ càng mạnh bấy nhiêu.

2. CẢM ỨNG ĐIỆN TỪ (2039 2063)

2039

Một cuộn dây hình trụ đồng đều, trong chân không, có $r_1 = 1$ m, $l_1 = 1$ m và có 100 vòng. Đồng trục và đặt tại tâm của cuộn này là một cuộn dây nhỏ hơn, có $r_2 = 10$ cm, $l_2 = 10$ cm và có 10 vòng. Hãy tính độ hỗ cảm của hai cuộn dây đó.

(*Columbia*)

Lời giải:

Giả thiết dòng điện I_1 chạy qua cuộn dây ngoài, khi đó cảm ứng từ do nó tạo ra là

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1}\,.$$

Vì $r_2 \ll r_1, l_2 \ll l_1$, ta có thể coi từ trường B_1 là từ trường đều xuyên qua cuộn bên trong. Do đó từ thông qua cuộn bên trong là

$$\psi_{12} = N_2 B_1 S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I_1}{l_1} \pi r_2^2\,,$$

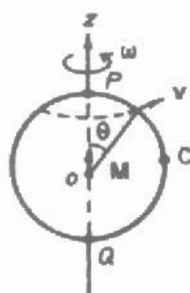
Từ thông này cho độ hỗ cảm của hai cuộn dây là

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} \pi r_2^2 \approx 39,5\ \mu\text{H}\,.$$

2040

Một vòng dây tròn có bán kính R quay đều với tốc độ góc ω quanh đường kính PQ như trên hình 2.29. Tại tâm của vòng dây và nằm dọc theo đường kính này là một nam châm nhỏ có mômen từ toàn phần là M. Suất điện động cảm ứng là bao nhiêu giữa điểm P (hoặc Q) và một điểm ở giữa của vòng dây nối điểm P và điểm Q?

(*Columbia*)



Hình 2.29

Lời giải:

Tại một điểm cách tâm của quả cầu một khoảng r, từ trường do nam châm nhỏ sinh ra là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}\right], \quad \mathbf{M} = M\mathbf{e}_z .$$

Lấy C là điểm giữa của cung $\overset{\frown}{PQ}$. Tốc độ của một điểm trên cung $\overset{\frown}{PC}$ là $\mathbf{v} = \omega R \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$. Suất điện động cảm ứng giữa các điểm P và C dọc theo cung $\overset{\frown}{PQ}$ được cho bởi

$$\varepsilon_{PC} = \int_P^C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}, \quad \text{với} \quad d\mathbf{l} = Rd\theta\mathbf{e}_\theta .$$

Vì $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi\times\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\times\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$, ta có

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0\omega RM\sin\theta}{4\pi R^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\mathbf{e}_r)$$

và

$$\varepsilon_{PC} = \frac{\mu_0 M\omega}{4\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 M\omega}{4\pi R} .$$

2041

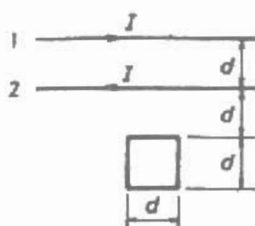
Hai dây dẫn dài vô hạn song song đặt cách nhau một khoảng cách d mang các dòng điện I bằng nhau nhưng ngược hướng nhau, trong đó I với tốc độ $\frac{dI}{dt}$. Một vòng dây hình vuông có chiều dài một cạnh là d nằm trong mặt phẳng

của các dây dẫn và cách một trong hai sợi dây song song một khoảng bằng d như trên hình 2.30.

(a) Hãy tìm suất điện động cảm ứng trên vòng dây hình vuông.

(b) Dòng điện cảm ứng theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ? Tại sao?

(*Wisconsin*)



Hình 2.30

Lời giải:

(a) Từ trường do một dây dẫn thẳng, dài vô hạn mang dòng điện I sinh ra tại một điểm cách dây dẫn một khoảng cách r, theo định luật Ampe về lưu số, là

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

Từ trường này có hướng vuông góc với sợi dây. Như vậy từ thông do dây dẫn 1 gửi qua vòng dây là

$$\phi_1 = \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln\frac{3}{2}$$

hướng của nó đi vào phía trong trang sách. Ngược lại, dây dẫn 2 ở gần vòng dây hơn, cho từ thông

$$\phi_2 = \int_{d}^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln 2$$

hướng của nó đi ra ngoài trang sách. Do đó, từ thông toàn phần gửi qua vòng dây là

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln\frac{4}{3}$$

hướng đi ra ngoài trang sách. Do đó suất điện động cảm ứng trong vòng dây hình vuông là

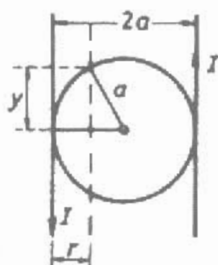
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi}\ln\left(\frac{4}{3}\right)\frac{dI}{dt}.$$

(b) Từ trường do dòng điện cảm ứng sinh ra có xu hướng chống lại sự biến thiên của từ thông, sao cho từ trường này có hướng đi vào phía trong trang sách. Sau đó sử dụng quy tắc bàn tay phải ta thấy dòng điện cảm ứng chạy theo chiều kim đồng hồ.

2042

Hai dây dẫn có chiều dài vô hạn mang một dòng điện I. Hai dây dẫn này song song với nhau và cách nhau một khoảng bằng $2a$. Một vòng tròn dẫn điện bán kính a nằm trong mặt phẳng của hai dây dẫn, giữa hai dây dẫn và cách điện với chúng (H. 2.31). Hãy tìm hệ số hỗ cảm giữa vật dẫn hình tròn và hai dây dẫn thẳng.

(UC, Berkeley)



Hình 2.31

Lời giải:

Từ trường tại một điểm nằm giữa hai dây dẫn và cách một trong hai dẫn đó khoảng với khoảng r được tính như sau

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r}\right)\mathbf{e}_\theta.$$

Như vậy từ thông gửi qua diện tích của vòng tròn là

$$\begin{aligned}\phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\int_0^a B(r) \cdot 2y dr \\ &= 2\int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r}\right) \cdot 2\sqrt{a^2-(a-r)^2} dr\,.\end{aligned}$$

Đặt $x = a - r$ và lấy tích phân

$$\begin{aligned}\phi &= 2\int_0^a \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)\sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}\Big|_0^a = 2\mu_0 I a\,.\end{aligned}$$

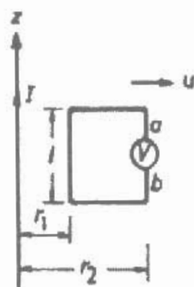
Do đó hệ số hỗ cảm là

$$M = \frac{\phi}{I} = 2\mu_0 a\,.$$

2043

Trên hình 2.32, một dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện I hướng theo chiều $+z$. Một vòng dây hình chữ nhật có cạnh l được nối với một vôn kế và dịch chuyển với vận tốc **u** đi xa sợi dây. Hãy cho biết đầu nào của vôn kế (a hoặc b) là dương. Hãy tính số chỉ của vôn kế theo các khoảng cách r_1, r_2 và l.

(*Wisconsin*)



Hình 2.32

Lời giải:

Từ trường tại một điểm có khoảng cách theo bán kính r là:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

hướng của nó vuông góc với tờ giấy và đi vào phía bên trong tờ giấy. Suất điện động cảm ứng trong vòng hình chữ nhật (cũng chính là số chỉ của của vôn kế) là:

$$V = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I u l}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

nếu chúng ta lấy tích phân theo chiều kim đồng hồ. Chú ý rằng $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ có hướng như $+z$. Vì $V > 0$, nên đầu a là dương.

2044

Một lõi sắt hình trụ dài, đồng đều nhưng từ những lá xếp lại, có bán kính 0,1 m được cuốn dây một cách đồng đều, tạo ra trong nó một từ trường đều có độ lớn $B(t) = \frac{1}{\pi}\sin(400t)$ Wb/m^2.

(a) Xác định điện áp trên một vòng trong cuộn dây.

(b) Xác định thế vectơ $A(r)$ do lõi sắt này sinh ra tại những điểm $r > 0,1$ m?

(c) Xác định $\mathbf{B}(r,t)$ do lõi sắt sinh ra tại những điểm $r > 0,1$ m?

(d) Xác định $\mathbf{A}(r,t)$ do lõi sắt này sinh ra tại những điểm $r < 0,1$ m?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Điện áp trên một vòng trong cuộn dây phải cân bằng với suất điện động cảm ứng, nghĩa là

$$\begin{aligned} V = -\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \\ = 400R^2\cos(400t) = 4\cos(400t)\ \text{V}. \end{aligned}$$

(b) Xét một đường hình tròn C có bán kính $r > 0,1$ m với trục nằm dọc theo trục của lõi sắt. Do đối xứng, ta thấy rằng độ lớn của $\mathbf{A}(r)$ giống nhau ở mọi điểm trên vòng tròn và có hướng tiếp tuyến với vòng tròn (cùng hướng với dòng điện). Sử dụng $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ trong định lý Stoke, ta có

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\,.$$

Vì **B** bằng không ở bên ngoài một xôlênôit dài và có giá trị đồng đều ở bên trong nó, nên vế bên phải của phương trình trên sẽ là

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot \pi R^2 = 0,01 \sin(400t)\,.$$

Khi đó định lý Stoke quy về phương trình $2\pi r A(r,t) = 0,01 \sin(400t)$, từ đó tính được

$$A(t,r) = \frac{1}{200\pi r} \sin(400t) \quad \text{Wb/m}\,.$$

(c) Từ trường do lõi sắt gây ra bằng 0 đối với $r > 0,1$ m. (Nói đúng ra, có một từ trường rất nhỏ bên ngoài xôlênôit có phương tiếp tuyến với vòng tròn trong câu (b) và có độ lớn $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, I là dòng điện trong lõi sắt, nhưng từ trường này thông thường được bỏ qua)

(d) Đối với $r < 0,1$ m, định lý Stocke, ta có

$$2\pi r A(r,t) = \pi r^2 B = \pi r^2 \cdot \frac{1}{\pi} \sin(400t)$$

Từ đó suy ra

$$A(r,t) = \frac{r}{2\pi} \sin(400t) \text{ Wb/m}\,.$$

2045

Một vành sắt có bán kính 10 cm và diện tích tiết diện là 12 cm^2 được quấn đều 1200 vòng dây dẫn cách điện. Có một khe hở không khí trong vành sắt với 1 mm. Độ từ thẩm của sắt là 700 và giả thiết không phụ thuộc vào từ trường; hiện tượng trễ được bỏ qua.

(a) Hãy tính từ trường trong khe hở khi dòng điện là 1 A chạy qua cuộn dây.

(b) Hãy tính độ tự cảm của cuộn dây (với lõi sắt này).

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Sử dụng kết quả của bài tập **2029** ta có

(a) $B = \dfrac{\mu_0 NI}{\frac{2\pi R-d}{\mu_r} + d} = 0,795$ T.

(b) $L = \dfrac{BAN}{I} = 1,14$ H.

2046

Hai vòng dây tròn được lắp đặt như trên hình 2.33. Hãy tìm độ hỗ cảm giữa hai vòng dây này, giả thiết $b \ll a$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi $b \ll a$, từ trường tại vòng dây nhỏ do vòng lớn tạo ra sẽ được coi gần đúng như từ trường trên trục của vòng lớn, cụ thể là

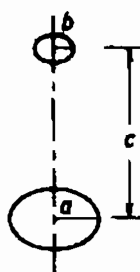
$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + c^2)^{3/2}},$$

trong đó I là dòng điện trong vòng dây lớn. Do đó, từ thông đi qua vòng dây nhỏ là

$$\psi_{12} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + c^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2$$

và độ hỗ cảm là

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I} = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2}{2(a^2 + c^2)^{3/2}}.$$



Hình 2.33

2047

Một cuộn dò có diện tích 4 cm^2, gồm 160 vòng dây được quấn chặt và điện trở 50 Ω. Cuộn dò này được nối với một điện kế xung kích có điện trở 30 Ω. Khi cuộn dò quay nhanh từ vị trí song song với một từ trường đều đến vị trí vuông góc với từ trường đó thì điện kế chỉ một điện tích là 4×10^{-5} C. Tính cảm ứng từ của từ trường đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả thiết rằng cuộn dây dò quay từ một vị trí song song với một từ trường đều đến vị trí vuông góc với từ trường đó trong khoảng thời gian Δt. Vì Δt rất ngắn, ta có thể viết

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = i(R + r)\,.$$

Vì $q = i\Delta t$, nên sự tăng của từ thông là

$$\Delta\phi = q(R + r) = BAN\,,$$

bởi vì cuộn dây bây giờ vuông góc với từ trường. Do đó cảm ứng từ là

$$B = \frac{(R+r)q}{AN} = \frac{(50+30) \times (4 \times 10^{-5})}{4 \times 10^{-4} \times 160}$$
$$= 0,05 \text{ T} = 50 \text{ Gs}\,.$$

2048

Hai cuộn dây tròn đồng trục có bán kính a và b đặt cách nhau một khoảng cách x và mang các dòng điện i_a và i_b tương ứng. Giả thiết $a \gg b$.

(a) Độ hỗ cảm là bao nhiêu?

(b) Lực tương tác giữa hai dòng điện này là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Như trong bài tập **2046**, độ hỗ cảm là

$$M_{12} = \frac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}\,.$$

(b) Coi cuộn nhỏ b như một mômen lưỡng cực từ $m_b = \pi b^2 i_b$. Lực tác dụng làm nó được cho bởi

$$F = m_b \left| \frac{\partial B_a}{\partial x} \right| = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2 i_a i_b}{2} \cdot \frac{3x}{(a^2 + b^2)^{5/2}} .$$

Nếu các dòng điện trong hai cuộn dây có cùng hướng thì lực sẽ là lực hút. Nếu hướng của các dòng điện trái nhau thì lực sẽ là lực đẩy.

2049

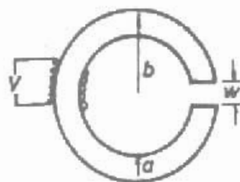
Một nam châm điện một chiều được tạo ra bằng cách quấn chặt N vòng dây trên một lõi sắt có dạng tựa một ống hình xuyến được cắt một miếng nhỏ để tạo thành một khe hở như trên hình 2.34. Các bán kính của hình xuyến này là a và b, bề rộng của khe hở là W. Độ từ thẩm μ đối với sắt có thể giả thiết là lớn và không đổi. Dây dẫn dùng trong nam châm này có bán kính r và điện trở suất ρ. Nam châm hoạt động bằng cách đặt vào hai đầu cuộn dây một hiệu điện thế hiệu V. Để đơn giản, giả thiết rằng $b/a \gg 1$ và $a/r \gg 1$. Tìm biểu thức đối với các đại lượng sau:

(a) Giá trị của từ trường trong khe hở.

(b) Giá trị của công suất đã tiêu hao trong cuộn dây.

(c) Hằng số thời gian chi phối đáp ứng của dòng điện trong cuộn dây đối với sự thay đổi đột ngột của V.

(UC, Berkeley)



Hình 2.34

Lời giải:

(a) Trong trạng thái dừng, vì $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ và tiết diện của lõi sắt giống nhau ở mọi nơi nên B phải không đổi trong lõi sắt. Áp dụng phương trình

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$ đối với ống hình xuyến, ta có

$$\frac{B}{\mu}(2\pi b - W) + \frac{B}{\mu_0}W = NI\,,$$

Rút ra

$$B = \frac{NI\mu_0\mu}{\mu_0(2\pi b - W) + \mu W} \approx \frac{NI\mu_0\mu}{\mu_0 2\pi b + \mu W}\,.$$

Vì

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho\frac{N2\pi a}{\pi r^2}} = \frac{Vr^2}{2a\rho N}\,,$$

giá trị ở trạng thái dừng đối với từ trường trong khe hở là

$$B = \frac{\mu_0\mu V r^2}{2a\rho(2\pi b\mu_0 + W\mu)}\,.$$

(b) Giá trị ở trạng thái dừng đối với công suất đã tiêu hao trong cuộn dây là

$$P = IV = \frac{V^2r^2}{2a\rho N}\,.$$

(c) Độ tự cảm của cuộn dây là

$$L = \frac{NB\pi a^2}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu\pi a^2}{\mu_0 2\pi b + \mu W}\,,$$

Như vậy, hằng số thời gian chi phối đáp ứng của dòng điện trong cuộn dây đối với sự thay đổi đột ngột của V là

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{N^2\mu_0\mu\pi a^2}{\mu_0 2\pi b + \mu W}\Bigg/\frac{\rho N 2\pi a}{\pi r^2} = \frac{N\mu_0\mu a\pi r^2}{2\rho(\mu_0 2\pi b + \mu W)}\,.$$

2050

Một xôlênôit rất dài có n vòng trên một đơn vị chiều dài mang một dòng điện tăng đều theo với thời gian, $i = Kt$.

(a) Hãy tính từ trường bên trong xôlênôit tại thời điểm t (bỏ qua sự trễ).

(b) Hãy tính điện trường bên trong xôlênôit.

(c) Xét một hình trụ có chiều dài l, bán kính bằng với bán kính của xôlênôit và đồng trục với xôlênôit. Hãy tìm tốc độ năng lượng chảy vào trong thể tích của hình trụ và chứng minh rằng nó bằng $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}lLi^2)$, với L là độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của xôlênôit.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, θ, z) với trục z dọc theo trục của xôlênôit.

(a) Áp dụng định luật Ampe về lưu số $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i$ đối với một hình chữ nhật có các cạnh dài song song với trục z, một cạnh nằm ở bên trong và cạnh kia ở bên ngoài xôlênôit, ta nhận được $H = ni$, hay

$$\mathbf{B} = \mu_0 nKt\mathbf{e}_z \,.$$

(b) Phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ cho

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta_r}\right] = -\mu_0 nK \,.$$

Lưu ý rằng, do đối xứng, E không phụ thuộc vào θ và lấy tích phân, ta có

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 nKr}{2}\mathbf{e}_\theta \,.$$

(c) Vectơ Poynting là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{\mu_0 n^2 K^2}{2} rt\mathbf{e}_r \,.$$

Như vậy năng lượng chảy vào trong ống hình trụ dọc theo hướng bán kính. Khi đó năng lượng chảy vào trong một đơn vị thời gian là

$$\frac{dW}{dt} = 2\pi rlN = \mu_0 Vn^2K^2t \,,$$

ở đó V là thể tích của hình trụ. Độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của xôlênôit là

$$L = \frac{nB\pi r^2}{i} = \mu_0 n\pi r^2 \,.$$

Do đó

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}lLi^2\right) = \mu_0 Vn^2K^2t = \frac{dW}{dt} \,.$$

2051

Xét một vòng dây hình chữ nhật có chiều rộng a và chiều dài b, quay với tốc độ góc ω quanh trục PQ và nằm trong một từ trường đều phụ thuộc vào thời gian $B = B_0 \sin \omega t$ vuông góc với mặt phẳng vòng dây tại $t = 0$ (xem H. 2.35). Hãy tìm suất điện động cảm ứng trong vòng dây, và chứng minh rằng nó đổi chiều với tần số gấp đôi tần số $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

(*Columbia*)



Hình 2.35

Lời giải:

Từ thông đi qua vòng dây là

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B_0 ab \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} B_0 ab \sin(2\omega t) .$$

Do đó, suất điện động cảm ứng là

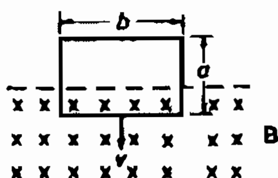
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 ab\omega \cos(2\omega t) .$$

Tần số xoay chiều của nó là $\frac{2\omega}{2\pi} = 2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = 2f$.

2052

Một cuộn dây hình chữ nhật điện trở R có các kích thước a và b dịch chuyển với tốc độ v không đổi vào trong từ trường $\mathbf{B}$ như trên hình 2.36. Tìm một biểu thức của lực tác dụng lên cuộn dây theo các thông số đã cho.

(*Wisconsin*)



Hình 2.36

Lời giải:

Khi cuộn dây bắt đầu cắt qua các đường sức từ, trong cuộn dây xuất hiện một suất điện động cảm ứng có độ lớn

$$\varepsilon = -\int \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = -Bvb$$

và tạo ra trong cuộn dây một dòng điện

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Bvb}{R}.$$

Dấu âm cho thấy dòng điện chạy ngược chiều kim đồng hồ. Lực tác dụng lên cuộn dây là

$$F = \left| \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right| = IbB = \frac{vb^2B^2}{R}.$$

hướng của lực này ngược với hướng của **v**. Nghĩa là, lực này chống lại sự dịch chuyển có xu hướng làm tăng sự cắt các đường sức từ trường.

2053

Một lực không đổi F đặt lên một dây dẫn trượt có khối lượng m. Dây dẫn đó bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên vào một vùng có từ trường không đổi B. Giả thiết rằng tiếp xúc trượt không có ma sát và độ tự cảm của dây dẫn đó có thể bỏ qua.

(a) Hãy tính tốc độ của dây dẫn như một hàm của thời gian.

(b) Hãy tính dòng điện đi qua điện trở R như một hàm của thời gian. Hướng của dòng điện như thế nào?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Khi dây dẫn dịch chuyển qua từ trường đều, trong dây sẽ xuất hiện một suất điện động cảm ứng $\varepsilon = Blv$, trong đó l là chiều dài của sợi dây trong từ trường và v là tốc độ của nó. Suất điện động này gây ra một dòng điện chạy trong sợi dây có độ lớn $I = \varepsilon/R$, R là điện trở của sợi dây, do đó có một lực từ $|Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}| = IlB$ tác động lên sợi dây. Lực này ngược chiều chuyển động của sợi dây. Như vậy phương trình chuyển động của dây dẫn trượt là

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2l^2}{R}v\,.$$

Giải phương trình này ta có

$$v(t) = \frac{RF}{B^2l^2} + C\exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right).$$

Vì $v = 0$ tại $t = 0$, ta tìm được $C = -\frac{RF}{B^2l^2}$. Do đó

$$v(t) = \frac{FR}{B^2l^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)\right].$$

(b) Dòng điện là

$$I(t) = \frac{Blv(t)}{R} = \frac{F}{Bl}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)\right].$$

2054

Một hình chữ nhật làm bằng dây dẫn điện hoàn hảo có các cạnh a và b, khối lượng M và độ tự cảm L, chuyển động với tốc độ ban đầu v_0 trong mặt phẳng của nó, hướng dọc theo cạnh dài từ miền từ trường bằng 0 vào miền có từ trường đều B_0, vuông góc với mặt phẳng của hình chữ nhật. Mô tả chuyển động của hình chữ nhật như một hàm của thời gian.

(*Columbia*)

Lời giải:

Lấy $b > a$, hình chữ nhật sẽ chuyển động theo cạnh b và phương trình chuyển động là

$$m\frac{dv}{dt} = -B_0aI\,,$$

trong đó I là dòng điện cảm ứng trong dây dẫn được xác định bởi phương trình

$$L\frac{dI}{dt} = B_0 av\,.$$

Kết hợp hai phương trình vi phân trên ta được

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega^2 v = 0$$

với $\omega = \frac{B_0 a}{\sqrt{mL}}$. Giải phương trình này ta nhận được tốc độ của hình chữ nhật

$$v = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t\,.$$

Vì $v = v_0$ tại $t = 0$ suy ra $C_2 = v_0$; và vì $I = 0$ tại $t = 0$, suy ra $C_1 = 0$. Do đó

$$v = v_0 \cos\omega t\,.$$

Độ dịch chuyển của hình chữ nhật làm bằng dây dẫn (với $s = 0$ tại $t = 0$) là

$$s = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,.$$

2055

Một vòng dây hình chữ nhật với các cạnh l và w tại $t = 0$ được buông ra từ trạng thái đứng yên ở bên trên một miền trong đó có từ trường B_0 như thấy trên hình 2.37. Vòng dây có điện trở R, độ tự cảm L và khối lượng m. Xét vòng dây trong thời gian mà đầu trên của nó còn nằm trong vùng từ trường bằng 0.

(a) Giả thiết rằng độ tự cảm có thể bỏ qua nhưng điện trở thì không. Hãy tìm dòng điện và tốc độ của vòng dây như một hàm của thời gian.

(b) Giả thiết rằng điện trở có thể bỏ qua nhưng độ tự cảm thì không. Hãy tìm dòng điện và tốc độ của vòng dây như một hàm của thời gian.

(MIT)

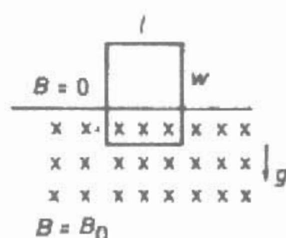
Lời giải:

Trong thời gian nêu trong đề bài ta có

$$\varepsilon = Blv\,,$$

$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = IR\,,$$

$$F = mg - BIl = m\frac{dv}{dt}\,.$$



Hình 2.37

(a) Sử dụng kết quả của bài tập **2053**, ta có

$$v = \frac{mgR}{B^2l^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)\right],$$
$$I = \frac{mg}{Bl}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)\right].$$

(b) $R = 0$. Ta có $L\frac{dI}{dt} = mlv$ và phương trình chuyển động bây giờ là

$$m\frac{dv}{dt} = mg - BIl$$

Từ hai phương trình trên ta có

$$\frac{d^2v}{dt} + \omega^2 v = 0,$$

với $\omega^2 = \frac{B^2l^2}{mL}$. Nghiệm tổng quát là

$$v = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t.$$

Vì $v = 0, I = 0$ tại $t = 0$, ta tìm được $c_1 = 0, c_2 = \frac{g}{\omega}$. Do đó

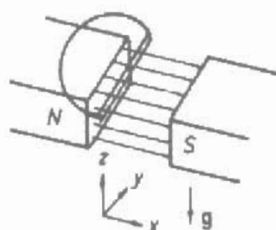
$$v = \frac{g}{\omega}\sin\omega t,$$
$$I = \frac{mg}{Bl}(1 - \cos\omega t),$$

với $\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$.

2056

Trong hình 2.38 một dây dẫn thẳng dài hướng theo chiều y nằm trong một từ trường đều $B\mathbf{e}_x$. Khối lượng trên một đơn vị dài và điện trở trên một đơn vị dài của dây dẫn lần lượt là ρ và λ. Sợi dây có thể coi như kéo dài đến mép của từ trường, ở đó hai đầu của dây dẫn thẳng này được nối với nhau bằng một dây dẫn hoàn hảo, không khối lượng và nằm ngoài từ trường. Các hiệu ứng rìa có thể bỏ qua. Nếu dây dẫn thẳng được phép rơi dưới ảnh hưởng của trọng lực ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$) thì tốc độ cuối của nó là bao nhiêu khi nó rơi qua từ trường?

(MIT)



Hình 2.38

Lời giải:

Khi dây dẫn thẳng cắt qua các đường sức từ thì trong dây dẫn này xuất hiện một suất điện động cảm ứng và tạo ra dòng điện. Giả thiết chiều dài của sợi dây là l và tốc độ cuối là $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_z$. Như vậy dòng điện cảm ứng được cho bởi

$$\int_l \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = i\lambda l .$$

Suy ra

$$i = -\frac{vBl}{\lambda l} = -\frac{vB}{\lambda} ,$$

chạy theo hướng $-y$. Lực từ tác dụng lên dây dẫn thẳng là

$$\mathbf{F} = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = iBl\mathbf{e}_z = \frac{vB^2 l}{\lambda}\mathbf{e}_z .$$

Khi tốc độ cuối đạt được, lực này cân bằng với trọng lực. Do đó tốc độ cuối của sợi dây được cho bởi

$$\frac{vB^2 l}{\lambda} = \rho l g .$$

nghĩa là

$$v = \frac{\rho g \lambda}{B^2}$$

hay

$$\mathbf{v} = -\frac{\rho g \lambda}{B^2}\mathbf{e}_z .$$

2057

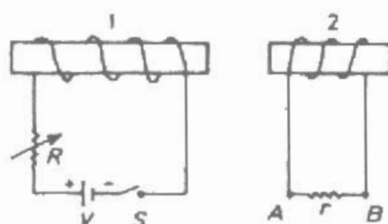
Trong hình 2.39, hướng của dòng điện trong điện trở r là như thế nào (từ A tới B hay từ B tới A) khi thực hiện những tác động sau? Trong từng trường hợp, hãy đưa ra những giải thích ngắn gọn cho lập luận của bạn.

(a) Công tắc S đóng.

(b) Cuộn 2 dịch chuyển lại gần cuộn 1.

(c) Điện trở R giảm.

(*Wisconsin*)



Hình 2.39

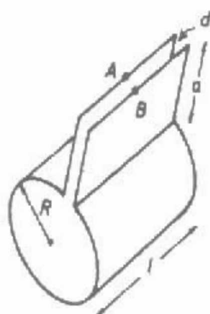
Lời giải:

Trong cả ba trường hợp, từ trường tại cuộn 2 do cuộn 1 tạo ra đều tăng. Định luật Lenz đòi hỏi từ trường do dòng điện cảm ứng sinh ra trong cuộn 2 phải ngăn cản được sự tăng của từ trường qua cuộn 2. Áp dụng quy tắc bàn tay phải chúng ta thấy rằng hướng của dòng điện trong điện trở r là từ B tới A.

2058

Một miếng đồng lá được uốn cong thành hình có dạng như trên hình 2.40. Giả thiết $R = 2$ cm, $l = 10$ cm, $a = 2$ cm, $d = 0,4$ cm. Hãy ước lượng tần số cộng hưởng thấp nhất của cấu trúc này và độ tự cảm đo được giữa các điểm A và B, khi độ tự cảm được đo tại một tần số thấp hơn rất nhiều so với tần số cộng hưởng.

(UC, Berkeley)



Hình 2.40

Lời giải:

Xét dòng điện trong lá đồng. Vì $d \ll R$, ta có thể coi các dòng điện trong hai phía của hình trụ là cùng pha. Tức là dòng điện đi vào từ một phía và đi ra ở phía kia với cùng một độ lớn. Theo đó, bước sóng cực đại là $2\pi R$. Dọc theo hướng trục, các mật độ dòng điện đều bằng 0 tại cả hai đầu của hình trụ sao cho nửa bước sóng cực đại là l, hay bước sóng cực đại là $2l$. Vì $2l \gg 2\pi R$, bước sóng cực đại là $2l = 20$ cm, hay tần số cộng hưởng thấp nhất là

$$f_0 = \frac{c}{2l} = \frac{3 \times 10^{10}}{20} = 1,5 \times 10^9 \text{ Hz} .$$

Khi tần số thấp hơn nhiều so với f_0 ta có thể coi như dòng điện phân bố đều trên bề mặt hình trụ và thay đổi chậm theo thời gian. Kết quả là, về cơ bản chúng ta đang giải quyết một vấn đề về trạng thái tĩnh. Bỏ qua các hiệu ứng rìa, cảm ứng từ bên trong cấu trúc là

$$B = \mu_0 i = \frac{\mu_0 I}{l} .$$

Từ thông đi qua tiết diện của cấu trúc là

$$\phi = BS = \frac{\mu_0 I}{l}(\pi R^2 + ad) ,$$

Từ đó suy ra độ tự cảm là

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{l}(\pi R^2 + ad)$$
$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (\pi \times 0,02^2 + 0,02 \times 0,004)}{0,1} = 1,68 \times 10^{-8} \text{ H.}$$

2059

Một vật dẫn điện hình cầu không tích điện, được từ hoá, bán kính R có từ trường bên trong là

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = Ar_\perp^2\hat{\mathbf{K}}\,,$$

trong đó A là hằng số, $\hat{\mathbf{K}}$ là một vectơ đơn vị không đổi qua tâm của quả cầu và $r_\perp$ là khoảng cách từ điểm $\mathbf{r}$ đến trục $\hat{\mathbf{K}}$. (Trong một hệ toạ độ Đềcác như trên hình 2.41, $\hat{\mathbf{K}}$ hướng theo trục z, tâm quả cầu ở tại gốc toạ độ và $r_\perp^2 = x^2 + y^2$). Bây giờ quả cầu được quay tròn xung quanh trục z (một cách phi tương đối) với tần số góc ω.

(a) Xác định từ trường (trong "hệ phòng thí nghiệm") tồn tại bên trong quả cầu quay.

(b) Sự phân bố điện tích thế nào? (Không tính bất kì điện tích bề mặt nào).

(c) Sự sụt thế được đo bởi một vôn kế tĩnh là bao nhiêu, khi một đầu của vôn kế đặt tại cực của quả cầu quay và đầu kia chạm vào đường xích đạo chuyển động của quả cầu? (hình 2.42).

(*CUSPEA*)

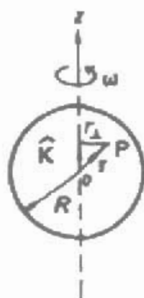
Lời giải:

(a) Tại điểm P của vectơ bán kính $\mathbf{r}$ từ trường là $\mathbf{B} = Ar_\perp^2\mathbf{e}_z$. Tốc độ của P là

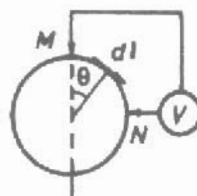
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}\,.$$

Đối với một điện tích tự do q để giữ nguyên trạng thái dừng bên trong quả cầu thì tổng hợp lực tác dụng lên nó, $f = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, phải bằng không. Như vậy, cường độ từ trường tại P là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -A\omega r_\perp^2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}_z$$
$$= -A\omega(x^2 + y^2)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)\,.$$



Hình 2.41



Hình 2.42

(b) Từ phương trình $\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$, ta nhận được mật độ điện tích khối bên trong quả cầu

$$\rho=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}=-4\frac{A\omega r_\perp^2}{\varepsilon}\,,$$

trong đó ε là hằng số điện môi của vật dẫn.

(c) Để tìm V ta tích phân từ N đến M dọc theo một đường tròn lớn bán kính R (xem H. 2.42)

$$V=-\int_M^N \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\,.$$

Trong hệ toạ độ cầu $d\mathbf{l}=Rd\theta\mathbf{e}_\theta$ và đối với một điểm (x,y,z), $r_\perp=r\sin\theta$, $x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y=r_\perp(\sin\theta\mathbf{e}_r+\cos\theta\mathbf{e}_\theta)$. Như vậy, điện trường trên mặt cầu là

$$\mathbf{E}=-A\omega R^3\sin^3\theta(\sin\theta\mathbf{e}_r+\cos\theta\mathbf{e}_\theta)\,,$$

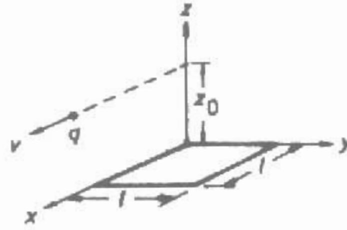
Từ đó suy ra

$$V=A\omega R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\frac{A\omega R^3}{4}\,.$$

2060

Xét một vòng dây hình vuông có chiều dài cạnh là l nằm trong mặt phẳng x,y như trong hình 2.43. Giả thiết rằng một hạt điện tích q chuyển động với tốc độ không đổi v, $v\ll c$, trong mặt phẳng xz cách mặt phẳng xy một khoảng z_0 (giả thiết hạt này chuyển động theo hướng x dương). Giả thiết rằng hạt điện tích đi qua trục z tại $t=0$. Hãy biểu diễn suất điện động cảm ứng xuất hiện trong vòng dây như một hàm của thời gian.

(*Columbia*)



Hình 2.43

Lời giải:

Tại thời điểm t, vị trí của q là $(vt, 0, z_0)$. Vectơ bán kính $\mathbf{r}$ từ q đến một điểm điện trường (x, y, z) là $(x - vt, y, z - z_0)$. Khi $v \ll c$, điện từ trường do điện tích q chuyển động đều gây ra là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[(x - vt)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^3}(-(z - z_0)\mathbf{j} + y\mathbf{k}),$$

với

$$r = [(x - vt)^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Suất điện động cảm ứng trong vòng dây được cho bởi tích phân

$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

trong đó S là điện tích của vòng dây và $d\mathbf{S} = dxdy\mathbf{k}$. Như vậy

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{\mu_0 q v}{4\pi}\int_0^l dx \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l dy \frac{y}{[(x - vt)^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\
&= -\frac{\mu_0 q v}{4\pi}\int_0^l dx \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (z - z_0)^2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + l^2 + (z - z_0)^2}}\right] \\
&= -\frac{\mu_0 q v^2}{4\pi}\int_0^l dx \left[\frac{x - vt}{[(x - vt)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}\right.
\end{aligned}$$

$$- \frac{x - vt}{[(x - vt)^2 + l^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \Bigg]$$

$$= -\frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{v^2t^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l - vt)^2 + (z - z_0)^2}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(l - vt)^2 + l^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{v^2t^2 + l^2 + (z - z_0)^2}} \Bigg\}.$$

2061

Một ống hình trụ cách điện rất dài (hằng số điện môi ε) có chiều dài L và bán kính $R\,(L \gg R)$ có một điện tích Q phân bố đều trên mặt ngoài của nó. Một điện trường ngoài đều đặt vuông góc với trục của hình trụ: $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$ (xem H. 2.44). Bỏ qua các hiệu ứng rìa.

(a) Hãy tính điện thế ở mọi nơi (nghĩa là ở cả bên trong và bên ngoài hình trụ).

Bây giờ điện trường E_0 bị bỏ đi và ống hình trụ được quay với tốc độ góc ω.

(b) Hãy tìm từ trường (độ lớn và hướng) bên trong hình trụ.

(c) Một vòng dây có bán kính $2R$ và điện trở ρ được quấn quanh hình trụ như trên hình 2.45 và sự quay của hình trụ được làm chậm lại một cách tuyến tính ($\omega(t) = \omega_0(1 - t/t_0)$) như một hàm của thời gian. Độ lớn của dòng điện cảm ứng trong vòng dây là bao nhiêu? Dòng đó chạy theo hướng nào?

(d) Thay cho vòng dây ở phần (c), một vòng dây được đặt qua ống hình trụ như trên hình 2.46 và hình trụ quay này được làm chậm lại như trước. Bây giờ dòng điện chạy trong vòng dây là bao nhiêu?

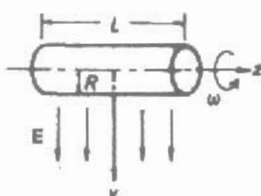
(Princeton)

Lời giải:

(a) Theo nguyên lý chồng chập, điện thế được coi như tổng các điện thế do Q và $\mathbf{E}$ sinh ra. Điện thế do Q sinh ra là

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{r}{R}, & r > R. \end{cases}$$

Ở đây điện thế được lấy bằng 0 tại tâm hình trụ. Gọi φ_2 là điện thế do điện



Hình 2.44

trường đều E gây ra. Khi đó $\nabla^2\varphi_2 = 0$ $(r \neq R)$,) hay trong hệ toạ độ trụ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} = 0\,.$$

Dùng phương pháp tách biến số ta nhận được nghiệm tổng quát

$$\varphi_2 = \begin{cases} \Sigma_n[r^n(a_n cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \frac{1}{r^n}(c_n\cos n\theta + d_n \sin n\theta)]\,, & r < R \\ \Sigma_n[r^n(e_n \cos n\theta + f_n \sin n\theta) + \frac{1}{r^n}(g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta)]\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Từ điều kiện biên $\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$ đối với $r \to \infty$ ta nhận được $e_1 = -E_0$, $f_1 = 0$, $e_n = f_n = 0$ đối với $n \neq 1$. Từ điều kiện $\varphi_2 = 0$ đối với $r \to 0$ ta nhận được $c_n - d_n = 0$ đối với mọi n. Khi $r = R$, ta có các điều kiện biên

$$\varphi_2\Big|_{r=R^-} = \varphi_2\Big|_{r=R^+}\,,\quad \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R^+}\,;$$

từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \Sigma_n R^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) & = -RE_0\cos\theta \\ & \quad +\Sigma_n \frac{1}{R^n}(g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta)\,, \\ \varepsilon\Sigma_n nR^{n-1}(a_n\cos\theta + b_n \sin n\theta) & = -\varepsilon_0 E_0\cos\theta \\ & \quad -\varepsilon_0\Sigma_n \frac{n}{R^{n+1}}(g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta)\,. \end{cases}$$

Các phương trình này có nghiệm là

$$a_1 = -\frac{2E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\,,\quad g_1 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)R^2E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\,, b_1 = h_1 = 0\,,$$
$$a_n = b_n = g_n = h_n = 0 \quad \text{với} \quad n \neq 1\,.$$

Như vậy

$$\varphi_2 = \begin{cases} -\frac{2E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}r\cos\theta\,, & r < R \\ -E_0 r\cos\theta + \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)R^2E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Do đó tổng điện thế là

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \begin{cases} -\frac{2E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0} r\cos\theta\,, & r < R \\ -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{r}{R} - E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{R^2 E_0}{r}\cos\theta\,, & r > R\,. \end{cases}$$

(b) Với **E** đã bỏ đi và hình trụ quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω, một mật độ dòng điện mặt $\frac{Q}{2\pi RL}\cdot\omega R = \frac{Q\omega}{2\pi L}$ được sinh ra. Theo định luật Ampe về lưu số, ta tìm được từ trường

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi L}\mathbf{e}_z$$

ở bên trong hình trụ.

(c) Từ thông gửi qua vòng dây trên hình 2.45 là

$$\phi = \pi R^2 B = \frac{\mu_0 Q\omega R^2}{2L}\,.$$

vì không có từ thông bên ngoài hình trụ. Do đó suất điện động cảm ứng là

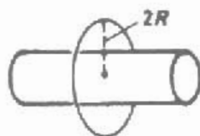
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 Q R^2}{2L}\left(-\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{\mu_0 Q R^2\omega_0}{2Lt_0}$$

và dòng điện cảm ứng là

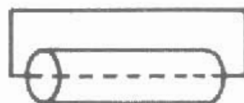
$$i = \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{\mu_0 Q R^2\omega_0}{2\rho L t_0}\,.$$

Theo định luật Lenz hướng của i là hướng quay của hình trụ.

(d) Không có từ thông gửi qua vòng dây trên hình 2.46, do đó không có dòng điện cảm ứng trong vòng dây đó.



Hình 2.45



Hình 2.46

2062

Xét một mạch kín của một dây dẫn được quấn thành một cuộn dây N vòng với bán kính a, điện trở R và độ tự cảm L. Cuộn dây quay trong từ trường đều **B** quanh một đường kính vuông góc với trường.

(a) Hãy tìm dòng điện bên trong cuộn dây như một hàm của θ trong quá trình quay với tốc độ góc không đổi ω, ở đây $\theta(t) = \omega t$ là góc giữa mặt phẳng của cuộn dây và **B**.

(b) Hãy tìm mômen ngoại lực cần thiết để giữ sự quay đều này. (Trong cả hai phần bạn nên giả thiết rằng các hiệu ứng quá độ không còn nữa.)

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Suất điện động cảm ứng trong cuộn dây được cho bởi

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\,.$$

Lưu ý rằng vì vectơ $d\mathbf{S}$ vuông góc với mặt phẳng của cuộn dây, nên $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = B\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)dS$, với $\theta = \omega t$, ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d}{dt}\int_S B\sin(\omega t)dS = -\frac{d}{dt}\left[\pi a^2 NB\sin(\omega t)\right]\\ &= -\pi a^2\omega NB\cos(\omega t)\\ &= -\mathrm{Re}\left[\pi a^2\omega NB\exp(i\omega t)\right].\end{aligned}$$

Dòng điện trong mạch được xác định từ phương trình

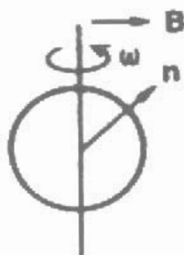
$$L\frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon\,.$$

Đặt $I = I_0\exp(i\omega t)$, thay vào phương trình trên ta được

$$I_0 = \frac{-\pi a^2\omega NB}{i\omega L + R} = \frac{\pi a^2\omega NB}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}e^{-i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}\,,$$

với $\varphi = \arctan(\frac{\omega L}{R})$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}I(t) &= \frac{\pi a^2\omega NB}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi a^2\omega NB}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}\sin\left(\omega t - \varphi\right).\end{aligned}$$



Hình 2.47

(b) Mômen lưỡng cực từ của cuộn dây là

$$\mathbf{m} = I\pi a^2 N\mathbf{n}\,,$$

trong đó n là vectơ đơn vị vuông góc với cuộn dây. Tại thời điểm t mômen lực tác dụng lên cuộn dây $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ có độ lớn

$$\tau = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = I\pi a^2 NB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{(\pi a^2 NB)^2\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)\,.$$

2063

Bạn được trang bị các nguồn dòng và một xưởng để chế tạo các linh kiện điện tuyến tính đơn giản ví dụ như: cuộn dây, cuộn cảm, tụ điện và điện trở. Bạn có những dụng cụ để đo các lực cơ học nhưng không có các dụng cụ đo điện. Hãy xây dựng một thí nghiệm để đo ampe (cường độ dòng điện) dựa vào những thiết bị trên và những hiểu biết của bạn về những phương trình cơ bản của điện và từ.

(*Chicago*)

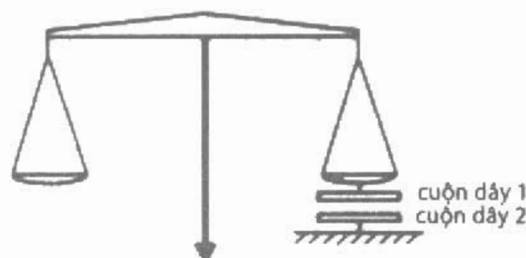
Lời giải:

Tạo hai cuộn dây tròn giống hệt nhau và sắp xếp chúng đồng trục dưới một đĩa của một cái cân để tạo nên một cái cân Ampe như được vẽ phác trên hình 2.48. Độ hỗ cảm giữa các cuộn dây là $M_{12}(z)$. Các cuộn dây được nối với cùng một nguồn dòng. Với những quả cân chuẩn đặt trên các đĩa cân, lực F_{12} giữa hai cuộn dây có thể đo được. Khi các cuộn dây được nối với cùng một nguồn dòng, phần hỗ cảm của năng lượng từ được tích trữ trong hai cuộn dây là

$$W_{12} = M_{12}I_1I_2 = M_{12}I^2 ,$$

Do đó lực tương tác là

$$F_{12} = \frac{\partial W_{12}}{\partial z} = I^2 \frac{\partial M_{12}(z)}{\partial z} .$$



Hình 2.48

Sử dụng giá trị lực đo được nhờ cân Ampe và tính $\frac{\partial M_{12}(z)}{\partial z}$, sẽ xác định được I.

Sử dụng hệ đơn vị MKSA giá trị của dòng xác định được theo ampe.

3. TÁC DỤNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ LÊN CÁC VẬT DẪN CÓ DÒNG ĐIỆN VÀ CÁC HẠT TÍCH ĐIỆN (2064 2090)

2064

Hai dây dẫn song song mang các dòng điện i_1 và i_2 chạy theo cùng một hướng. Các dây dẫn này sẽ:

(a) hút lẫn nhau.

(b) đẩy nhau.

(c) không có lực tác dụng lên nhau.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2065

Hai dây dẫn dài vuông góc đặt cách nhau một khoảng cách a và mang các dòng điện I_1 và I_2. Xét một đoạn dây đặt đối xứng $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ trên sợi dây mang dòng điện I_2 có chiều dài $l \ll a$ như trên hình 2.49.

(a) Hãy xác định lực tổng cộng và mômen lực tổng cộng tác dụng lên đoạn.

(b) Nếu các dây dẫn này quay tự do quanh đường thẳng nối a thì chúng sẽ có cấu hình như thế nào? Điều này tương ứng với năng lượng cực đại hay cực tiểu được tích trữ trong từ trường?

(*Wisconsin*)

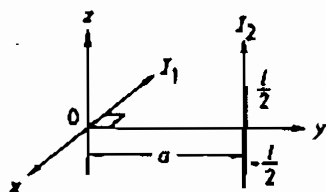
Lời giải:

(a) Từ trường do I_1 sinh ra tại điểm $(0, a, z)$ là

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\left[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\mathbf{e}_y - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\mathbf{e}_z\right],$$

sao cho một yếu tố dòng điện nhỏ $(z, z+dz)$ trên I_2 sẽ chịu tác dụng một lực

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 dz\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 = I_2 dz\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}(-\mathbf{e}_x)$$
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 z dz}{2\pi(a^2+z^2)}(-\mathbf{e}_x).$$



Hình 2.49

Như vậy, lực tác dụng lên đoạn dây nhỏ $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ là

$$\mathbf{F}_{21} = \int_{-l/2}^{l/2} d\mathbf{F}_{21} = 0$$

vì tích phân là một hàm lẻ của z, và mômen lực tác dụng lên nó là:

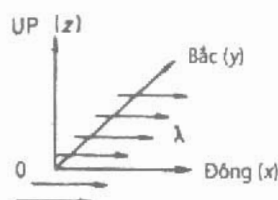
$$\begin{aligned}\tau &= \int_{-l/2}^{l/2} z\mathbf{e}_z \times d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{z^2 dz}{a^2+z^2}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) \\ &\approx \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a^2}\cdot\frac{1}{3}z^3\Big|_{-l/2}^{l/2}\cdot\mathbf{e}_y = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{24\pi a^2}l^3\mathbf{e}_y\,.\end{aligned}$$

Từ điều này rút ra kết luận là nếu dòng điện I_2 quay tự do quanh đoạn thẳng a thì cuối cùng nó sẽ định vị song song với dòng I_1 sao cho hướng của cả hai dòng I_1 và I_2 đều như nhau. Rõ ràng, vị trí này tương ứng với năng lượng cực tiểu được tích trữ trong từ trường.

2066

Một tấm kim loại mỏng có cường độ dòng điện mặt λ (ampe trên mét theo hướng y) chạy theo hướng đông (hướng x) trên mặt phẳng nằm ngang ($z = 0$) như trên hình 2.50. Độ lớn và hướng của lực tác dụng lên những vật sau đây là bao nhiêu?

(a) Một đoạn dây dẫn nằm ngang chiều dài l ở bên trên tấm kim loại một khoảng cách R, mang một dòng điện i (đo bằng ampe) chạy theo hướng bắc.



Hình 2.50

(b) Một đoạn dây dẫn tương tự nhưng được định hướng sao cho mang một dòng điện chạy theo hướng tây.

(c) Một vòng dây có bán kính r, với tâm ở bên trên tấm kim loại một khoảng cách R ($r < R$), mang một dòng điện i có mômen từ quay về hướng đông.

(d) Một vòng dây tương tự nhưng với mômen từ của nó hướng lên trên.

(e) Một vòng dây tương tự nhưng với mômen từ của nó hướng xuống dưới.

Hãy trình bày một cách ngắn gọn nguyên nhân cho từng câu trả lời của bạn.

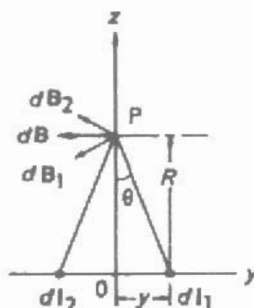
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tấm kim loại có dòng điện bề mặt đó có thể chia ra thành những dải hẹp có chiều rộng dy và mỗi dải được coi như có một dòng điện $dI = \lambda dy$. Xét điểm P tại $(0,0,R)$. Theo định luật Ampe về lưu số hai dải dòng điện dI_1 và dI_2 nằm đối xứng trên hai phía của điểm 0 sẽ sinh ra các cảm ứng từ $d\mathbf{B}_1$ và $d\mathbf{B}_2$, được tổng hợp thành $d\mathbf{B}$ theo hướng $-y$ (xem H. 2.51)

$$d\mathbf{B} = -\frac{2\mu_0 \lambda dy}{2\pi(y^2 + R^2)^{1/2}} \cos\theta \mathbf{e}_y \, ,$$

trong đó $\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{y^2 + R^2}}$.



Hình 2.51

Gọi $2L$ là chiều rộng của tấm có dòng điện. Từ trường toàn phần tại điểm P là

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \lambda R}{\pi} \int_0^L \frac{dy}{y^2 + R^2} \mathbf{e}_y = -\frac{\mu_0 \lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_y \, .$$

(a) Yếu tố dòng điện tại P là $id\mathbf{l} = il\mathbf{e}_y$ do đó lực tác dụng lên nó sẽ là

$$\mathbf{F} = il\mathbf{e}_y \times \mathbf{B} = 0 \, .$$

(b) Yếu tố dòng điện $id\mathbf{l} = -il\mathbf{e}_x$ và lực tác dụng lên nó là

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 il\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 li\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_z \, .$$

(c) Vòng dây mang dòng điện i có mômen lưỡng cực từ là $\mathbf{m} = \pi r^2 i\mathbf{e}_x$. Lực do từ trường $\mathbf{B}$ tác dụng lên vòng dây là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(mB\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) = 0\,.$$

(d) $\mathbf{m} = \pi r^2 i\mathbf{e}_y$, và lực tác dụng lên nó được viết ở dạng sau

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\mu_0 \lambda r^2 i \frac{\partial}{\partial R}\left(\arctan\frac{L}{R}\right)\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 \lambda r^2 i R^2}{R^2 + L^2}\mathbf{e}_z\,.$$

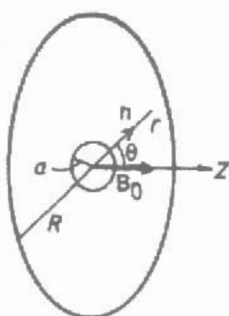
(e) $\mathbf{m} = \pi r^2 i\mathbf{e}_z$ và lực tác dụng lên nó là

$$\mathbf{F} = \nabla(mB\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y) = 0\,.$$

2067

Một dây dẫn tròn có bán kính R mang một dòng điện i. Một quả cầu bán kính $a\,(a \ll R)$ được làm bằng vật liệu thuận từ có độ từ thẩm μ được đặt sao cho tâm của nó nằm tại tâm của mạch điện (xem H. 2.52). Hãy xác định mômen lưỡng cực từ của quả cầu do từ trường của dòng điện sinh ra. Hãy xác định lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên quả cầu.

(UC, Berkeley)



Hình 2.52

Lời giải:

Lấy tâm của vòng dây tròn làm gốc toạ độ và trục của nó làm trục z. Từ trường tại gốc toạ độ do dòng điện i trong sợi dây sinh ra là

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{2R}\mathbf{e}_z .$$

Vì bán kính của quả cầu nhỏ $a \ll R$, ta có thể coi quả cầu ở trong một từ trường đều $\mathbf{B}_0$ và sử dụng thế vô hướng từ φ. Gọi φ_1 và φ_2 là thế từ ở bên ngoài và bên trong quả cầu. Chúng thoả mãn phương trình $\nabla^2\varphi_1 = \nabla^2\varphi_2 = 0$ vì bên trong và bên ngoài quả cầu độ từ hoá là đồng đều. Ta đòi hỏi

$$\varphi_1 \approx \varphi_0 = -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta$$

đối với $r \to \infty$ và φ_2 là hữu hạn khi $r \to 0$. Hơn nữa, tại $r = R$ ta có các điều kiện biên

$$\varphi_1 = \varphi_2 , \quad \mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} .$$

Giải phương trình Laplace bằng phương pháp tách biến số và làm theo trình tự giải bài tập **1062**, ta nhận được

$$\varphi_2 = -\frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} r\cos\theta .$$

Khi đó cảm ứng từ bên trong quả cầu là

$$\mathbf{B} = -\mu\nabla\varphi_2 = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0}\mathbf{B}_0 .$$

Gọi độ từ hoá của quả cầu nhỏ là **M**. Vì theo định nghĩa $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$ nên ta có

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\mathbf{B} = \frac{3(\mu-\mu_0)}{\mu_0(\mu+2\mu_0)}\mathbf{B}_0 = \frac{3(\mu-\mu_0)i}{2(\mu+2\mu_0)R}\mathbf{e}_z .$$

Mômen lưỡng cực từ của quả cầu khi đó là

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{M} = \frac{2(\mu-\mu_0)\pi a^3 i}{\mu+2\mu_0}\mathbf{e}_z .$$

Mật độ dòng điện bề mặt trên quả cầu được xác định bởi điều kiện biên

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) .$$

Vì

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

nên ta có

$$\alpha_M = M \times \mathbf{n} = \frac{3(\mu - \mu_0)i}{2(\mu + 2\mu_0)R} \sin\theta \, \mathbf{e}_\varphi .$$

Cuối cùng, lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên quả cầu là

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \alpha_M \times \mathbf{B}_0 = \frac{3(\mu - \mu_0)i}{2(\mu + 2\mu_0)R} \sin\theta \cdot \frac{\mu_0 i}{2R} (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{3\mu_0(\mu - \mu_0)i^2}{4(\mu + 2\mu_0)R} \sin\theta (\cos\theta \mathbf{e}_\theta + \sin\theta \mathbf{e}_r) .\end{aligned}$$

2068

Một dòng dây điện kín có mômen từ **m**. Mômen lực **N** do từ trường **B** tác dụng lên dòng điện đó là bao nhiêu?

(a) $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{N} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, (c) $\mathbf{N} = 0$.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2069

Một thỏi nam châm trong từ trường trái đất sẽ

(a) chuyển động về phía cực Bắc.

(b) chuyển động về phía cực Nam.

(c) chịu một mômen lực.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

2070

Một đồng xu bằng đồng được đặt đứng trên cạnh của nó trong một từ trường thẳng đứng có $B = 20$ kGs. Đẩy nhẹ đồng xu để nó đổ xuống. Hãy ước lượng thời gian nó đổ xuống là bao nhiêu lâu. (Gợi ý: Độ dẫn và khối lượng riêng của Cu là $6 \times 10^5 \Omega\text{cm}^{-1}$ và $9\ \text{gcm}^{-3}$).

(*Princeton*)

Lời giải:

Vì Cu là một vật dẫn điện tốt, thế năng của đồng xu Cu sẽ được chuyển đổi chủ yếu thành nhiệt năng khi nó đổ xuống trong một từ trường mạnh như vậy. Chúng ta có thể giả thiết rằng trong quá trình đổ mômen của lực từ luôn luôn cân bằng với mômen của trọng lực. Gọi θ là góc giữa mặt phẳng của đồng xu Cu và trục thẳng đứng. Khi ta xét một vành tròn có bán kính r và $r + dr$, thì từ thông đi qua diện tích của vành này là $\phi(\theta) = \pi r^2 B \sin\theta$. Suất điện động cảm ứng trong vành này là

$$\varepsilon = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \pi r^2 B\dot{\theta}\cos\theta$$

và dòng điện cảm ứng là

$$di = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi r^2 B\dot{\theta}\cos\theta}{R},$$

với R là điện trở của vành. Gọi h là chiều dày của đồng xu. Khi đó ta có

$$R = \frac{2\pi r}{\sigma h dr}.$$

Do đó,

$$di = \frac{Br\dot{\theta}\cos\theta\sigma h dr}{2}.$$

Mômen từ của vành là

$$dm = \pi r^2 di = \frac{\pi r^3 B\dot{\theta}\cos\theta\sigma h dr}{2},$$

và mômen của lực từ là

$$d\tau_m = |\mathbf{dm} \times \mathbf{B}| = \frac{\pi r^2 B^2\dot{\theta}\cos^2\theta\sigma h dr}{2}.$$

Gọi bán kính của đồng xu là r_0, khi đó mômen lực từ tác dụng lên cả đồng xu là

$$\tau_m = \int d\tau_m = \int_0^{r_0} \frac{\pi B^2\dot{\theta}\cos^2\theta\sigma h}{2} r^3 dr = \frac{\pi r_0^4 B^2\dot{\theta}\cos^2\theta\sigma h}{8}$$

Mặt khác, mômen của trọng lực là

$$\tau_g = mgr_0 \sin\theta = \pi r_0^3 \rho h g \sin\theta \,.$$

Từ $\tau_m = \tau_g$, ta nhận được

$$dt = \frac{B^2 r_0 \sigma}{8g\rho} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta \,.$$

Giả thiết đồng xu bắt đầu đổ xuống tại $\theta = \theta_0$, khi đó thời gian đổ xuống sẽ là

$$\begin{aligned} T = \int dt = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{B^2 r_0 \sigma}{8g\rho} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta \\ = \frac{B^2 \sigma r_0}{8g\rho} \left[-\cos\theta_0 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos\theta_0}{1-\cos\theta_0} \right) \right] . \end{aligned}$$

Sử dụng các số liệu đã cho và lấy $r_0 = 0,01$ m, $\theta_0 = 0,1$ rad., ta có ước lượng

$$T \approx 6,8 \text{ s} \,.$$

Từ đây ta có thể kết luận rằng thế năng chuyển đổi chủ yếu thành nhiệt năng bởi vì thời gian cần thiết để đổ xuống trong một từ trường mạnh dài hơn nhiều so với thời gian nó đổ khi không có từ trường.

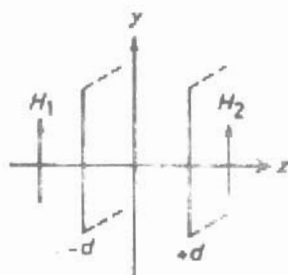
2071

Giả thiết rằng bên trong một vật liệu các phương trình sau

$$\begin{aligned} c\nabla \times \lambda j = -\mathbf{H} \,, \quad (\lambda \text{ không đổi}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\lambda j) = \mathbf{E} \,. \end{aligned}$$

được thoả mãn chứ không phải định luật Ohm $j = \sigma \mathbf{E}$. (Các phương trình này được biết đến như các phương trình London). Xét một thanh vô hạn của vật liệu này có chiều dày $2d$ ($-d < z < d$). Bên ngoài thanh này là một từ trường không đổi song song với bề mặt của thanh, $H_x = H_z = 0, H_y = H_1$ đối với $z < -d$ và $H_y = H_2$ đối với $z > d$, đồng thời $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$ ở mọi nơi như chỉ ra trên hình 2.53. Giả thiết rằng không có các dòng điện bề mặt và các điện tích mặt.

(a) Hãy tìm $\mathbf{H}$ bên trong thanh đó.



Hình 2.53

(b) Hãy tìm j bên trong thanh đó.

(c) Hãy tìm lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên bề mặt của thanh.

(*Princeton*)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng đơn vị Gauss đối với bài tập này. Trong điện động lực học siêu dẫn có hai phương pháp miêu tả. Ở đây ta sử dung phương pháp dòng chứ không dùng phương pháp xử lý vật liệu như một môi trường. Các phương trình Maxwell có liên quan là

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Vì $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{j}$ là một dòng không đổi và từ trường là dừng. Phương trình Maxwell thứ nhất cho

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{j},$$

nghĩa là

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{j}.$$

Sử dụng $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ và các phương trình London ở trên đối với vật liệu đó, ta được

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{4\pi}{\lambda c^2}\mathbf{H} = 0.$$

Từ sự đối xứng chúng ta có thể giả thiết rằng $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z)$ và chỉ có thành phần y tồn tại, nghĩa là $\mathbf{H} = H_y(z)\mathbf{e}_y$. Khi đó phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2H_y}{dz^2} - \frac{4\pi}{\lambda c^2}H_y = 0\,.$$

Nghiệm tổng quát là $H_y = Ae^{-kz} + Be^{kz}$. Sử dụng các điều kiện biên đã cho ta có

$$\begin{cases} H_y(d) = Ae^{-kd} + Be^{kd} = H_2\,, \\ H_y(-d) = Ae^{kd} + Be^{-kd} = H_1\,, \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$A = \frac{H_1e^{kd} - H_2e^{-kd}}{e^{2kd} - e^{-2kd}}\,, \quad B = \frac{H_2e^{kd} - H_1e^{-kd}}{e^{2kd} - e^{-2kd}}\,.$$

(a) Bên trong thanh vật liệu chỉ có thành phần y xuất hiện. Đó là

$$\begin{aligned} H_y(z) &= Ae^{-kz} + Be^{kz} \\ &= \frac{H_2\sinh[k(z+d)] - H_1\sinh[k(z-d)]}{\sinh(2kd)}\,. \end{aligned}$$

(b) Từ phương trình Maxwell $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla\times\mathbf{H}$ và $\mathbf{H} = H_y(z)\mathbf{e}_y$ ta có $\mathbf{j} = j_x\mathbf{e}_x$ với

$$j_x = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{k\{H_2\cosh[k(z+d)] - H_1\cosh[k(z-d)]\}}{\sinh(2kd)}\,.$$

(c) Lực tác dụng lên thanh vật liệu đó là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\times\mathbf{H}dV \\ &= \frac{\mathbf{e}_z}{c}\int\left(-\frac{c}{4\pi}\right)\frac{\partial H_y}{\partial z}H_y dz dS\,. \end{aligned}$$

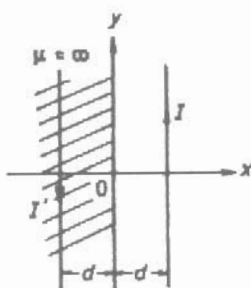
Do đó lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên bề mặt là

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\frac{\mathbf{e}_z}{4\pi}\int H_y\frac{\partial H_y}{\partial z}dz = -\frac{\mathbf{e}_z}{4\pi}\int H_y dH_y \\ &= -\frac{1}{8\pi}(H_2^2 - H_1^2)\mathbf{e}_z\,. \end{aligned}$$

2072

Một dây dẫn mỏng, dài mang một dòng điện I nằm song song với một tấm sắt bán vô hạn và cách tấm sắt đó một khoảng cách d như thấy trên hình 2.54. Giả thiết sắt có độ từ thẩm vô hạn, hãy xác định độ lớn và hướng của lực tác dụng lên một đơn vị chiều dài trong dây dẫn.

(UC, Berkeley)



Hình 2.54

Lời giải:

Sử dụng phương pháp ảnh. Dòng điện ảnh là I' được đặt tại $x = -d$ và ngược hướng với I, có độ lớn

$$I' = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I \,.$$

Với $\mu \to \infty$, $I' = I$. Từ trường tại vị trí $x = d$ do I' tạo ra được xác định theo định luật Ampe về lưu số là $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\mathbf{e}_z$. Do đó lực tác dụng lên một đơn vị chiều dài của dây dẫn là

$$\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} = IB\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}\mathbf{e}_x \,.$$

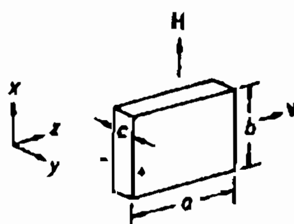
2073

Một khối kim loại không tích điện có dạng hình hộp chữ nhật với các cạnh là a, b, c. Khối đó chuyển động với tốc độ v trong một từ trường có cường độ $\mathbf{H}$ như thấy trong hình 2.55. Hãy xác định cường độ điện trường trong khối

đó và mật độ điện tích cả ở bên trong và ở trên khối đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:



Hình 2.55

Ở trạng thái cân bằng không có lực nào tác dụng lên các êlectron khối kim loại, nghĩa là, $-e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. Do đó

$$\mathbf{E} = -v \times \mathbf{B} = -\mu_0 v \times \mathbf{H} = -\mu_0 v H \mathbf{e}_y .$$

Mật độ điện tích trong khối là

$$\rho = \varepsilon \nabla \cdot E = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}(-\mu_0 v H) = 0 .$$

Do đó không có điện tích bên trong khối. Mật độ điện tích mặt σ được xác định bởi điều kiện biên

$$\sigma = \pm D_n = \pm \varepsilon_0 E_n .$$

Vì E hướng theo trục y nên σ chỉ xuất hiện trên các mặt được tạo bởi các cạnh a, b và có độ lớn là

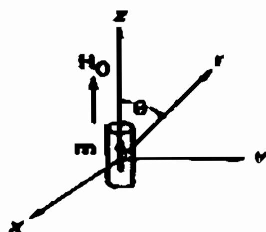
$$\sigma = \pm \varepsilon_0 E = \pm \varepsilon_0 \mu_0 v H ,$$

và dấu của nó như đã chỉ ra trên hình 2.55.

2074

Trong hình 2.56, một cái kim sắt dài 1 cm, đường kính 0,1 cm được đặt trong từ trường đều $H_0 = 1000$ Gs với trục dài của nó nằm dọc theo hướng từ trường. Hãy dẫn ra một biểu thức gần đúng của $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ đối với khoảng cách $r \gg 1$ cm. Tại đây r được đo từ tâm của cái kim, được coi như gốc toạ độ.

(*Chicago*)



Hình 2.56

(Ghi chú: Giá trị bão hoà của **B** trong sắt xấp xỉ bằng 2000 Gs).

Lời giải:

Đối với khoảng cách $r \gg 1$ cm cái kim sắt có thể được coi như một lưỡng cực từ với mômen là **m**. Lấy trục z dọc theo trục của cái kim, ta có thể viết

$$\mathbf{H}_{\text{ext}} = H_0\mathbf{e}_z\,, \quad \mathbf{m} = m\mathbf{e}_z\,.$$

Trong hệ đơn vị Gauss, từ trường tại r xấp xỉ là

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \nabla\left(\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\,.$$

Vì từ trường do kim sắt tạo ra yếu hơn nhiều so với từ trường ngoài H_0 nên $m/r^3 \ll \mathbf{H}_0$. Vì thành phần tiếp tuyến của **H** liên tục tại biên nên từ trường trong kim sắt có thể lấy gần đúng là

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = \mathbf{H}_0\,.$$

Khi đó, độ từ hoá của cái kim được viết như sau

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_{\text{in}} - \mathbf{H}_{\text{in}})\,.$$

Với thể tích của kim

$$V = (0,05)^2\pi\ \text{cm}^3\,,$$

$B_{\text{in}} = 2\times10^4$ Gs, $H_{\text{in}} \approx H_0 = 10^3$ Gs, mômen từ của cái kim sẽ là

$$m = vM = \frac{(0,05)^2\pi}{4\pi}\times(2-0,1)\times10^4 = 11,9\ \text{Gs}\cdot\text{cm}^3\,.$$

Trong hệ toạ độ cực, từ trường tại những khoảng cách $r \gg 1$ cm có các thành phần sau

$$H_r = H_C \cos\theta + 2m\frac{\cos\theta}{r^3} = \left(1000 + \frac{23,8}{r^3}\right)\cos\theta \text{ Gs},$$

$$H_\theta = -H_C \cos\theta + \frac{m\sin\theta}{r^3} = \left(-1000 + \frac{11,9}{r^3}\right)\sin\theta \text{ Gs}.$$

2075

Một quả cầu kim loại đã tích điện có khối lượng 5 kg, bán kính 10 cm chuyển động trong chân không với tốc độ 2400 m/s. Bạn muốn thay đổi hướng chuyển động của quả cầu bằng cách tác động lên nó, hoặc bằng phương pháp tĩnh điện, hoặc bằng phương pháp từ trong vùng 1 m × 1 m × 100 m.

(a) Nếu giới hạn bởi tổng năng lượng dự trữ (điện hoặc từ) trong thể tích 100 m^3, bạn sẽ nhận được một lực lớn hơn bằng cách tác động lên quả cầu một từ trường **B** hay một điện trường **E**?

(b) Đối với một điện trường cực đại (do điện tích của quả cầu) có giá trị 10 kV/cm tại bề mặt quả cầu, hãy tìm tốc độ ngang của quả cầu tại điểm cuối của đường bay 100 m như là một hàm của trường ngoài (**B** hoặc **E**)?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Mật độ năng lượng điện là $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ và mật độ năng lượng từ là $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Để ước lượng bậc độ lớn, ta giả thiết cường độ trường giống nhau ở mọi điểm trong vùng được xét. Đối với mật độ năng lượng giống nhau, $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$, ta có $\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$ và

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{qE}{qvB} = \frac{c}{v} \gg 1$$

Điều này chỉ ra rằng, lực tác dụng lên quả cầu kim loại bởi điện trường lớn hơn nhiều so với lực tác dụng bởi từ trường đối với cùng một năng lượng dự trữ.

(b) Điện trường cực đại trên bề mặt quả cầu kim loại có $E_0 = 10$ kV/cm sẽ giới hạn điện tích cực đại Q_m chứa trong quả cầu cũng như độ lớn của trường

ngoài (**E** hoặc **B**). Nếu một điện trường ngoài **E** được đặt vào thì mật độ điện tích mặt là (xem bài tập **1065**)

$$\sigma = \sigma_0 + 3\varepsilon_0 E \cos\theta$$

trong đó các trục cực được lấy theo hướng của **E** và σ_0 là mật độ điện tích mặt do điện tích Q sinh ra đã chứa sẵn trên quả cầu, nghĩa là

$$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

r là bán kính của quả cầu. Điện trường trên bề mặt quả cầu được cho bởi $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ và điện trường cực đại E_0, xuất hiện tại $\theta = 0$. Do đó

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + 3E,$$

và tổng điện tích của quả cầu sẽ là

$$Q = 4\pi r^2\sigma_0 = 4\pi\varepsilon_0 r^2(E_0 - 3E), \quad \left(E < \frac{1}{3}E_0\right).$$

Thời gian để quả cầu di chuyển một khoảng cách l là $\Delta t = \frac{l}{v}$. Gia tốc ngang là $\frac{QE}{m}$ nếu chúng ta giả thiết $E_\perp = E$. Khi đó tốc độ ngang tại điểm cuối của Δt là

$$v_\perp = \frac{QE}{m}\Delta t = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2(E_0 - 3E)\cdot El}{mv_0}, \quad \left(E < \frac{1}{3}E_0\right).$$

Nếu thay thế điện trường bằng một từ trường ngoài, phương trình trên chỉ cần sửa đổi bằng cách thay E bằng $v_0 B$, kết quả sẽ là

$$v_\perp = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2(E_0 - 3v_0 B)Bl}{m}, \quad \left(B < \frac{E_0}{3v_0}\right).$$

Nếu $E \geq \frac{1}{3}E_0$ hoặc $B \geq \frac{E_0}{3v_0}$, điện tích của quả cầu kim loại bằng 0 và tốc độ ngang cũng bằng 0. Từ những kết quả trên chúng ta cũng có thể thấy rằng tốc độ ngang là cực đại đối với $E = E_0/9$ hoặc $B = E_0/9V_0$, suy ra

$$v_{\perp m} = \frac{8\pi\varepsilon_0 r^2 E_0^2 l}{27mv_0} = \frac{8\pi \times \frac{10^{-9}}{4\pi\times 9} \times 0,1^2 \times 10^{6\times 2} \times 100}{27 \times 5 \times 2400}$$
$$= 6,86 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

và độ dịch chuyển ngang cực đại của quả cầu là

$$v_{\perp m}\Delta t = \frac{v_m l}{v} = \frac{6,86 \times 10^{-4} \times 100}{2400} = 2,86 \times 10^{-5} \text{ m},$$

giá trị này nhỏ, có thể bỏ qua so với kích thước ngang của không gian (1 m).

2076

Chứng minh rằng lực giữa hai lưỡng cực từ tỉ lệ nghịch với luỹ thừa bậc bốn của khoảng cách giữa các tâm của chúng, bất kể sự định hướng tương đối của hai lưỡng cực đó trong không gian là như thế nào. Giả thiết rằng các lưỡng cực này nhỏ so với khoảng cách giữa chúng.

(*Columbia*)

Lời giải:

Gọi mômen từ của hai lưỡng cực là $\mathbf{m}_1$ và $\mathbf{m}_2$. Điện thế năng sinh ra bởi $\mathbf{m}_2$ tại vị trí của $\mathbf{m}_1$ là

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r}}{r^3},$$

trong đó $\mathbf{r}$ hướng từ $\mathbf{m}_2$ đến $\mathbf{m}_1$. Vì từ trường là $\mathbf{B} = -\mu_0\nabla\varphi_m$, nên lực tác dụng lên $\mathbf{m}_1$ là

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m &= \nabla(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{B}) = \nabla[\mathbf{m}_1\cdot(-\mu_0\nabla\varphi_m)]\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left[\mathbf{m}_1\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)\right]\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left[\mathbf{m}_1\cdot\left(\frac{\mathbf{m}_2}{r^3}-\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r})}{r^5}\right)\right]\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left[\frac{3(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r})}{r^5}-\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2}{r^3}\right].\end{aligned}$$

Vì cả hai thành phần trong biểu thức của gradient tỉ lệ với $\frac{1}{r^3}$, nên $\mathbf{F}$ sẽ tỉ lệ với $\frac{1}{r^4}$.

2077

Một lưỡng cực từ $\mathbf{m}$ được dịch chuyển từ xa vô hạn đến một điểm trên trục của một vòng dây tròn dẫn điện hoàn hảo (điện trở bằng 0), cố định, có bán kính b và độ tự cảm L. Tại vị trí cuối cùng của nó, lưỡng cực này được định hướng dọc theo trục của vòng dây và đặt cách tâm của vòng dây một khoảng cách z. Ban đầu, khi lưỡng cực này còn ở rất xa, dòng điện trong vòng dây bằng 0 (hình 2.57).

(a) Hãy tính dòng điện trong vòng dây khi lưỡng cực này ở vị trí cuối cùng của nó.

(b) Đối với các vị trí giống nhau, hãy tính lực giữa lưỡng cực và vòng dây.

(UC, Berkeley)



Hình 2.57

Lời giải:

(a) Suất điện động cảm ứng của vòng dây được tính theo công thức

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Tích phân theo thời gian ta được

$$L[I(f) - I(i)] = \int [\mathbf{B}(f) - \mathbf{B}(i)]\cdot d\mathbf{S}$$

Ban đầu, khi lưỡng cực ở xa,

$$I(i) = 0, \quad \mathbf{B}(i) = 0$$

Viết cho vị trí cuối cùng $I = I(f)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(f)$, ta có

$$LI = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Xét một điểm P trong mặt phẳng của vòng, [illegible] sao cho P có vectơ bán kính là $\rho\mathbf{e}_\rho$. Khi đó vectơ bán kính từ m đến P là $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho - z\mathbf{e}_z$. Cảm ứng từ tại P do m sinh ra là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right]$$

trong đó $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$. Do $d\mathbf{S} = \rho d\rho d\theta \mathbf{e}_z$ ta có

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\left(\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)}{r^5} - \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_z}{r^3}\right)\rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi\int_0^b\left[\frac{3mz^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} - \frac{m}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right]\rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 m}{2}\left[(b^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(b^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right],\end{aligned}$$

và dòng cảm ứng trong vòng dây là

$$I = \frac{\mu_0 m}{2L}\left[(b^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(b^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

Theo định luật Lenz, chiều của dòng điện theo chiều kim đồng hồ khi nhìn từ vị trí của m đặt như trong hình 2.57.

(b) Đối với vòng dây, với dòng điện I như trên, từ trường do nó sinh ra tại một điểm trên trục của nó là

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0^2 m}{4L}\frac{b^4}{(b^2+z^2)^3}\mathbf{e}_z.$$

Năng lượng của lưỡng cực từ m trong từ trường B′ là

$$W = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}'$$

và lực tương tác giữa lưỡng cực và vòng dây là

$$F = -\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{3\mu_0^2 m^2 b^4 z}{2L(b^2+z^2)^4}.$$

2078

Lực tác dụng lên một dòng điện kín nhỏ có mômen từ $\boldsymbol{\mu}$ trong một từ trường $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ là

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\times\nabla)\times\mathbf{B}.$$

Mặt khác, lực tác dụng lên một lưỡng cực từ tích $\boldsymbol{\mu}$ được cho bởi

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\mathbf{B}.$$

(a) Sử dụng sự phân tích vectơ và khai triển biểu thức đối với lực tác dụng lên một dòng điện kín, thông qua các nguồn từ trường địa phương, hãy thảo luận các điều kiện làm cho các lực trên là khác nhau.

(b) Hãy đề xuất một thí nghiệm sử dụng điện trường hoặc từ trường ngoài, để có thể xác định (về nguyên lý) mômen từ của một hạt nhân được sinh ra là do dòng điện hay là do từ tích.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Khai triển biểu thức đối với lực tác dụng lên một dòng điện kín

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - \mu(\nabla \cdot \mathbf{B}) .$$

Từ trường ngoài $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ thoả mãn phương trình $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, do đó phương trình trên có thể viết lại như sau

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mu \times (\nabla \times \mathbf{B}) .$$

So sánh với biểu thức đối với lực tác dụng lên một lưỡng cực từ, nó có thêm một số hạng $\boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{B})$. Như vậy hai lực khác nhau trừ khi $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ trong trường hợp dòng điện kín, điều này có nghĩa là $\mathbf{J} = \dot{\mathbf{D}} = 0$ trong vùng dòng điện vòng.

(b) Lấy trục z dọc theo hướng mômen từ của hạt nhân và đặt một từ trường $\mathbf{B} = B(z)\mathbf{e}_z$ theo hướng này. Theo biểu thức $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}$, lực từ trường bằng 0. Nhưng theo biểu thức $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ thì lực không bằng 0. Như vậy mômen từ tạo ra bởi từ tích hay bởi dòng điện phụ thuộc vào chuyện hạt nhân có chịu tác dụng một lực từ hay không.

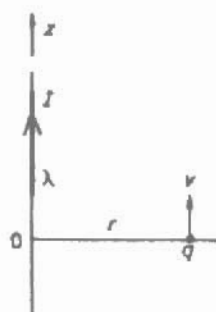
2079

Một hạt có điện tích q chuyển động với tốc độ v song song với một dây dẫn có phân bố điện tích tuyến tính đồng đều λ trên một đơn vị chiều dài. Dây dẫn cũng mang một dòng điện I như thấy trên hình 2.58. Hạt điện tích phải có tốc độ là bao nhiêu để có thể chuyển động theo đường thẳng song song với sợi dây dẫn tại vị trí cách dây dẫn một khoảng cách r?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Xét một hình trụ dài bán kính r có trục trùng với sợi dây dẫn. Kí hiệu mặt cong của nó đối với một đơn vị chiều dài S và chu vi tiết diện của nó bằng C.



Hình 2.58

Sử dụng định lý thông lượng Gauss và định luật Ampe về lưu số ta có các biểu thức sau

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \lambda/\varepsilon_0 \,, \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \,,$$

Do đối xứng trục, trong hệ toạ độ trụ (r, θ, z) với gốc toạ độ 0 tại sợi dây, ta tìm được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{e}_r \,, \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$$

Tổng hợp lực tác động lên hạt điện tích có tốc độ $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{e}_r + \frac{q\mu_0 I}{2\pi r} v(-\mathbf{e}_r) \,. \end{aligned}$$

Để duy trì hạt chuyển động theo hướng z, lực theo hướng bán kính này phải triệt tiêu, nghĩa là

$$\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\mu_0 I}{2\pi r} v = 0 \,,$$

Từ đó suy ra

$$v = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 I} = \frac{\lambda c^2}{I} \,.$$

2080

Biểu thức lực Lorentz đối với một hạt có khối lượng m và điện tích q là

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right).$$

(a) Chứng minh rằng nếu hạt này chuyển động trong một điện trường không phụ thuộc thời gian $\mathbf{E} = -\nabla\phi(x, y, z)$ và trong bất kì từ trường nào thì khi đó năng lượng $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\varphi$ của nó đều là một hằng số.

(b) Giả thiết hạt này chuyển động theo trục x trong điện trường $\mathbf{E} = Ae^{-t/\tau}\mathbf{e}_x$, trong đó A và τ đều là hằng số. Giả thiết từ trường bằng 0 theo trục x và $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Hãy tìm $x(t)$.

(c) Trong câu (b) $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - qxAe^{-t/\tau}$ có phải là một hằng số không? (Hãy trình bày ngắn gọn lập luận của bạn).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vì

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right)$$

ta có

$$(m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = q\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}.$$

Từ đây suy ra

$$\mathbf{v}\cdot(m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{q}{c} = 0.$$

Xét

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + q\phi\right] = m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} + q\frac{d\phi}{dt} = m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} + q\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$
$$= \mathbf{v}\cdot(m\mathbf{v} + q\nabla\phi) = \mathbf{v}\cdot(m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = 0,$$

trong đó chúng ta đã sử dụng biểu thức

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \mathbf{v}\cdot\nabla\phi.$$

do đó

$$\frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{Const}.$$

(b) Lực từ $\mathbf{F}_m = q\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}$ vuông góc với v sao cho nếu hạt chuyển động theo hướng x thì lực từ sẽ không ảnh hưởng đến thành phần chuyển động theo phương x. Với E theo hướng x, sự chuyển động của hạt sẽ bị giới hạn theo hướng đó. Theo định luật Newton thứ hai ta có

$$m\ddot{x} = qE = qAe^{-t/\tau},$$

nghĩa là

$$mdv = qAe^{-t/\tau}dt.$$

với

$$v(0) = 0, \quad mv = -qA\tau e^{-t/\tau} + qA\tau,$$

hay

$$dx = qA\tau(1 - e^{-t/\tau})\frac{dt}{m}.$$

Với $x(0) = 0$, phương trình này cho

$$x(t) = qA\tau\frac{t}{m} + \frac{qA\tau^2}{m}e^{-t/\tau} - \frac{qA\tau^2}{m}$$
$$= \frac{qA\tau}{m}[(t-\tau) + \tau e^{-t/\tau}].$$

(c)
$$\frac{1}{2}mv^2 - qxAe^{-t/\tau} = \frac{1}{2}m\left[\frac{qA\tau}{m}(1 - e^{t/\tau})\right]^2 - qA\frac{qA\tau}{m}[(t-\tau) + \tau e^{-t/\tau}]e^{-t/\tau}.$$

Vì

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - qxAe^{-t/\tau}\right) \neq 0$$

nên biểu thức này không phải là một hằng số.

2081

Một hạt điểm có khối lượng m và mômen lưỡng cực từ M, chuyển động theo một quỹ đạo tròn có bán kính R quanh một lưỡng cực từ cố định có mômen $\mathbf{M}_0$ đặt tại tâm của quỹ đạo tròn đó. Các vectơ $\mathbf{M}_0$ và M là đối song

song với nhau (tức cùng phương nhưng ngược chiều) và vuông góc với mặt phẳng của quỹ đạo.

(a) Hãy tính tốc độ v của lưỡng cực chuyển động quanh quỹ đạo.

(b) Quỹ đạo này có ổn định đối với các nhiễu loạn nhỏ không? Hãy giải thích. (Chỉ xét chuyển động trong mặt phẳng).

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Từ trường do lưỡng cực có mômen $\mathbf{M}_0$ sinh ra tại một điểm có vectơ bán kính $\mathbf{r}$ tính từ tâm của quỹ đạo tròn là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}_0}{r^3}\right].$$

Từ trường này tác dụng một lực lên hạt chuyển động theo quỹ đạo tròn là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B})|_{r=R}.$$

Lưu ý $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}_0 = -MM_0$, $\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = 0$, ta có

$$\mathbf{F} = -\frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi R^4}\mathbf{e}_r.$$

Lực này hướng về tâm và làm cho hạt chuyển động tròn. Cân bằng lực này với lực hướng tâm

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi R^4},$$

sẽ cho tốc độ của hạt

$$v = \sqrt{\frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi mR^3}}.$$

(b) Năng lượng của hạt được viết như sau

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - \frac{\mu_0 MM_0}{4\pi r^3} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U(r),$$

với

$$U(r) = -\frac{\mu_0 MM_0}{4\pi r^3} + \frac{L^2}{2mr^2};$$

trong đó L là mômen động lượng bảo toàn và số hạng đầu tiên là thế năng của $\mathbf{M}$ trong từ trường $\mathbf{B}$, $-\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, đối với một quỹ đạo tròn bán kính r. Lưu ý

rằng $(\frac{dU}{dr})_{r=R} = 0$ và $(\frac{d^2U}{dr^2})_{r=R} < 0$, sao cho $U(R)$ là cực đại và quỹ đạo đó là không ổn định đối với những nhiễu loạn nhỏ của r.

2082

Một xôlênôit có bán kính b và chiều dài l được quấn sao cho từ trường ở trục là

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0\mathbf{e}_z, & r < b, \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Một hạt có điện tích q được bắn ra với tốc độ v vuông góc với thanh ở tâm có bán kính a (xem H. 2.59). Lực điện tác dụng lên hạt được cho bởi $q\mathbf{E} = f(r)\mathbf{e}_r$, với $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = 0$. Ta giả thiết v đủ lớn sao cho hạt bắn vọt ra ngoài xôlênôit mà không đập vào xôlênôit.

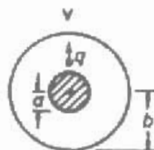
(a) Hãy tìm mômen động lượng của hạt quanh trục của xôlênôit đối với $r > b$.

(b) Nếu điện trường bên trong xôlênôit bằng 0 trước khi hạt rời thanh và sau khi hạt đã đi xa, điện trường đó trở thành

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\mathbf{e}_r, & r > a, \\ 0, & r < a, \end{cases}$$

hãy tính mômen động lượng của trường điện từ và bàn luận về trạng thái cuối cùng của xôlênôit nếu xôlênôit có thể quay tự do quanh trục của nó. Bỏ qua các hiệu ứng biên.

(*Wisconsin*)



Hình 2.59

Lời giải:

(a) Vì v rất lớn, ta có thể coi độ lệch khỏi quỹ đạo thẳng là rất nhỏ trong quá trình bắn ra của hạt điện tích. Gọi $\mathbf{v}_\perp$ là tốc độ ngang của hạt. Ta có

$$m\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,.$$

Vì $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}, dv_\perp = \frac{q}{m}B_0 v dt = \frac{q}{m}B_0 dr$ và

$$v_\perp(b) = \int_a^b \frac{q}{m}B_0 dr = \frac{q}{m}B_0(b-a)\,.$$

Tại $r = b$ mômen động lượng của hạt đối với trục của xôlênôit có độ lớn là

$$|\mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\perp(b)|_{r=b} = mbv_\perp(b) = qB_0 b(b-a)$$

và có hướng $-\mathbf{e}_z$. Do đó, mômen động lượng là

$$\mathbf{J}_p = -qB_0 b(b-a)\mathbf{e}_z\,.$$

Đối với $r > b, \mathbf{B} = 0$ và $\mathbf{J}_p$ vừa được xét đến. Như vậy $\mathbf{J}_p$ là mômen động lượng của hạt đối với trục đối với $r > b$.

(b) Sau khi hạt đi xa khỏi xôlênôit, mật độ động lượng của trường điện từ tại một điểm trong xôlênôit là

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}\,,$$

và mật độ mômen động lượng được cho bởi biểu thức sau

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{B_0 q}{2\pi l}\mathbf{e}_z\,,$$

mật độ này là đồng đều. Vì không có trường bên ngoài xôlênôit và bên trong thanh ở tâm, nên mômen động lượng toàn phần của trường điện từ là

$$\mathbf{J}_{\mathrm{EM}} = \pi(b^2 - a^2)l\mathbf{j} = \frac{qB_0(b^2 - a^2)}{2}\mathbf{e}_z\,.$$

Ban đầu, $\mathbf{E} = 0, \mathbf{v}_\perp = 0$ và xôlênôit ở trong trạng thái đứng yên, như vậy mômen động lượng toàn phần của hệ bằng 0. Mômen động lượng cuối cùng của xôlênôit có thể nhận được từ nguyên lý bảo toàn của mômen động lượng toàn phần

$$\mathbf{J}_S = -\mathbf{J}_{\mathrm{EM}} - \mathbf{J}_p = \frac{qB_0}{2}(b-a)^2\mathbf{e}_z\,.$$

Điều này có nghĩa rằng ở trạng thái cuối cùng, xôlênôit quay quanh trục giữa của nó với một tốc độ góc không đổi, hướng của sự quay này liên quan với hướng $\mathbf{e}_z$ bằng quy tắc vặn ốc vít.

2083

Giả thiết rằng một nam châm uốn cong với các cực tại $x = \pm x_0$ có một từ trường trong mặt phẳng trung trực chỉ phụ thuộc vào $z, B_x = B_x(z)$, với gốc toạ độ được chọn tại tâm của khe hở nam châm. Thành phần nào phải tồn tại bên ngoài mặt phẳng trung trực? Nếu một hạt có điện tích e và động lượng P đi tới dọc xuống theo rơi xuống trục z trong mặt phẳng trung trực, hãy tìm các biểu thức tích phân đối với góc uốn cong θ và độ dịch chuyển y như một hàm của z trong nam châm. Không phải tính tích phân.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vì không có dòng điện giữa các cực của nam châm nên $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ hay

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 .$$

Điều này cho thấy rằng khi B_x phụ thuộc vào z, $B_z \neq 0$, nghĩa là bên ngoài mặt phẳng trung trực có một thành phần z.

Động năng của một hạt tích điện chuyển động trong một từ trường được bảo tồn. Do đó độ lớn tốc độ của nó là một hằng số. Gọi θ là góc uốn cong, khi đó

$$v_y = v\sin\theta , \quad v_z = v\cos\theta .$$

Vì $v_x = 0$, phương trình chuyển động của hạt theo hướng y là

$$m\frac{dv_y}{dt} = eB_x v_z ,$$

hay

$$mv\frac{d}{dt}(\sin\theta) = eB_x v\cos\theta .$$

Suy ra

$$d\theta = \frac{eB_x}{m}dt = \frac{eB_x}{m} \cdot \frac{dz}{v\cos\theta} ,$$

hay

$$\cos\theta d\theta = \frac{e}{P}B_x dz .$$

Giả thiết tại $t = 0$, hạt ở tại gốc toạ độ và tốc độ của nó theo hướng $+z$. Khi đó $\theta(z)|_{z=0} = 0$ và ta có

$$\int_0^\theta \cos\theta d\theta = \frac{e}{P}\int_0^z B_x dz',$$

hoặc

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{e}{P}\int_0^z B_x dz'\right].$$

Độ dịch chuyển theo phương y được cho bởi biểu thức sau

$$\begin{aligned} y &= \int_0^t v_y dt' = \int_0^z v\sin\theta \frac{dz'}{v\cos\theta} \\ &= \int_0^z \tan\theta dz' = \int_0^z \frac{\frac{e}{P}\int_0^{z'} B_x(z'')dz''}{[1-(\frac{e}{P}\int_0^{z'} B_x(z'')dz'')^2]^{1/2}} dz'. \end{aligned}$$

2084

Một sợi dây dẫn dài vô hạn nằm dọc theo trục z (nghĩa là tại $x = 0, y = 0$) và mang một dòng điện i theo hướng $+z$. Một chùm tia các nguyên tử hydro phát ra tại điểm $x = 0, y = b, z = 0$ với tốc độ $\mathbf{v} = v_0\mathbf{e}_z$. Các nguyên tử hydro được phân cực sao cho các mômen từ μ_H của chúng đều chỉ theo hướng $+x$, nghĩa là $\boldsymbol{\mu} = \mu_H\mathbf{e}_x$.

(a) Lực và mômen lực tác dụng lên các nguyên tử hydro này do từ trường của sợi dây sinh ra là bao nhiêu?

(b) Câu trả lời của bạn thay đổi thế nào nếu các nguyên tử hydro được phân cực theo cách mà lúc ban đầu các mômen từ của chúng chỉ theo hướng $+z$, nghĩa là $\boldsymbol{\mu} = \mu_H\mathbf{e}_z$.

(c) Trong trường hợp nào của hai trường hợp trên, các nguyên tử hydro sẽ có tiến động Larmor? Mô tả hướng của tiến động và tính tần số tiến động.

(*Columbia*)

Lời giải:

Các nguyên tử hydro đang chuyển động trong mặt phẳng yz. Trong mặt phẳng này, từ trường do sợi dây dài vô hạn sinh ra tại một điểm cách sợi dây dẫn một khoảng cách y được viết như sau

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\mathbf{e}_x.$$

(a) Với $\boldsymbol{\mu} = \mu_H \mathbf{e}_x$, năng lượng của một nguyên tử hydro trong từ trường $\mathbf{B}$ là

$$W = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi y}.$$

Như vậy lực do từ trường tác dụng lên nguyên tử là

$$\mathbf{F} = \nabla W|_{y=b} = \frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b^2} \mathbf{e}_y,$$

và mômen lực tác dụng lên nguyên tử đó là

$$Ł = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = 0.$$

(b) Với $\boldsymbol{\mu} = \mu_H \mathbf{e}_z$, năng lượng là $W = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = 0$. Do đó, lực tác dụng lên nguyên tử là $\mathbf{F} = 0$ và mômen lực là

$$Ł = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}|_{y=b} = -\frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b} \mathbf{e}_y.$$

(c) Trong trường hợp (b) vì nguyên tử đã chịu tác dụng của mômen lực nên sẽ xảy ra tiến động Larmor. Mômen động lượng M của nguyên tử và mômen từ của nó liên hệ với nhau bởi công thức

$$\mu_H = g \frac{e}{2m} M,$$

ở đó g là hệ số Landé. Tốc độ biến thiên của mômen động lượng bằng mômen lực tác dụng lên nguyên tử

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = Ł.$$

Độ lớn của M không thay đổi nhưng Ł sẽ làm xuất hiện tiến động của $\mathbf{M}$ quanh $\mathbf{B}$, được gọi là tiến động Larmor, có tần số ω được cho bởi công thức

$$\left| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right| = M\omega,$$

hay

$$\omega = \frac{L}{M} = \frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b M} = \frac{e g \mu_0 i}{4\pi b m}.$$

Tiến động này ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía x dương.

2085

Một quả cầu sắt đã được từ hoá đồng đều, có bán kính R, được treo lơ lửng trên trần của một bình kim loại lớn được hút chân không bằng một sợi chỉ cách điện. Cực bắc của nam châm ở phía trên và cực nam ở phía dưới. Quả cầu được tích điện đến điện thế 3.000 V so với các thành của bình.

(a) Hệ thống tĩnh này có mômen động lượng hay không?

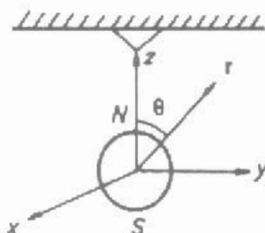
(b) Các êlectron được phóng vào trong bình dọc theo một trục cực và làm trung hoà một phần điện tích trên quả cầu. Điều gì sẽ xảy ra đối với quả cầu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ toạ độ như trên hình 2.60

(a) Hệ này có mômen động lượng.



Hình 2.60

(b) Gọi $\mathbf{m}$ là mômen từ của quả cầu. Từ trường tại một điểm $\mathbf{r}$ ở bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right].$$

Giả thiết quả cầu mang một điện tích Q. Vì quả cầu là một vật dẫn, nên điện trường bên trong nó bằng 0 và điện trường bên ngoài là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}.$$

Do đó, mật độ động lượng điện từ trong không gian ngoài quả cầu, vì $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z = m(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$ trong hệ toạ độ cầu, là

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{Q\mu_0 m\sin\theta}{16\pi^2 r^5}\mathbf{e}_\varphi,$$

và mật độ mômen động lượng là

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = -\frac{\mu_0 m Q \sin\theta}{16\pi^2 r^4}\mathbf{e}_\theta .$$

Do đối xứng, mômen động lượng toàn phần chỉ có thành phần z, nó nhận được bằng cách tích phân thành phần z của $\mathbf{j}$

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{\mu_0 m Q \sin^3\theta}{16\pi^2 r^2}d\varphi d\theta dr = \frac{\mu_0 m Q}{6\pi R} = \frac{2mV}{3c^2},$$

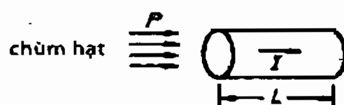
ở đây V là điện áp của quả cầu. Vì các êlectron được phóng theo phương bán kính đến quả cầu, điện tích Q giảm làm cho mômen động lượng điện từ cũng giảm. Tuy nhiên, vì sự bảo toàn mômen động lượng toàn phần, quả cầu sẽ quay quanh trục cực với hướng quay được xác định bằng quy tắc vặn ốc vít. Tốc độ góc quay là

$$\omega = -\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\mu_0 m \Delta Q}{6\pi R I} = -\frac{2m\Delta V}{3c^2 I},$$

trong đó I là mômen quán tính của quả cầu quanh trục cực và $\Delta Q, \Delta V$ là độ biến thiên thay đổi của điện tích và điện thế của quả cầu mà cả hai đều có giá trị âm.

2086

Một ống hình trụ có chiều dài L và bán kính R mang một dòng điện đồng đều I song song với trục của nó như trong hình 2.61.



Hình 2.61

(a) Hãy tìm hướng và độ lớn của từ trường tại một điểm bất kì ở trong ống hình trụ (bỏ qua các hiệu ứng biên).

(b) Một chùm hạt, mỗi hạt có động lượng P song song với trục ống hình trụ và mỗi hạt có điện tích q dương, đi vào đầu của ống hình trụ từ bên trái. Chứng minh rằng sau khi đi qua ống hình trụ chùm hạt sẽ hội tụ tại một điểm.

(Hãy làm phép gần đúng "thấu kính mỏng" bằng cách giả thiết rằng ống hình trụ ngắn hơn nhiều so với tiêu cự. Bỏ qua sự làm chậm và sự tán xạ chùm hạt do vật liệu của ống hình trụ gây ra). Hãy tính tiêu cự.

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ trụ (r, φ, z) với trục z theo trục của ống hình trụ. Từ trường tại một điểm cách trục một khoảng cách r, được cho bởi định luật Ampe về lưu số, sẽ là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\mathbf{e}_\varphi .$$

(b) Lực từ tác dụng lên một hạt trong chùm là

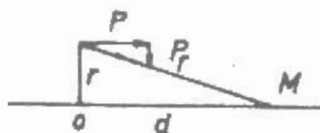
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB\mathbf{e}_r .$$

Do lực này hạt sẽ nhận được một động lượng theo hướng bán kính về phía trục sau khi đi qua ống hình trụ

$$P_r = q\int vBdt = \frac{qvBL}{v} = \frac{\mu_0 qIL}{2\pi R^2}r .$$

Nếu chúng ta bỏ qua sự chậm lại của chùm hạt qua ống hình trụ và sử dụng phép gần đúng thấu kính mỏng thì động lượng theo hướng trục của một hạt vẫn là P sau khi đi ra ngoài ống hình trụ. Tổng hợp P và P_r sẽ làm cho hạt đi qua trục hình trụ tại điểm M như thấy trên hình 2.62. Từ hình vẽ chúng ta tìm được mối quan hệ

$$\frac{P_r}{P} = \frac{r}{d} .$$



Hình 2.62

Do đó tiêu cự là

$$d = \frac{Pr}{P_r} = \frac{2\pi R^2 P}{\mu_0 eIL}$$

và không phụ thuộc vào r. Do đó tất cả các hạt sau khi đi qua ống hình trụ sẽ hội tụ lại điểm M.

2087

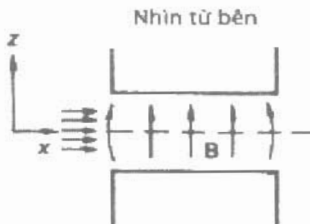
Một nam châm điện lưỡng cực có các mặt cực hình chữ nhật trong mặt phẳng nằm ngang với chiều dài l và chiều rộng w. Thành phần chính của từ trường **B** có hướng thẳng đứng. Một chùm hạt song song, mỗi hạt có khối lượng m và điện tích q, đi vào nam châm với tốc độ v song song với mặt phẳng nằm ngang nhưng tạo một góc φ với đường thẳng trung tâm của nam châm. Kích thước thẳng đứng của chùm hạt có thể so được với khe hở của nam châm. Các hạt rời nam châm tại một góc $-\varphi$ tạo với đường thẳng trung tâm của nam châm, tức là bị uốn cong cong một góc 2φ (xem H. 2.63 và H. 2.64). Hãy chứng minh rằng trường rìa của nam châm sẽ có tác dụng làm hội tụ chùm hạt theo chiều thẳng đứng. Hãy tính một cách gần đúng tiêu cự.

(*Columbia*)

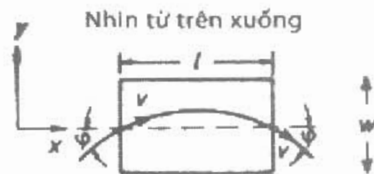
Lời giải:

Khi diện tích cực của nam châm điện lưỡng cực bị giới hạn, từ trường có những đường rìa như thấy trên hình 2.63. Nếu thành phần y của trường rìa bỏ qua được, trường rìa sẽ chỉ có thành phần z và x. Từ $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, ta có

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}.$$



Hình 2.63



Hình 2.64

Giả thiết rằng phạm vi của trường rìa là b. Tại đầu vào của nam châm điện, B_z tăng từ 0 đến B trong khoảng cách b. Đối với phép gần đúng bậc nhất, mối quan hệ trên cho $B_{z,\text{in}} = \frac{B}{b}z$. Thế nhưng tại lối ra, B_z giảm từ B xuống 0 và

nó có $B_{z,\text{out}} = -\frac{B}{b}z$. Tốc độ của các hạt tại đầu vào và đầu ra tương ứng là $\mathbf{v} = v\cos\varphi\mathbf{e}_x + v\sin\varphi\mathbf{e}_y$ và $\mathbf{v} = v\cos\varphi\mathbf{e}_x - v\sin\varphi\mathbf{e}_y$. Như vậy tại cả đầu vào và đầu ra các hạt sẽ được tác dụng bởi một lực có hướng z và ở gần đường thẳng trung tâm của nam châm, đó là

$$F_z = -\frac{qvBz\sin\varphi}{b}.$$

Lực này cho một động lượng thẳng đứng tới các hạt. Thời gian cần thiết để các hạt đi xuyên qua chiều rộng của trường rìa b là

$$\Delta t = \frac{b}{v\cos\varphi}.$$

Do đó động lượng thẳng đứng được tính gần đúng như sau

$$P_z = -F_z\Delta t = -qBz\tan\varphi.$$

Vì P_z là âm đối với $+z$ và dương đối với $-z$, sẽ có một hiệu ứng hội tụ theo chiều thẳng đứng đối với các hạt. Động lượng của các hạt trên mặt phẳng xy là $P = mv$. Lấy tiêu cự là f (từ đầu vào) ta có

$$\frac{2|P_z|}{P} = \frac{|z|}{f},$$

Từ đó ta được

$$f = \frac{mv}{2qB\tan\varphi}.$$

Phương trình chuyển động của một hạt giữa các cực của nam châm là

$$m\frac{dv_y}{dt} = qv_xB$$

hay

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qB}{m},$$

Vì $v_x = v\cos\varphi \approx v, v_y = v\sin\varphi \approx v\varphi$. Nếu góc lệch φ nhỏ, chúng ta có thể lấy thời gian cần thiết để đi ngang qua khoảng cách $\frac{l}{2}$ là

$$t = \frac{l}{2}/v,$$

và có một cách gần đúng

$$\varphi \approx \frac{qBl}{2mv}.$$

Thay thế nó vào biểu thức tính tiêu cự và lấy $\tan\varphi \approx \varphi$, ta có

$$f = \frac{m^2v^2}{q^2B^2l}.$$

2088

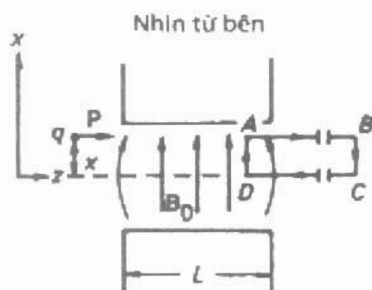
Một nam châm lưỡng cực với các mặt cực hình chữ nhật, từ trường B_0 và các kích thước đã được chỉ rõ trong các hình 2.65 và 2.66. Chúng ta đưa vào một hệ toạ độ có trục x song song với từ trường và trục y, trục z song song với các cạnh của các mặt cực. Hãy chọn mặt phẳng $x = 0$ sao cho nó nằm ở giữa khoảng cách các mặt cực. Giả thiết rằng một hạt có điện tích q và động lượng P song song với trục z được phóng vào nam châm, đi vào vùng giữa các mặt cực tại một chiều cao x trên mặt phẳng trung tâm $x = 0$.

(a) Độ lệch góc gần đúng θ_y là bao nhiêu trong mặt phẳng yz sau khi hạt đi qua nam châm? (Giả thiết $P \gg qBL$)?

(b) Hãy chứng minh rằng độ lệch góc trong mặt phẳng xz sau khi hạt đi qua nam châm được tính gần đúng bằng $\theta_x \approx \theta_y^2 x/L$, với θ_y là độ lệch tìm thấy trong (a). (Gợi ý: Độ lệch này được sinh ra bởi từ trường rìa tác động lên hạt, khi nó đi ra khỏi nam châm).

(c) Hiệu ứng tìm được trong (b) hội tụ hay không hội tụ các hạt vào trục?

(Columbia)



Hình 2.65



Hình 2.66

Lời giải:

Lực từ tác dụng trên hạt có các thành phần

$$Fx = -q(v_y B_z - v_z B_y)\,,$$
$$Fy = -q(v_z B_x - v_x B_z)\,,$$
$$Fz = -q(v_x B_y - v_y B_x)\,.$$

Lưu ý rằng như thấy trên hình 2.65 và 2.66, hệ toạ độ được sử dụng ở đây là thuận trái.

(a) Vì $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_x$ và đều giữa các mặt cực, phương trình chuyển động ngang của hạt là

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qv_zB_0\,.$$

Vì tốc độ v không thay đổi trong từ trường, ta có $v_y = -v\sin\theta_1, v_z = v\cos\theta_1$, với θ_1 là góc lệch trong mặt phẳng yz. Khi $v_y \approx -v\theta_1, v_z = v$, và $P = mv =$ hằng số, phương trình trên trở thành

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{qvB_0}{P}\,,$$

hay

$$d\theta_1 = \frac{qvB_0}{P}dt = \frac{qvB_0}{Pv_z}dz\,,$$

nghĩa là

$$\cos\theta_1 d\theta_1 = \frac{qB_0}{P}dz\,.$$

Lấy tích phân

$$\int_0^{\theta_y}\cos\theta_1 d\theta_1 = \int_0^L \frac{qB_0}{P}dz$$

Ta tìm được

$$\sin\theta_y = \frac{qB_0L}{P}\,.$$

Vì $P \gg qB_0L$, ta có một cách gần đúng

$$\theta_y \approx \frac{qB_0L}{P}\,.$$

(b) Để tính đến hiệu ứng rìa, ta có thể giả thiết $B_y \approx 0$ và một B_z nhỏ được cộng thêm vào từ trường chính $B_0\mathbf{e}_z$. Phương trình chuyển động thẳng đứng của hạt là

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qv_yB_z\,.$$

Khi $v_y \approx -v\theta_y, v_x \approx -v\theta_2, v_z \approx v, dz \approx vdt$, phương trình trên trở thành

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{qv\theta_y}{P}B_z\,.$$

Từ (a) ta có $P \approx \frac{qB_0L}{\theta_y}$. Như vậy

$$d\theta_2 = -\frac{\theta_y^2}{LB_0}B_z dz\,,$$

và độ lệch góc trong mặt phẳng xz là

$$\theta_x = \int_0^{\theta_x} d\theta_2 = -\frac{\theta_y^2}{LB_0}\int_{z_0}^{\infty} B_z dz\,.$$

Tại đầu ra của nam châm, $B_x \approx B_0$. Ta chọn đường kín ABCD, như trong hình 2.65, để tích phân

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 0\,.$$

Lấy tích phân từng đoạn

$$\int_A^B B_z dz = \int_{z_0}^{\infty} B_z dz\,,\quad \int_B^C B_x dx \approx 0\,,$$

$$\int_C^D B_z dz = 0\,,\quad \int_D^A B_x dx = xB_0\,.$$

Lưu ý rằng chúng ta lấy các điểm B,C tại vô hạn và sử dụng điều kiện $B_z = 0$ đối với mặt phẳng trung tâm. Do đó

$$\int_{z_0}^{\infty} B_z dz = -xB_0\,,$$

và

$$\theta_x = \frac{\theta_y^2}{L}x\,.$$

(c) Vì $\theta_x \gtrless 0$ đối với $x \gtrless 0$, hạt sẽ luôn luôn lệch về vùng giữa của nam châm. Do đó hiệu ứng phát hiện trong (b) sẽ làm hội tụ các hạt với tiêu cự là

$$f = v\left|\frac{x}{v_x}\right| = \frac{x}{\theta_x} = \frac{L}{\theta_y^2} = \frac{P^2}{q^2B_0^2L}\,.$$

2089

Khi một dung dịch huyền phù loãng có các hạt hình trụ không đẳng hướng nghịch từ được đặt trong một từ trường đồng đều **H**, người ta đã quan sát được rằng các hạt đó sắp xếp sao cho các trục dài của chúng song song với đường sức từ. Các hạt có đối xứng trụ và chúng có các thành phần của tenxơ độ cảm từ đặc trưng bởi:

$$\chi_x = \chi_y < \chi_z < 0\,.$$

Giả thiết rằng chất lỏng huyền phù này có độ cảm từ bỏ qua được.

(a) Trục z của hạt ban đầu tạo một góc θ với từ trường. Hãy xác định năng lượng định hướng của từ trường?

(b) Mômen lực tác dụng lên hạt trong phần (a) là bao nhiêu?

(c) Xu hướng sắp xếp thẳng hàng sẽ bị chống lại bởi chuyển động Brown. Khi hạt quay trong chất lỏng nó sẽ chịu một mômen lực nhớt có độ lớn $\zeta\dot{\theta}$ với

$$\zeta = 10^{-10}\ \mathrm{gcm}^2 s^{-1}\,.$$

Mômen quán tính của một hạt là $I = 10^{-15}\mathrm{gcm}^2$. Nếu các hạt lúc đầu đã được sắp xếp thẳng hàng bởi từ trường, hãy ước lượng góc căn quân phương $\Delta\theta_{\mathrm{rms}}$ mà các trục phân tử bị chệch khỏi hướng sắp xếp thẳng hàng trong một thời gian $t = 10$ giây sau khi từ trường bị ngắt. Nhiệt độ của dung dịch huyền phù là $T = 300$ K. (*Princeton*)

Lời giải:

(a) Trong hệ toạ độ Đềcác (x, y, z) áp dụng đối với một hạt, từ trường có thể biểu diễn như sau

$$\mathbf{B} = B\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + B\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + B\cos\theta\mathbf{e}_z\,.$$

Vì $|\chi_x|, |\chi_y|$ và $|\chi_z|$ thông thường nhỏ hơn nhiều so với 1, từ trường bên trong hạt (một hình trụ nhỏ) cũng có thể lấy là $\mathbf{B}$. Độ từ hoá được cho bởi

$$\mathbf{M} = \chi\cdot\mathbf{H} = \chi\cdot\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\,.$$

Lấy thể tích của hình trụ nhỏ là V, khi đó năng lượng định hướng là

$$\begin{aligned}
E = \mathbf{M}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\left(\chi\cdot\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}V\right) \\
&= \frac{V}{\mu_0}(B_x, B_y, B_z)\begin{pmatrix}\chi_x & & \\ & \chi_y & \\ & & \chi_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_x\\ B_y\\ B_z\end{pmatrix} \\
&= \frac{V}{\mu_0}(\chi_x B_x^2 + \chi_y B_y^2 + \chi_z B_z^2) \\
&= \frac{V}{\mu_0}[\chi_x(B_x^2 + B_y^2) + \chi_z B_z^2] \\
&= \frac{V}{\mu_0}[\chi_x B^2\sin^2\theta + x_z B^2\cos^2\theta]\,.
\end{aligned}$$

(b) Mômen lực tác dụng lên hạt là

$$\tau = -\frac{\partial E}{\partial \theta} = -\frac{V}{\mu_0}[\chi_x \cdot 2\sin\theta\cos\theta + \chi_z \cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)]B^2$$
$$= \frac{B^2 V}{\mu_0}(\chi_z - \chi_x)\sin 2\theta\,.$$

(c) Sự quay của hạt thoả mãn phương trình

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\zeta\frac{d\theta}{dt} + F(t)\,,$$

trong đó $F(t)$ là lực ngẫu nhiên tác dụng lên hạt. Lưu ý rằng

$$\frac{d^2\theta^2}{dt^2} = 2\dot{\theta}^2 + 2\theta\ddot{\theta}\,,$$

Ta có

$$I\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\theta^2}{dt^2} - \dot{\theta}^2\right) = -\zeta\theta\frac{d\theta}{dt} + \theta F(t)\,,$$

hay

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2\theta^2}{dt^2} - I\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}\zeta\frac{d\theta^2}{dt} + \theta F(t)\,.$$

Lấy trung bình trên tất cả các hạt $\overline{\theta F(t)} = 0$, ta có

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2\overline{\theta^2}}{dt^2} + \frac{1}{2}\zeta\frac{\overline{\theta^2}}{dt} - I\overline{\dot{\theta}^2} = 0\,.$$

Nguyên lý phân bố đều năng lượng cho

$$\frac{1}{2}I\overline{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{2}kT\,,$$

Như vậy phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2\overline{\theta^2}}{dt^2} + \frac{\zeta}{I}\frac{d\overline{\theta^2}}{dt} - \frac{2kT}{I} = 0\,.$$

nó có nghiệm là

$$\overline{\theta^2} = \frac{2kT}{\zeta} + Ce^{-\frac{\zeta}{I}t}\,,$$

trong đó C là một hằng số cần được xác định. Lưu ý rằng, vì θ không bị giới hạn vào vùng $[0, \pi]$, ta phải xét đến cả số vòng quay của hạt quanh từ trường.

Để ước tính $\Delta\theta_{\rm rms}$, lấy $\overline{\theta^2} = 0$ tại $t = 0$, khi đó $C = 0$. Do đó $\overline{\theta^2} = \frac{2kT}{\zeta}t$ tại thời điểm t. Tính bằng số

$$\overline{\theta^2} = \frac{2 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{10^{-17}} \times 10 = 8,28 \times 10^{-3},$$

hay

$$\Delta\theta_{\rm rms} \equiv \sqrt{\overline{\theta^2}} = 0,091 \text{ rad.} = 5,2^\circ .$$

2090

Một êlectron được đưa vào trong một vùng có điện trường và từ trường đều vuông góc với nhau. (Chúng ta hãy cho rằng $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x, \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$).

(a) Với vận tốc ban đầu như thế nào thì các êlectron sẽ chuyển động với tốc độ không đổi? (cả về hướng và độ lớn).

(b) Xét một chùm êlectron có phân bố tốc độ bất kì được phóng đồng thời vào mặt phẳng vuông góc với điện trường. Có một thời điểm mà tại đó, tất cả các êlectron đều ở trong mặt phẳng này lần nữa không?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Nếu êlectron chuyển động với tốc độ không đổi, thì tổng hợp lực tác dụng lên nó phải bằng 0, nghĩa là

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_E = -eE\mathbf{e}_x .$$

Vì $\mathbf{F}_B = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -eB\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z$, ta có

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{E}{B}\right)\mathbf{e}_y .$$

(b) Giả thiết tất cả các điện tử ở trong mặt phẳng YOZ tại $t = 0$. Xét một êlectron với vị trí ban đầu $(0, y_0, z_0)$ và tốc độ ban đầu (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). Khi đó, các phương trình chuyển động của nó là

$$m\frac{dv_x}{dt} = -e(E + Bv_y), \quad (1)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = ev_xB, \quad (2)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3)$$

Lấy $v_+ = v_x + iv_y$, khi đó các phương trình (1) và (2) kết hợp lại sẽ cho

$$m\frac{dv_+}{dt} = -eE + ieBv_+$$

với nghiệm

$$v_+ = ce^{i\omega t} - i\frac{E}{B}$$

với $\omega = \frac{eB}{m}$. Điều kiện ban đầu cho

$$c = v_{0x} + i\left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right).$$

do đó

$$\begin{aligned} v_+ = &\left[v_{0x}\cos\omega t - \left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\sin\omega t\right] \\ &+ i\left[v_{0x}\sin\omega t + \left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\cos\omega t - \frac{E}{B}\right], \end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x}\cos\omega t - \left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\sin\omega t\,, \\ v_y(t) &= v_{0x}\sin\omega t + \left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\cos\omega t - \frac{E}{B}\,, \\ v_z(t) &= v_{0z}\,. \end{aligned}$$

Lấy tích phân các biểu thức trên, ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\cos\omega t - \frac{1}{\omega}\left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right), \\ y(t) &= -\frac{v_{0x}}{\omega}\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(v_{0y} + \frac{E}{B}\right)\sin\omega t - \frac{E}{B}t + \frac{v_{0x}}{\omega} + y_0\,, \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t\,. \end{aligned}$$

Để $x(t) = 0$ ta cần thoả mãn $t = \frac{2\pi n}{\omega}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Do đó tất cả các êlectron sẽ lại ở trong mặt phẳng YOZ một lần nữa tại thời điểm $\frac{2\pi n}{\omega}$.

4. CÁC BÀI TẬP KHÁC (2091 2119)

2091

Hình 2.67 cho thấy một thấu kính điện tử đã được đơn giản hoá bao gồm một vòng dây tròn (bán kính a) mang dòng điện I. Đối với $\rho \ll a$ điện thế vectơ được tính gần đúng là

$$A_\theta = \frac{\pi I a^2 \rho}{(a^2 + z^2)^{3/2}} .$$

(a) Hãy viết phương trình Lagrange trong toạ độ trụ (ρ, θ, z) và phương trình Hamiltonian đối với một hạt có điện tích q chuyển động trong trường này.

(b) Hãy chứng minh rằng động lượng chuẩn tắc p_θ triệt tiêu đối với quỹ đạo đã cho và tìm một biểu thức cho $\dot{\theta}$. Trong các phần (c) và (d) sẽ có ích nếu chúng ta sử dụng phép gần đúng đơn giản là: lực từ là quan trọng nhất khi hạt ở trong vùng lân cận của thấu kính (gần đúng xung lượng). Vì ρ là nhỏ ta có thể giả thiết rằng $\rho \approx b$ và $\dot{z} \approx u$ gần như không đổi trong vùng tương tác.

(c) Hãy tính sự thay đổi xung trong động lượng theo phương bán kính khi hạt đi qua thấu kính. Sau đó hãy chứng minh rằng vòng dây có tác dụng như một thấu kính mỏng

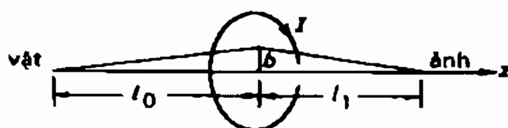
$$\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_i} = \frac{1}{f} ,$$

với

$$f = \frac{8a}{3\pi}\left(\frac{muc}{\pi q I}\right)^2 .$$

(d) Chứng minh rằng ảnh sẽ quay một góc $\theta = -4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}$ khi đi qua thấu kính.

(*Wisconsin*)



Hình 2.67

Lời giải:

(a) Phương trình Lagrange của một điện tích q trong một trường điện từ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\varphi - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}}{c}\right),$$

trong đó v là tốc độ của điện tích có khối lượng m, φ là thế vô hướng và $\mathbf{A}$ là điện thế vectơ. Vì

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{A} = \frac{I\pi a^2\rho}{(a^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_\theta, \quad \varphi = 0,$$

ta có

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{I\pi a^2 q\rho^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}}\dot{\theta}.$$

Do đó các thành phần của động lượng chính tắc được tính như sau

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} = m\dot{\rho},$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{t}} = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{I\pi a^2 q\rho^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}},$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Khi đó phương trình Hamiltonian là

$$\begin{aligned} H &= P_\rho\dot{\rho} + P_\theta\dot{\theta} + P_z\dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2m}\left[P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(P_\theta - \frac{I\pi a^2 q\rho^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}}\right)^2 + P_z^2\right]. \end{aligned}$$

(b) Sử dụng phương trình chính tắc của Hamiltonian $\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta}$, ta nhận được $\dot{P}_\theta = 0$, nghĩa là

$$P_0 = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{I\pi a^2 q\rho^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}} = \text{const}.$$

Ban đầu, khi hạt điện tích còn ở xa thấu kính, nó chuyển động theo trục của vòng dây ($\rho = 0$) với $v_\theta = 0$. Vì P_θ là một tích phân chuyển động, nên ta có $P_\theta = 0$. Suy ra

$$\dot{\theta} = -\frac{I\pi a^2 q}{mc(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

(c) Phương trình chính tắc khác của Hamiltonian là $\dot{P}_S = -\frac{\partial H}{\partial \rho}$, với $P_\theta = 0$, cho

$$\dot{P}_S = -\frac{I^2\pi^2a^4q^2\rho}{mc^2(a^2+z^2)^3},$$

hay

$$dP_\rho = -\frac{I^2\pi^2a^4q^2\rho}{mc^2(a^2+z^2)^3\dot{z}}dz.$$

Vì $\rho \simeq b$ và $\dot{z} \simeq u$ gần như không đổi trong vùng tương tác, nên độ biến thiên của động lượng theo phương bán kính là

$$\Delta P_\rho \approx -\frac{I^2\pi^2a^4q^2b}{mc^2u}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+z^2)^3}dz = -\frac{3\pi b}{8mau}\left(\frac{Iq\pi}{c}\right)^2.$$

Xét quỹ đạo trong hình 2.67. Ta có $\frac{\dot{\rho}_0}{u} = \frac{b}{l_0}$ tại điểm vật và $-\frac{\dot{\rho}_i}{u} = \frac{b}{l_i}$ tại điểm ảnh của thấu kính. Do đó

$$\frac{b}{l_0} + \frac{b}{l_i} = \frac{1}{u}(\dot{\rho}_0 - \dot{\rho}_i) = -\frac{\Delta P_\rho}{mu} = \frac{3\pi b}{8a}\left(\frac{Iq\pi}{muc}\right)^2,$$

nó có thể được viết dưới dạng

$$\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_i} = \frac{1}{f}$$

với

$$f = \frac{8a}{3\pi}\left(\frac{muc}{Iq\pi}\right)^2.$$

(d) Biểu thức đối với $\dot{\theta}$ có thể viết như sau

$$d\theta = -\frac{I\pi a^2 q dz}{mc(a^2+z^2)^{3/2}u}.$$

Do đó khi đi qua thấu kính, ảnh sẽ phải quay so với vật một góc

$$\Delta\theta = -\frac{I\pi a^2q}{mcu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz = -\frac{2I\pi q}{mcu} = -4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}.$$

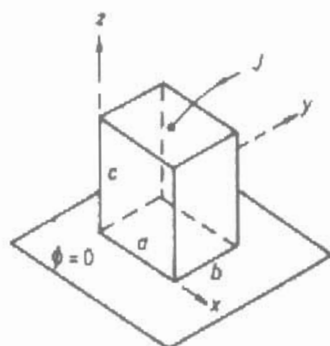
2092

Trong hình 2.68 một khối bán dẫn (độ dẫn = σ) có mặt đáy ($z = 0$) được gắn với một đế kim loại (độ dẫn của nó $\sigma \to \infty$) được giữ ở điện thế $\phi = 0$. Một dây dẫn mang dòng điện J được gắn với tâm của mặt đỉnh ($z = c$). Các cạnh ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$) được cách điện và mặt đỉnh cũng cách điện ngoại trừ sợi dây dẫn. Giả thiết rằng mật độ điện tích $\rho = 0$ và $\varepsilon = \mu = 1$ bên trong khối.

(a) Hãy viết các phương trình đối với điện thế ở bên trong khối và nghiệm tổng quát đối với điện thế đó.

(b) Hãy viết điều kiện biên đối với tất cả các mặt và biểu diễn các hằng số tuỳ ý trong nghiệm ở câu (a) qua các đại lượng đã cho.

(Princeton)



Hình 2.68

Lời giải:

(a) Bên trong khối bán dẫn điện thế $\phi(x, y, z)$ thoả mãn phương trình Laplace

$$\nabla^2\phi(z, y, z) = 0 .$$

Tách các biến số bằng cách viết

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) .$$

Phương trình Laplace khi đó trở thành

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 . \tag{2}$$

Mỗi số hạng ở vế trái chỉ phụ thuộc vào một biến số và như vậy phải bằng một hằng số

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 .$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 ,$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 ,$$

trong đó $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Nghiệm của các phương trình này là

$$X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x ,$$
$$Y = C\cos\beta y + D\sin\beta y ,$$
$$Z = Ee^{\gamma z} + Fe^{-\gamma z} ,$$

trong đó A, B, C, D, E, F là những hằng số. Do đó

$$\phi(x,y,z) = (A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)(C\cos\beta y + D\sin\beta y) \cdot [E\exp(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z) + F\exp(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)] .$$

(b) Điều kiện biên $\mathbf{E}_t = 0$ đối với bốn mặt thẳng đứng cho

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0,a} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=0,b} = 0 . \quad (1)$$

Đối với mặt đỉnh $(z = c)$ định luật Ohm cho

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=c} = -E_z = -\frac{J}{\sigma}\delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) . \quad (2)$$

Mặt đáy $(z = 0)$ có điện thế bằng 0, như vậy

$$\phi(x,y,0) = 0 . \quad (3)$$

Các điều kiện (1) đòi hỏi

$$B = D = 0 ,$$

$$\alpha = \alpha_m = \frac{m\pi}{a} ,\ \beta = \beta_n = \frac{n\pi}{b} , \gamma = \gamma_{mn} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} ,$$

với m, n là các số nguyên dương. (Các số nguyên âm chỉ lặp lại nghiệm). Phương trình (3) đòi hỏi $F = -E$. Như vậy, đối với một bộ số nguyên m, n đã cho ta có

$$\phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\sinh(\gamma_{mn} z)\,.$$

Do đó nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn}(x, y, z) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\sinh(\gamma_{mn} z)\,.\end{aligned}$$

Thay thế nghiệm này vào (2) ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\gamma_{mn}\cosh(\gamma_{mn} c) \\ &\quad = \frac{J}{\sigma}\delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right).\end{aligned}$$

Nhân cả hai vế với $\cos(\gamma_m x)\cos(\beta_n y)$ và lấy tích phân trên mặt đỉnh ta được

$$\begin{aligned}A_{mn} &= \frac{4J}{ab\sigma\gamma_{mn}\cosh(\gamma_{mn} c)}\int_0^a dx\int_0^b \delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) \\ &\quad \cdot \cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)dy \\ &= \frac{4J}{ab\sigma\gamma_{mn}\cosh(\gamma_{mn} c)}\cos\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Lưu ý rằng $A_{mn} \neq 0$ chỉ đối với cả m và n là những số dương chẵn.

2093

Một lưỡng cực từ có mômen m được đặt trong một thấu kính từ mà từ trường của nó có các thành phần sau:

$$B_x = \alpha(x^2 - y^2)\,, \quad B_y = -2\alpha xy\,, \quad B_z = 0\,,$$

ở đây z là trục của thấu kính và α là một hằng số. (Từ trường này còn được gọi là trường sáu cực).

(a) Xác định các thành phần của lực tác dụng lên lưỡng cực?

(b) Có thể dùng một hay nhiều thấu kính như vậy để hội tụ một chùm hạt trung hoà có một mômen lưỡng cực từ? Giải thích.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Khi **m** là một vectơ không đổi, lực do một từ trường ngoài tác dụng lên **m** là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) .$$

Như vậy, ta có

$$F_x = 2\alpha(m_x x - m_y y) ,$$
$$F_y = -2\alpha(m_x y + m_y x) ,$$
$$F_z = 0 ,$$

trong đó ta đã viết $\mathbf{m} = m_x\mathbf{e}_x + m_y\mathbf{e}_y + m_z\mathbf{e}_z$.

(b) Nếu $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_y$, ta có

$$F_x = -2\alpha m y , \quad F_y = -2\alpha m x .$$

Lực này ngược hướng với sự dịch chuyển của lưỡng cực ra khỏi trục. Do đó ta có thể sử dụng thấu kính sáu cực để hội tụ một chùm hạt trung hoà có mômen từ. Nếu $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_x$, ta có

$$F_x = 2\alpha m x , \quad F_y = -2\alpha m y .$$

Khi đó thấu kính là phân kì theo hướng x và hội tụ theo hướng y. Do đó để hội tụ chùm hạt ta cần một cặp thấu kính sáu cực với góc pha của các trường sáu cực khác nhau là π, nghĩa là trường của thấu kính sáu cực thứ hai là

$$B_x = -\alpha(x^2 - y^2) , \quad B_y = 2\alpha x y .$$

Lực tác dụng bởi thấu kính sáu cực thứ hai là

$$F_x = -2\alpha m x , \quad F_y = 2\alpha m y ,$$

Sao cho độ tụ cũng nhận được theo hướng x.

2094

Một hạt tích điện đi vào một từ trường tĩnh đều **B**, chuyển động với tốc độ phi tương đối $\mathbf{v}_0$ lập một góc α với hướng của **B**.

(a) Xác định tốc độ phát bức xạ.

(b) Tìm điều kiện đối với $\mathbf{v}_0$ để bức xạ phát ra chủ yếu là một đa cực.

(c) Nếu một điện trường tĩnh đều **E** được đưa thêm vào song song với **B**, độ lớn của nó cần phải bằng bao nhiêu để tăng gấp đôi tốc độ bức xạ trước?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Bức xạ phát ra trong một đơn vị thời gian do một hạt gia tốc phi tương đối có điện tích q với tốc độ $v \ll c$ được tính gần đúng trong hệ đơn vị Gauss là

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{v}^2 .$$

Phương trình chuyển động của hạt trong từ trường **B** là

$$m_0\dot{\mathbf{v}}_0 = \frac{q}{c}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) ,$$

Từ đó ta có:

$$\dot{v}_0^2 = \frac{q^2}{m_0^2c^2}v_0^2B^2\sin^2\alpha ,$$

trong đó α là góc giữa $\mathbf{v}_0$ và **B**. Khi đó tốc độ phát xạ của bức xạ là

$$P = \frac{2q^4}{3m_0^2c^5}B^2v_0^2\sin^2\alpha \text{ erg/s} .$$

(b) Sự bức xạ do một hạt tích điện chuyển động trong từ trường **B** phát ra được biết đến như bức xạ cyclotron và có dạng bức xạ của một lưỡng cực Hertz. Hạt đó thực hiện sự tiến động Larmor vuông góc với **B** với tần số góc $\omega_0 = \frac{qB}{m_0c}$. Thực tế còn có các bức xạ yếu có các tần số hài cao hơn như $2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$. Tuy nhiên, nếu $v_0 \ll c$ thì bức xạ lưỡng cực là thành phần chủ yếu và các sự bức xạ khác có thể bỏ qua được.

(c) Khi một điện trường **E** tĩnh, đều được đưa vào song song với **B**, phương trình chuyển động của hạt trở thành

$$m_0\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E} ,$$

hay

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_\perp + \dot{\mathbf{v}}_{/\!/} = \frac{q}{m_0 c}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m_0}\mathbf{E},$$

$\dot{\mathbf{v}}_\perp$ và $\dot{\mathbf{v}}_{/\!/}$ là các thành phần gia tốc của hạt vuông góc và song song với từ trường. Để nhân đôi công suất bức xạ trong câu (a) $\dot{v}^2$ cũng sẽ được nhân đôi. Viết phương trình trên như sau

$$\dot{v}^2 = \dot{v}_\perp^2 + \dot{v}_{/\!/}^2 = \frac{q^2}{m_0^2 c^2} v_0^2 B^2 \sin^2\alpha + \frac{q^2}{m_0^2} E^2$$

Vì khi $\mathbf{E}$ song song với $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ vuông góc với $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$, ta thấy rằng để nhận được $\dot{v}^2 = 2\dot{v}_0^2$ ta cần điện trường có độ lớn

$$E = \frac{v_0}{c} B \sin\alpha\,.$$

2095

Một vòng dây dẫn tròn bán kính r, nặng m kilogram, mang một dòng điện không đổi ổn định I ampe. Trục của vòng dây được giữ luôn luôn vuông góc với bề mặt phẳng lớn của một vật dẫn hoàn hảo. Vòng dây chuyển động tự do theo chiều thẳng đứng và chiều cao tức thời của nó là x mét, đồng thời chuyển động với tốc độ v theo hướng y với $v \ll c$.

(a) Điều kiện biên đối với từ trường $\mathbf{B}$ tại mặt phẳng dẫn điện phẳng là gì?

(b) Vẽ và mô tả bằng phương pháp đại số một dòng điện ảnh, mà khi kết hợp với dòng điện thực sẽ tái tạo được một cách chính xác từ trường trong vùng phía trên mặt phẳng dẫn điện đó.

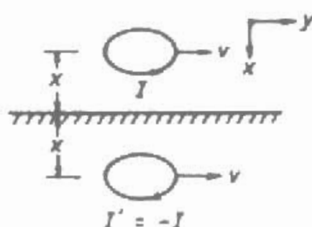
(c) Hãy tìm chiều cao cân bằng gần đúng x và tần số của các dao động nhỏ, thẳng đứng đối với một giá trị của dòng sao cho $x \ll r$.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Thành phần vuông góc của $\mathbf{B}$ đi qua biên một cách liên tục có giá trị bằng 0 trên mặt phẳng dẫn điện $B_n = 0$.

(b) Như thấy trên hình 2.69, ảnh của dòng điện cũng là một dòng điện tròn đối xứng qua mặt phẳng dẫn điện, nhưng có chiều ngược lại. Từ trường



Hình 2.69

phía trên vật dẫn phẳng là sự chồng chập của các từ trường do hai dòng điện sinh ra và thoả mãn điều kiện biên $B_n = 0$.

(c) Xét một phần tử dòng Idl của dòng điện thực. Khi $x \ll r$, ta có thể coi dòng điện ảnh như một dòng điện thẳng vô hạn. Khi đó phần tử dòng điện Idl sẽ chịu tác dụng của một lực hướng lên phía trên có độ lớn

$$dF = I|d\mathbf{l} \times \mathbf{B}| = I\left|dl\frac{\mu_0(-I)}{2\pi(2x)}\right| = \frac{\mu_0 I^2 dl}{4\pi x}.$$

Lực tác dụng lên toàn bộ dòng điện tròn thực là

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi x} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I^2}{2}\frac{r}{x}.$$

Tại chiều cao cân bằng lực này bằng với trọng lực hướng xuống phía dưới.

$$\frac{\mu_0 I^2 r}{2x} = mg,$$

Từ đó ta có

$$x = \frac{\mu_0 I^2 r}{2mg}.$$

Giả thiết vòng dây dịch chuyển một khoảng cách nhỏ δ theo phương thẳng đứng bắt đầu từ chiều cao cân bằng x, nghĩa là $x \to x + \delta$, $\delta \ll x$. Phương trình chuyển động của dòng điện tròn theo chiều thẳng đứng là

$$-m\ddot{\delta} = mg - \frac{\mu_0 I^2 r}{2(x+\delta)} \simeq mg - \frac{\mu_0 I^2 r}{2x}\left(1 - \frac{\delta}{x}\right).$$

Lưu ý rằng $mg = \frac{\mu_0 I^2 r}{2x}$, ta nhận được

$$\ddot{\delta} + \frac{\mu_0 I^2 r}{2mx^2}\delta = 0.$$

Điều này cho thấy rằng chuyển động thẳng đứng là dao động điều hoà với tần số góc

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 I^2 r}{2mx^2}} = \frac{g}{I}\sqrt{\frac{2m}{\mu_0 r}}\,.$$

2096

Giả thiết rằng sự tồn tại của từ tích có quan hệ với từ trường bằng phản ứng địa phương

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m\,.$$

(a) Dùng định lý đive, hãy tìm từ trường của một từ tích đặt tại gốc toạ độ.

(b) Khi không có từ tích, tính xoáy của điện trường được cho bởi định luật Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,.$$

Chứng minh rằng định luật này không tương thích với mật độ từ tích là một hàm của thời gian.

(c) Giả thiết rằng từ tích được bảo toàn, hãy tìm hệ thức giữa mật độ dòng từ tích $\mathbf{J}_m$ và mật độ từ tích ρ_m.

(d) Hãy sửa đổi định luật Faraday nêu trong phần (b) để nhận được một định luật phù hợp với sự có mặt của một mật độ từ tích là hàm của vị trí và thời gian. Chứng minh sự phù hợp của định luật đã sửa đổi đó.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Xét một mặt cầu S có bán kính r tại gốc toạ độ. Vì $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$, theo định lý đive ta có

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 B(r) = \mu_0 q_m\,.$$

do đó

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2}\mathbf{e}_r\,.$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0\,,$$

Vì $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ là một hằng đẳng thức. Mặt khác,

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} .$$

Như vậy định luật Faraday không tương thích với một mật độ từ tích thay đổi theo thời gian.

(c) Sự bảo toàn của từ tích có thể biểu diễn như sau

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_m dV = -\oint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_m dV .$$

Vì V là bất kì ta phải có

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0 .$$

Đây là phương trình liên tục đối với từ tích.

(d) Nếu chúng ta sửa đổi định luật Faraday thành

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

và lấy đive hai vế ta sẽ nhận được

$$-\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0\left(\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right) = 0 .$$

Từ đó ta có biểu thức

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} ,$$

Nó phù hợp với phương trình thứ hai của (b).

2097

(a) Giả thiết rằng tồn tại các từ tích cô lập (các đơn cực từ). Hãy viết lại các phương trình Maxwel bao gồm đóng góp của mật độ từ tích ρ_m và mật độ dòng từ j_m. Cho rằng, ngoại trừ các nguồn, các trường đều ở trong chân không.

(b) Alvarez và các cộng sự đã tìm các đơn cực từ trong vật chất bằng cách cho các mẫu vật chất đi qua một cuộn dây n vòng nhiều lần liên tiếp. Nếu

cuộn dây có điện trở R và chúng ta giả thiết rằng các từ tích chuyển động đủ chậm để hiệu ứng về tự cảm của nó là nhỏ, hãy tính điện lượng q chạy qua cuộn dây sau N lần đi vòng quanh của một đơn cực từ q_m.

(c) Giả thiết rằng cuộn dây làm bằng chất siêu dẫn sao cho điện trở của nó bằng 0 và chỉ có độ tự cảm L của nó hạn chế dòng điện được cảm ứng trong nó. Cho rằng ban đầu dòng điện trong cuộn dây bằng 0. Hãy tính dòng điện sau khi đơn cực đi vòng quanh N lần.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

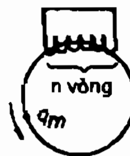
(a) Sử dụng sự phân tích của bài tập **2096**. Khi tất cả mật độ điện tích ρ, mật độ dòng điện j, mật độ từ tích ρ_m và mật độ dòng từ $\mathbf{j}_m$ đều ở trong chân không, các phương trình Maxwell (trong hệ đơn vị Gauss) là

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\,,\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 4\pi\rho_m\,,\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m\,,\\ \nabla\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi\mathbf{j}}{c}\,,\end{aligned}\right\}$$

trong đó c là tốc độ của ánh sáng trong chân không.

(b) Như thấy trên hình 2.70, ta coi một trong số các vòng đi qua cuộn dây như vòng kín l trong định lý Stoke và coi diện tích được bao quanh bởi l là S. Khi đó, sử dụng định lý Stoke và phương trình thứ 3 ở trên ta có

$$\oint_l\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}-\frac{4\pi}{c}\int_S\mathbf{j}_m\cdot d\mathbf{S}\,.$$



Hình 2.70

Gọi I_m là dòng từ trong cuộn dây, ta có

$$I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}\,.$$

Gọi V là hiệu điện thế hai đầu cuộn dây và I là dòng điện chạy qua nó, ta có

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V = IR\,.$$

Từ thông đi qua cuộn dây là $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, và suất điện động cảm ứng xuất hiện trong cuộn dây là

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\,.$$

Tổ hợp các phương trình trên, ta có phương trình mạch điện

$$IR = \varepsilon - \frac{4\pi}{c} I_m\,.$$

Nếu suất điện động cảm ứng có thể bỏ qua, tức $\varepsilon = 0$, khi đó

$$IR = -\frac{4\pi}{c} I_m\,.$$

Từ $I = \frac{dQ}{dt}$, $I_m = \frac{dq_m}{dt}$, phương trình này trở thành

$$R\frac{dQ}{dt} = -\frac{4\pi}{c}\frac{dq_m}{dt}\,.$$

Lấy tích phân ta được

$$Q = -\frac{4\pi q_m}{RC}\,.$$

Sau khi q_m đi N lần qua cuộn dây có n vòng, điện lượng toàn phần chạy qua cuộn dây đó là

$$q = -\frac{4\pi N n q_m}{RC}\,.$$

(c) Nếu điện trở nhỏ có thể bỏ qua, nghĩa là $R = 0$, trong khi độ tự cảm L không thể bỏ qua được, ta có $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$. Bây giờ phương trình mạch điện được viết dưới dạng

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{4\pi}{c} N n \frac{dq_m}{dt}\,.$$

Lấy tích phân ta nhận được

$$I = -\frac{4\pi N n q_m}{LC}.$$

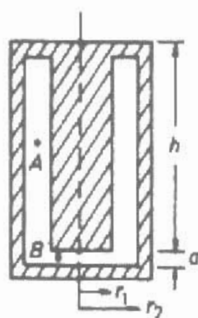
2098

Trong hình 2.71, một hốc hình trụ đối xứng qua trục dài của nó. Với mục đích của bài tập này, có thể coi nó một cách gần đúng như một dây cáp đồng trục (có độ tự cảm và điện dung) được ngắn mạch tại một đầu và nối với một tụ điện phẳng hình đĩa song song tại đầu kia.

(a) Hãy tìm biểu thức của tần số cộng hưởng thấp nhất của hốc. Bỏ qua hiệu ứng biên và hiệu ứng rìa ($h \gg r_2, d \ll r_1$).

(b) Hãy tìm hướng và sự phụ thuộc bán kính của vectơ Poynting **N** trong các vùng ở gần các điểm A và B.

(*Princeton*)



Hình 2.71

Lời giải:

(a) Để tìm độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài của một cáp đồng trục ta giả thiết rằng vật dẫn bên trong và bên ngoài chứa các dòng điện tương ứng I và $-I$, các điện tích tuyến tính đồng đều tương ứng λ và $-\lambda$. Sử dụng hệ toạ độ hình trụ (r, θ, z) với trục z dọc theo trục của dây cáp. Lấy chiều của dòng điện trong vật dẫn bên trong theo hướng $+z$. Từ bài tập **2022**, độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài của cáp đồng trục là

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}, \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Điện dung của tụ điện phẳng song song được nối với cáp đồng trục là

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0 r_1^2}{d}.$$

Do đó tần số góc cộng hưởng thấp nhất của hốc là

$$\omega_0 = \frac{1}{L(C+C_0)} = \frac{2dc^2}{h(2dh + r_1^2\ln\frac{r_2}{r_1})}.$$

(b) Tại điểm $A, r_1 < r < r_2, \mathbf{E}(r) \sim \frac{\mathbf{e}_r}{r}, \mathbf{B}(r) \sim \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}$, như vậy $\mathbf{N} \sim \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_z$. Tại điểm $B, 0 < r < r_1, \mathbf{E}(r) \sim -\mathbf{e}_z, \mathbf{B}(r) \sim r\mathbf{e}_\theta$, như vậy $\mathbf{N} \sim r\mathbf{e}_r$.

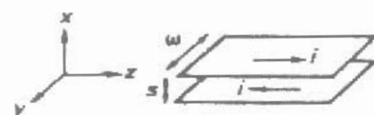
2099

Một sóng điện từ truyền đi giữa hai tấm kim loại phẳng song song dài với E và B vuông góc với nhau và vuông góc với phương truyền. Hãy chứng minh rằng trở kháng đặc trưng $Z_0 = \sqrt{L/C}$ là $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{s}{w}$, trong đó L và C là độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài, s là khoảng cách giữa các tấm kim loại và w là chiều rộng của tấm. Hãy sử dụng gần đúng bước sóng dài.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trong phép gần đúng bước sóng dài, $\lambda \gg w, \lambda \gg s$, ta có thể coi điện trường và từ trường giữa hai tấm kim loại gần đúng là dừng. Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.72 với trục z dọc theo hướng truyền. Vì điện trường và từ trường vuông góc với trục z và bằng 0 trong hai tấm kim loại, sự liên tục của $\mathbf{E}_t$ cho $E_y = 0$, trong khi sự liên tục của B_n cho $B_x = 0$.



Hình 2.72

Giả thiết rằng hai tấm kim loại chứa dòng điện $+i$ và $-i$. Từ trường giữa hai tấm đó được cho bởi điều kiện biên $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{I}_l$, với $\mathbf{I}_l$ là dòng trên một đơn vị chiều rộng của vật dẫn, tức là

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{w}\mathbf{e}_y .$$

Độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của các tấm nhận được bằng cách xét từ thông đi qua một hình chữ nhật có chiều dài đơn vị và chiều rộng s song song với trục z, suy ra

$$L = \frac{Bs}{i} = \frac{\mu_0 s}{w} .$$

Gọi mật độ điện tích mặt của hai tấm kim loại là σ và $-\sigma$. Điện trường giữa hai tấm là

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_x ,$$

và hiệu điện thế giữa hai tấm là

$$V = Es = \frac{\sigma s}{\varepsilon_0} .$$

Do đó điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$C = \frac{\sigma w}{V} = \frac{\varepsilon_0 w}{s} .$$

Suy ra trở kháng đặc trưng trên một đơn vị chiều dài của các tấm kim loại được tính bởi công thức

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0 s}{w} \Big/ \frac{\varepsilon_0 w}{s}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{s}{w} .$$

2100

Từ trở trong một mạch từ tương đương với trường hợp nào sau đây?

(a) Điện trở trong một mạch điện có dòng một chiều.

(b) Thể tích của nước trong một mạch thuỷ lực.

(c) Hiệu điện thế trong một mạch điện xoay chiều.

(*CCT*)

Lời giải: Câu trả lời là (a).

2101

Độ từ thẩm của một chất thuận từ là:

(a) nhỏ hơn một chút so với độ từ thẩm của chân không.

(b) lớn hơn một chút so với độ từ thẩm của chân không.

(c) lớn hơn nhiều so với độ từ thẩm của chân không.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2102

Từ trường tăng qua một tấm kim loại bằng đồng. Các dòng Fucô sẽ

(a) hỗ trợ sự tăng của từ trường.

(b) làm chậm sự tăng.

(c) không có tác dụng gì.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

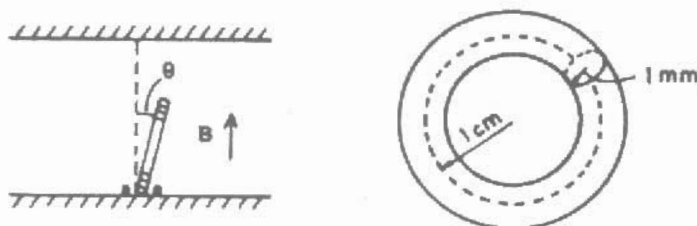
2103

Một chiếc nhẫn vàng được đặt thẳng đứng giữa hai cực của một nam châm lớn. Đáy của chiếc nhẫn được chặn không cho trượt bởi hai chốt cố định. Nó bị làm nghiêng từ phương thẳng đứng một góc 0,1 rad và bắt đầu đổ xuống. Từ trường là 10^4 gauss, bán kính lớn và bán kính nhỏ của nhẫn là 1 cm và 1 mm (xem hình 2.73), độ dẫn của vàng là 4×10^{17} s^{-1} và khối lượng riêng của vàng là 19,3 g/cm^3.

(a) Thế năng giải phóng từ sự đổ xuống của chiếc nhẫn chủ yếu chuyển thành động năng hay chuyển thành nhiệt làm tăng nhiệt độ của chiếc nhẫn? Hãy trình bày lập luận của bạn (đối với phần này chỉ cần phân tích bậc độ lớn).

(b) Hãy tính thời gian của quá trình cái nhẫn đổ xuống, bỏ qua hiệu ứng nhỏ hơn (Gợi ý: $\int_{0.1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta} = 2,00$).

(*MIT*)



Hình 2.73

Lời giải:

(a) Gọi thời gian của quá trình cái nhẫn đổ xuống là T. Trong quá trình đổ, thế năng được chuyển hoá thành nhiệt năng W_t và động năng W_k mà ta có thể ước lượng thô về độ lớn (trong hệ đơn vị Gauss) như sau:

$$W_t \sim I^2RT \approx \left(\frac{\phi}{cTR}\right)^2 RT = \frac{B^2(\pi r_1^2)^2}{c^2RT}$$

$$= \frac{mB^2(\pi r_1^2)^2}{c^2T\cdot(\frac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2})\cdot(\rho\cdot 2\pi r_1\cdot\pi r_2^2)} = \frac{mr_1^2}{T}\cdot\frac{\sigma B^2}{4\rho c^2},$$

$$W_k \sim \frac{1}{2}I\omega^2 \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr_1^2\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 = \frac{3\pi^2 mr_1^2}{16T^2},$$

trong đó

- $r_1, r_2 =$ bán kính lớn và bán kính nhỏ của nhẫn
- $\phi =$ từ thông đi qua nhẫn $\approx B\pi r_1^2$
- $\rho =$ khối lượng riêng của vàng
- $\sigma =$ độ dẫn điện của vàng
- $R =$ điện trở của nhẫn $= \frac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2}$
- $m =$ khối lượng của nhẫn $= \rho 2\pi r_1\cdot\pi r_2^2$

- c = tốc độ của ánh sáng trong chân không
- ω = tốc độ góc của nhẫn khi đổ $\approx \frac{\pi}{2T}$.

Đặt

$$T_g = \sqrt{\frac{r_1}{g}} = \sqrt{\frac{1}{980}} = 3,2 \times 10^{-2}\ \text{s}\,,$$
$$T_B = \frac{4\rho c^2}{\sigma B^2} = \frac{4 \times 19,3 \times 9 \times 10^{20}}{4 \times 10^{17} \times 10^8} = 1,74 \times 10^{-3}\ \text{s}\,,$$

ta có thể viết lại các phương trình trên như sau

$$W_t \sim mgr_1 \cdot \frac{T_g^2}{T \cdot T_B}\,, \quad W_k \sim mgr_1 \cdot \frac{3\pi^2}{16}\left(\frac{T_g}{T}\right)^2 .$$

Sự cân bằng năng lượng sẽ cho biểu thức sau

$$mgr_1 = W_t + W_k\,,$$

hay

$$T^2 - \left(\frac{T_g^2}{T_B}\right)T - \frac{3\pi^2}{16}T_g^2 = 0\,.$$

Giải để tìm T, ta có

$$T = \frac{T_g}{2}\left[\frac{T_g}{T_B} + \sqrt{\left(\frac{T_g}{T_B}\right)^2 + \frac{3\pi^2}{4}}\right] .$$

Vì $\left(\frac{T_g}{T_B}\right)^2 \gg \frac{3\pi^2}{4}, T \approx \frac{T_g^2}{T_B}$. Do đó

$$W_t \sim mgr_1\,, \quad W_k \sim mgr_1 \cdot \frac{3\pi^2}{16}\left(\frac{T_B}{T_g}\right) \ll mgr_1\,.$$

Từ đây suy ra rằng, khi nhẫn đổ xuống thế năng chủ yếu chuyển thành sự tăng nhiệt độ của nhẫn.

(b) Chúng ta bỏ qua động năng của nhẫn. Tức là, chúng ta giả thiết rằng thế năng được chuyển hoá hoàn toàn thành nhiệt năng. Khi đó mômen của trọng lực và mômen của lực từ tác dụng lên nhẫn chiếc nhẫn gần như cân bằng nhau.

Từ thông đi qua nhẫn là

$$\phi(\theta) = B\pi r_1^2 \sin\theta\,.$$

Suất điện động cảm ứng là

$$\varepsilon = \frac{1}{c}\left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{1}{c}B\pi r_1^2\cos\theta\dot{\theta}\,,$$

Suy ra dòng điện cảm ứng là

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = B\pi r_1^2\cos\theta\cdot\frac{\dot{\theta}}{cR}$$

và mômen từ của nhẫn là

$$m = \frac{i\pi r_1^2}{c} = \frac{B(\pi r_1^2)^2\cos\theta\dot{\theta}}{c^2R}\,.$$

Do đó, mômen của lực từ tác dụng lên nhẫn là

$$\tau_m = |\mathbf{m}\times\mathbf{B}| = \frac{(B\pi r_1^2\cos\theta)^2\dot{\theta}}{c^2R}\,.$$

Mômen của trọng lực tác dụng lên nhẫn là $\tau_g = mgr_1\sin\theta$. Do đó

$$\tau_m = \tau_g\,,$$

hay

$$\frac{(B\pi r_1^2\cos\theta)^2\dot{\theta}}{c^2R} = mgr_1\sin\theta\,.$$

Từ đó suy ra

$$dt = \frac{\sigma B^2r_1\cos^2\theta d\theta}{4\rho gc^2\sin\theta}\,.$$

Lấy tích phân ta được

$$T = \frac{\sigma B^2r_1}{4\rho gc^2}\int_{0,1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{\sin\theta} = \frac{\sigma B^2r_1}{4\rho gc^2}\cdot 2$$

$$= 2\frac{T_g^2}{T_B} = 2\times\frac{(3.2\times 10^{-2})^2}{1,74\times 10^{-3}} = 1,2\text{ s}\,.$$

2104

Một hạt có điện tích, khối lượng, mômen động lượng đã cho chuyển động trên một quỹ đạo tròn.

(a) Xuất phát từ các định luật cơ bản của điện động lực học, hãy tìm phần tĩnh của từ trường sinh ra tại các khoảng cách lớn so với kích thước của vòng tròn quỹ đạo.

(b) Sự phân bố từ tích như thế nào để có thể sinh ra một từ trường giống như vậy?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Gọi điện tích, khối lượng và mômen động lượng của hạt lần lượt là q, m, L. Sử dụng hệ toạ độ trụ (R, θ, z) với trục z dọc theo trục của quỹ đạo tròn và gốc toạ độ tại tâm của nó. Vì ta quan tâm đến thành phần tĩnh của trường, nên có thể coi điện tích quay trên quỹ đạo tròn như một dòng điện tròn không đổi. Thế vectơ điện thế tại một điểm có vectơ bán kính vectơ $\mathbf{R}$ từ gốc toạ độ là

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r}dV' ,$$

trong đó $r = |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$. Lấy gần đúng $r = R(1 - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}'}{R^2})$ đối với các khoảng cách lớn và viết $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV' = Id\mathbf{r}'$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{R}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\oint\left(1 + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}'}{R^2} + \dots\right)d\mathbf{r}' ,\\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}' ,\end{aligned}$$

ở đây ta lấy tích phân theo quỹ đạo tròn. Hãy viết

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = &\frac{1}{2}[(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}' - (\mathbf{R}\cdot d\mathbf{r}')\mathbf{r}']\\ &+ \frac{1}{2}[(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + (\mathbf{R}\cdot d\mathbf{r}')\mathbf{r}'] .\end{aligned}$$

Phần đối xứng của biểu thức trên làm xuất hiện một điện trường tứ cực và sẽ không cần xét đến. Phần phải đối xứng có thể viết lại như sau

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{R} .$$

Do đó, khi chỉ xét trường lưỡng cực từ, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{R}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I}{2}\oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'\right] \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I\pi r^2 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3},\end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{M} = I\pi r^2\mathbf{e}_z$ là mômen lưỡng cực từ của dòng điện tròn. Từ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{M}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0 qL}{8\pi m}\left(\frac{3\cos\theta}{R^3}\mathbf{e}_R - \frac{\mathbf{e}_z}{R^3}\right) = \frac{\mu_0 qL}{8\pi m R^3}(3\cos\theta\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_z),\end{aligned}$$

ở đây chúng ta đã sử dụng

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{qv}{2\pi r}$$

và

$$M = I\pi r^2 = \frac{qvr}{2} = \frac{qL}{2m}.$$

(b) Một lớp lưỡng cực từ có thể sinh ra một từ trường giống trên nếu chúng ta xét ở các khoảng cách xa nguồn. Gọi mômen lưỡng cực từ là $\mathbf{p}_m$, khi đó thế vô hướng từ ở xa là

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{R^3},$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = -\mu_0\nabla\varphi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{\mathbf{p}_m\cdot\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{p}_m\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

Biểu thức này giống biểu thức đối với $\mathbf{B}$ trong câu (a) với $\mathbf{p}_m = \mathbf{M}$.

2105

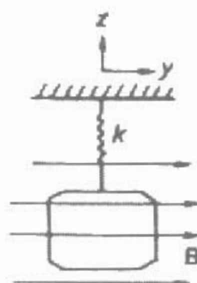
Một vòng dây dẫn có diện tích A và điện trở toàn phần R được treo bằng một lò xo xoắn có hằng số k trong một từ trường đều $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$. Vòng dây nằm trong mặt phẳng yz ở vị trí cân bằng và có thể quay quanh trục z với mômen quán tính I như thấy trên hình 2.74(a). Vòng dây được quay một góc nhỏ θ

ra khỏi vị trí cân bằng và sau đó thả ra. Giả thiết rằng lò xo xoắn không dẫn điện và bỏ qua độ tự cảm của vòng dây.

(a) Viết phương trình chuyển động của vòng dây qua các thông số đã cho?

(b) Phác hoạ sự chuyển động và đánh dấu tất cả các thang thời gian có liên quan trong trường hợp R lớn.

(*MIT*)



Hình 2.74 (a)

Lời giải:

(a) Khi góc giữa mặt phẳng của vòng dây và từ trường là α, từ thông từ đi qua vòng dây là: $\phi = BA\sin\alpha$. Suất điện động cảm ứng và dòng điện cảm ứng được cho bởi các công thức

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BA\cos\alpha\,\mathrm{r}a\,, \quad i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{BA\mathrm{r}a\cos\alpha}{R}\,.$$

Mômen từ của vòng dây là

$$m = iA = -\frac{BA^2\cos\alpha}{R}\mathrm{r}a\,.$$

Do đó, mômen của lực từ tác dụng lên vòng dây là

$$\tau_m = |\mathbf{m}\times\mathbf{B}| = \frac{B^2A^2\cos^2\alpha}{R}\mathrm{r}a\,.$$

Ngoài ra, lò xo xoắn cũng cung cấp một mômen xoắn $k\alpha$. Cả hai mômen này đều cản trở sự quay của vòng dây. Như vậy ta có

$$I\ddot{\alpha} + \frac{B^2A^2\cos^2\alpha}{R}\mathrm{r}a + k\alpha = 0\,.$$

Vì $\alpha \ll \theta$ và bản thân θ cũng nhỏ, chúng ta có $\cos^2\alpha \approx 1$ và

$$I\ddot{\alpha} + \frac{B^2A^2}{R}\mathrm{r}a + ka = 0\,.$$

Đặt $\alpha = e^{Ct}$, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$IC^2 + \frac{B^2A^2}{R}C + k = 0\,.$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là

$$C = \frac{-\frac{B^2A^2}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2A^2}{R}\right)^2 - 4Ik}}{2I} = -\frac{B^2A^2}{2IR} \pm j\sqrt{\frac{k}{I} - \left(\frac{B^2A^2}{2IR}\right)^2}\,.$$

Kí hiệu

$$\beta = \frac{B^2A^2}{2IR}\,, \quad \gamma = \sqrt{-\left(\frac{B^2A^2}{2IR}\right)^2 + \frac{k}{I}} = \sqrt{-\beta^2 + \frac{k}{I}}\,,$$

chúng ta có hai nghiệm

$$C_1 = -\beta + j\gamma\,, \quad C_2 = -\beta - j\gamma\,.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động là

$$\alpha = e^{-\beta t}[A_1\cos\gamma t + A_2\sin\gamma t]\,.$$

Từ $\alpha|_{t=0} = \theta$, $\mathrm{r}a|_{t=0} = 0$, ta tìm được

$$A_1 = \theta\,, \quad A_2 = \frac{\beta}{\gamma}A_1 = \frac{\beta}{\gamma}\theta\,.$$

Do đó dao động quay của vòng dây được mô tả bởi

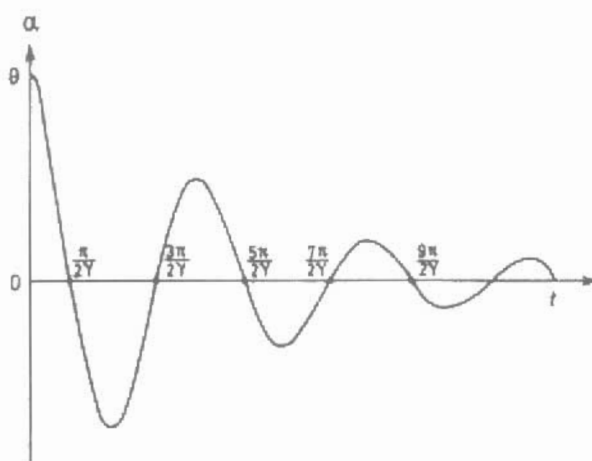
$$\alpha(t) = \theta e^{-\beta t}\left[\cos\gamma t + \frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma t\right].$$

Lưu ý rằng đối với chuyển động là một dao động, ta cần $k > \beta^2 I$, điều này đã được giả thiết cho trường hợp này.

(b) Nếu R lớn, $\beta \ll \gamma$ và chúng ta có

$$\alpha(t) \approx \theta e^{-\beta t}\cos\gamma t\,.$$

Chuyển động này là chuyển động điều hoà với biên độ thay đổi theo hàm số mũ như thấy trong hình 2.74(b).



Hình 2.74 (b)

2106

Hình 2.75 cho thấy hai sợi dây dẫn dài song song mang các dòng điện không đổi I bằng nhau về độ lớn và ngược chiều nhau, cách nhau một khoảng cách $2a$.

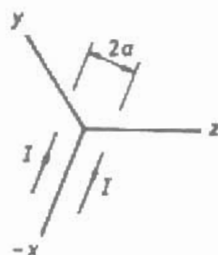
(a) Hãy tìm biểu thức của cường độ từ trường tại một điểm nằm trong mặt phẳng giữa (nghĩa là mặt phẳng xz trong hình 2.75) và cách mặt phẳng chứa các sợi dây dẫn một khoảng cách z.

(b) Hãy tìm tỉ số của gradient từ trường dB_z/dz và cường độ từ trường B.

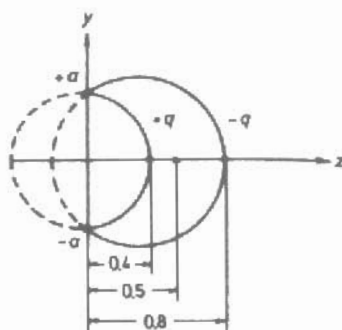
(c) Hãy chứng minh một cách định tính rằng "từ trường hai sợi dây" ở trên có thể được tạo ra bằng các mẩu cực hình trụ có tiết diện, chúng trùng với các mặt đẳng thế thích hợp. Thêm nữa, hãy đưa ra những bằng chứng để chứng minh rằng điện trường tương tự và gradient của nó có thể được tạo ra bằng những ống hình tròn tương đương có dòng điện I được thay bằng điện tích trên một đơn vị chiều dài ống q.

(d) Hãy tham khảo hình 2.76, trên đó đã cho những kích thước cụ thể và miêu tả hai ống dài có tiết diện tròn chứa những điện tích q (trên cm) bằng nhau và trái dấu. Cho rằng điện trường là $E = 8000$ V/cm tại vị trí $z = a = 0.5$cm, hãy tính giá trị của q và hiệu điện thế giữa hai ống.

(*UC, Berkeley*)



Hình 2.75



Hình 2.76

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng các sợi dây dẫn dài mang các dòng điện $+I$ và $-I$ đi qua trục y tại $+a$ và $-a$. Xét một điểm P bất kì và không mất đi tính tổng quát, ta có thể lấy mặt phẳng yz chứa P. Gọi các khoảng cách từ P đến trục y là z và đến trục z là y và gọi các khoảng cách từ P đến các sợi dây dẫn là r_1 và r_2, như trên hình 2.77. Từ định luật Ampe về lưu số suy ra độ lớn của cảm ứng từ $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$ do $+I$ và $-I$ sinh ra là

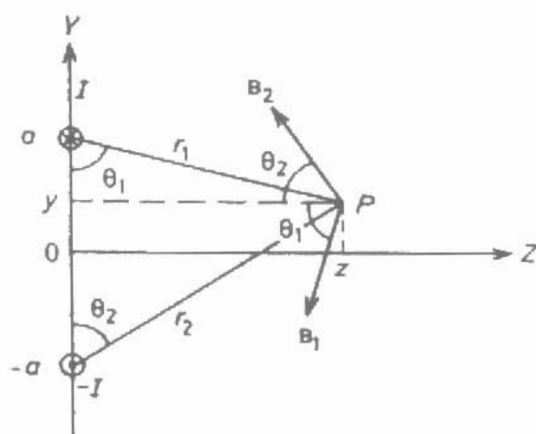
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2},$$

trong đó $r_1 = [z^2 + (a - y)^2]^{\frac{1}{2}}$ và $r_2 = [z^2 + (a + y)^2]^{\frac{1}{2}}$, và có hướng như được chỉ ra trong hình 2.77. Khi đó cảm ứng từ tổng hợp tại P là $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, có các thành phần sau

$$\begin{aligned}
B_x &= 0\,, \\
B_y &= -B_1 \sin\theta_1 + B_2 \sin\theta_2 \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{z}{r_1^2} + \frac{z}{r_2^2}\right) = -\frac{2\mu_0 I a y z}{\pi r_1^2 r_2^2}\,, \\
B_z &= -B_1 \cos\theta_1 - B_2 \cos\theta_2 \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{a-y}{r_1^2} + \frac{a+y}{r_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Đối với một điểm trong mặt phẳng xz và cách trục y một khoảng bằng z, nghĩa là tại hệ toạ độ $(0, 0, z)$, phương trình trên đơn giản thành:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{(z^2 + a^2)}\mathbf{e}_z\,. \tag{1}$$



Hình 2.77

(b) Phương trình (1) cho

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{az}{(z^2 + a^2)^2} .$$

do đó

$$\frac{dB_z}{dz} \Big/ B_z = -\frac{2z}{z^2 + a^2} .$$

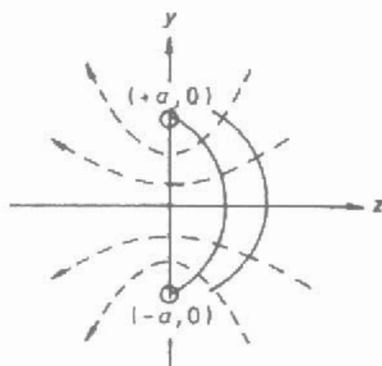
(c) Các đường sức từ song song với mặt phẳng yz được cho bởi phương trình

$$\frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} .$$

Chúng có đối xứng gương với mặt phẳng xz như được minh hoạ bằng các đường đứt nét trên hình 2.78. Nếu chúng ta định nghĩa thế vô hướng từ ϕ_m bằng công thức $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$, thì mặt đẳng thế là các mặt trụ vuông góc với các đường sức ở khắp mọi nơi. Giao tuyến của các mặt đẳng thế này với mặt phẳng yz là các đường liền nét trên hình. Do đó nếu hai sợi dây được thay thế bằng một viên nam châm vĩnh cửu hình trụ với hai mặt bên ($+z$ và $-z$) trùng với các mặt đẳng thế thì có thể nhận được các đường sức từ tương tự, bởi vì đối với một nam châm sắt có $\mu \to \infty$ các đường sức từ gần như vuông góc với các bề mặt của các cực nam châm.

Sử dụng thêm ý tưởng về các từ tích ta sẽ có

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2\phi_m = \rho_m ,$$



Hình 2.78

trong đó ρ_m là mật độ từ tích. Khi đó áp dụng định lý đive ta có:

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot \mathbf{H}dV = q_m$$

ở đây q_m là từ tích được bao quanh bởi mặt S, cho thấy rằng $\mathbf{H}$ tương tự như $\mathbf{D}$ trong tĩnh điện. Áp dụng tích phân đối với một hình trụ đều ta có

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \lambda_m ,$$

trong đó C là chu vi của tiết diện hình trụ và λ_m là từ tích trên một đơn vị chiều dài. So sánh với định luật Ampe về lưu số $\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I$ ta có sự tương đương giữa hai đại lương

$$I \leftrightarrow \lambda_m$$

Tiếp tục phân tích thêm sự giống nhau giữa điện trường và từ trường, ta giả sử rằng một ống kim loại có tiết diện tương-tự được sử dụng thay thế cho viên nam châm hình trụ với các điện tích $\pm\lambda$ trên một đơn vị chiều dài các mặt bên $\pm z$. Khi đó, một sự phân bố trường tĩnh điện sẽ được tạo ra tương tự như các đường sức của $\mathbf{B}$ ở trên. Với sự thay thế $\mathbf{H} \to \mathbf{D}$, $I \to \lambda$, các biểu thức trong các phần (a) và (b) vẫn còn có hiệu lực.

(d) Tương tự, phương trình (1) cho

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(z^2+a^2)} .$$

Với $a = z = 5\times 10^{-3}$m, $E_z = 8\times 10^5$ V/m, ta có:

$$q = 8,90\times 10^{-7}\ \text{C} .$$

Hiệu điện thế giữa hai mặt bên hình trụ chứa các điện tích trái dấu q trên một đơn vị chiều dài là

$$\Delta V = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\arctan\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_{z_1}^{z_2} = 2,7\times 10^3 \text{ V}$$

với $z_1 = 4\times 10^{-3}$ m, $z_2 = 8\times 10^{-3}$ m.

2107

Trong một phép đo e/m cho êlectron người ta sử dụng một dụng cụ loại Thomson, nghĩa là cho êlectron đi qua điện trường và từ trường trong ống tia catốt, chú ý rằng nếu hiệu điện thế gia tốc đủ lớn thì tỉ số e/m trở thành một nửa của giá trị đã được công nhận. Lấy $e/m_0 = 1,8\times 10^{11}$ C/kg.

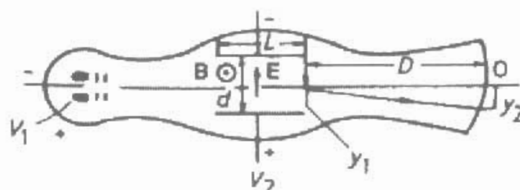
(a) Hãy vẽ phác dụng cụ đã được sử dụng và giải thích ngắn gọn sự hoạt động của nó.

(b) Hãy tìm hiệu điện thế gia tốc V để e/m chỉ còn bằng một nửa giá trị được công nhận của nó. Lấy $c = 3\times 10^8$ m/s.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Dụng cụ loại Thomson được thấy trên hình 2.79, trong đó V_1 là hiệu điện thế gia tốc và V_2 là hiệu điện thế làm lệch hướng.



Hình 2.79

Với từ trường B được đặt thêm vào như trên hình, trường điện từ có tác dụng như một bộ lọc tốc độ. Với các giá trị đã cho của V_1 và V_2, ta điều chỉnh độ lớn của B sao cho các êlectron đập vào tâm O của màn hình. Tại thời điểm này tốc độ của êlectron là $v = E/B$ (vì $eE = evB$). Sau đây từ trường B được ngắt đi và người ta đo được độ dịch lệch y_2 của các êlectron trên màn hình. Tỉ

số e/m được tính như sau

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{eE}{m}\left(\frac{L}{v}\right)^2,$$

$$y_2 = \frac{D + \frac{L}{2}}{L/2} y_1 = \frac{eE}{mv^2}\left(\frac{L^2}{2} + LD\right) = \frac{e}{m} \cdot \frac{dB^2}{V_2}\left(\frac{L^2}{2} + LD\right),$$

Suy ra

$$e/m = \frac{V_2 y_2}{dB^2(\frac{L^2}{2} + LD)}.$$

(b) Khi hiệu điện thế gia tốc rất lớn, các hiệu ứng tương đối tính phải được xét đến. Từ sự bảo toàn năng lượng ta có

$$eV_1 + m_0c^2 = mc^2,$$

Từ đó chúng ta tìm được

$$V_1 = \left(\frac{m}{e} - \frac{m_0}{e}\right)c^2.$$

Vì $\frac{e}{m} = \frac{1}{2}\frac{e}{m_0}$, hiệu điện thế gia tốc là

$$V_1 = \frac{m_0c^2}{e} = \frac{9 \times 10^{16}}{1,8 \times 10^{11}} = 5 \times 10^5 \text{ V}.$$

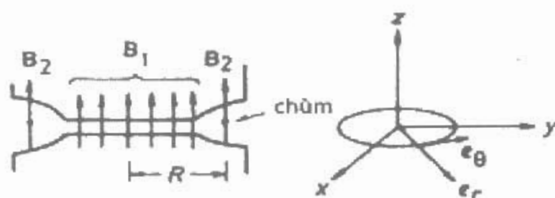
2108

Máy Bêtatron tăng tốc các hạt nhờ suất điện động được cảm ứng gây bởi một từ trường tăng bên trong quỹ đạo hạt. Lấy $\bar{B}_1$ là từ trường trung bình trong quỹ đạo hạt có bán kính R và lấy B_2 là từ trường tại quỹ đạo (xem H. 2.80).

(a) Tìm mối quan hệ như giữa $\bar{B}_1$ và B_2 để hạt vẫn còn được giữ trên quỹ đạo tại bán kính R không phụ thuộc vào năng lượng của nó.

(b) Mối quan hệ trên có còn đúng tại các năng lượng tương đối tính hay không? Hãy giải thích.

(*MIT*)



Hình 2.80

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng từ trường được định hướng theo trục z, nghĩa là $\mathbf{B}_2 = B_2\mathbf{e}_z$. Từ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ mà $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} > 0$, chúng ta thấy rằng điện trường dọc theo hướng $-\mathbf{e}_\theta$ và có đối xứng trục. Khi đó từ

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}$$

ta có

$$2\pi RE = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} .$$

Từ trường trung bình là

$$\bar{B}_1 = \frac{\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}}{\pi R^2} .$$

Do đó

$$E = -\frac{R}{2}\frac{d\bar{B}_1}{dt} .$$

Nếu hiệu ứng của bức xạ tắt dần có thể bỏ qua, phương trình chuyển động của hạt được viết như sau

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2 .$$

Trong hệ toạ độ trụ phương trình này tương đương với hai phương trình

$$\frac{mv^2}{R} = qvB_2 \qquad \text{theo } \mathbf{e}_r \text{ hướng} ,$$

$$\frac{d(mv)}{dt} = -qE = \frac{qR}{2}\frac{d\bar{B}_1}{dt} \text{ theo } \mathbf{e}_\theta \text{ hướng} .$$

Phương trình cuối cùng có thể tích phân để cho $mv = \frac{1}{2}qR\bar{B}_1$ với giả thiết $v = 0, B_1 = 0$ tại $t = 0$. Do đó, $B_2 = \frac{mv}{Rq}, \bar{B}_1 = \frac{2mv}{Rq}$. Tức là cần phải có $B_2 = \bar{B}_1/2$.

(b) Đối với trường hợp tương đối tính, phương trình chuyển động của hạt là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,.$$

Bằng cách phân tích tương tự, ta một lần nữa ta lại nhận được hệ thức $B_2 = \bar{B}_1/2$.

2109

(a) Hãy tính vectơ phân cực điện **P** và mật độ điện tích liên kết mặt cũng như mật độ điện tích liên kết khối trong một hình trụ cách điện dài, quay với tốc độ góc ω quanh trục của nó trong một từ trường đều **B** song song với trục.

(b) Một cuộn xôlênôit dạng hình xuyến có các kích thước $R = 1$ mét, đường kính của vòng dây $= 10$ cm và số vòng cuộn là $= 1000$. Nếu một dòng điện 10 Ampe chạy qua dây dẫn, hãy xác định độ lớn và hướng của lực tác dụng lên một vòng dây?

(c) Hãy tìm áp suất bức xạ trên một cái gương ở cách xa một bóng đèn 70 W là 1 m. Giả thiết rằng bức xạ tới vuông góc.

(d) Một sóng điện từ phẳng đi tới một vật dẫn hoàn hảo (siêu dẫn) theo hướng vuông góc. Hãy tìm các trường phản xạ **E** và **B**, mật độ điện tích mặt và mật độ dòng mặt qua các trường đi đến vật dẫn.

(e) Hai điện tích q và $-q$ được đưa từ vô hạn đến một vị trí cách một mặt phẳng dẫn điện một khoảng cách d và cách nhau một khoảng cách r. Hãy tìm công do một ngoại lực thực hiện trong quá trình làm dịch chuyển các điện tích. Hãy cho biết cả độ lớn và dấu.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Phương trình cơ bản đối với điện trường trong một môi trường điện môi chuyển động với vận tốc **v** trong một từ trường **B** là

$$\mathbf{D} = k\varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0(k-1)\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,,$$

trong đó k là hằng số điện môi tương đối của nó. Đối với một điểm cách trục quay một khoảng cách r, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ và $\mathbf{v}\times\mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{B})\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\boldsymbol{\omega} = \omega B\mathbf{r}$ khi **r** vuông góc với **B**. Vì không có các điện tích tự do, theo định lý Gauss

$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ suy ra $\mathbf{D} = 0$. Khi đó từ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, ta nhận được

$$\mathbf{P} = -\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B \mathbf{r}\,.$$

Do đó mật độ điện tích liên kết khối là

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r P_r) = -2\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B$$

và mật độ điện tích liên kết mặt là

$$\sigma' = P_r = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B a\,,$$

vì $r = a$ đối với bề mặt hình trụ.

(b) Do đối xứng và sử dụng định luật Ampe về lưu số ta nhận được cảm ứng từ trong một xôlênôit có dạng hình xuyến như sau

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,,$$

trong đó r là khoảng cách từ tâm của hình xuyến. Xét một phần nhỏ có chiều dài dl của xôlênôit. Phần này chứa $\frac{N}{2\pi R} dl$ vòng dây, với R là bán kính của hình xuyến. Coi một đoạn của phần này như một phần tử dòng điện, nó trương với một góc $d\theta$ tại trục của xôlênôit

$$\Delta I = \frac{N I dl}{2\pi R} \rho d\theta\,,$$

trong đó θ là góc tạo bởi bán kính từ trục đến đoạn đó và đường từ trục đến tâm của hình xuyến, ρ là bán kính của một vòng dây. Lực từ tác dụng lên phần tử dòng điện đó có hướng theo bán kính và có độ lớn

$$\begin{aligned} dF &= \Delta I \cdot \frac{B}{2} = \frac{N I \rho}{4\pi R} B d\theta dl \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 \rho}{8\pi^2 R r} d\theta dl\,, \end{aligned}$$

ở đây $B/2$ đã được sử dụng thay thế cho B, bởi vì từ trường đã được tạo ra bởi chính phần tử dòng điện đó sẽ phải bị loại ra khỏi từ trường toàn phần. Chú ý rằng dF vuông góc với bề mặt của xôlênôit và chỉ có thành phần $dF \cdot \cos\theta$

của nó nằm dọc theo đường thẳng từ trục đến tâm của hình xuyến là không triệt tiêu với một phần tử khác tại $2\pi - \theta$. Vì

$$r = R + \rho\cos\theta\,,$$

ta có lực toàn phần tác dụng lên trên hình xuyến là

$$\begin{aligned}
F &= \int \cos\theta dF \\
&= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 R}\int_0^{2\pi R} dl \int_0^{2\pi} \frac{\rho\cos\theta}{R+\rho\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{R}{R+\rho\cos\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - \left(1 + \frac{\rho}{R}\cos\theta\right)^{-1}\right] d\theta \\
&= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 1000^2\times 10^2}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-0,05^2}}\right] \\
&= -0,079 \text{ N}
\end{aligned}$$

Do đó, lực tác dụng lên một vòng dây là

$$\frac{F}{N} = -\frac{0,079}{1000} = -7,9\times 10^{-5} \text{ N}$$

và hướng về tâm của hình xuyến.

(c) Động lượng của trường điện từ đi đến gương trên một đơn vị thời gian và trên một đơn vị diện tích là $\frac{W}{4\pi d^2 c}$, với W là công suất của bóng đèn và d là khoảng cách từ bóng đèn đến gương. Giả thiết rằng gương phản xạ một cách hoàn toàn. Độ biến thiên của động lượng xảy ra trên gương trong một đơn vị thời gian và một đơn vị diện tích chính là áp suất

$$p = \frac{2W}{4\pi d^2 c} = \frac{2\times 70}{4\pi\times 1^2\times 3\times 10^8} = 3,7\times 10^{-8} \text{ N/m}^2\,.$$

(d) Gọi $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{B}_0$ là các vectơ điện từ trường đi đến, $\mathbf{E}'$ và $\mathbf{B}'$ là các trường phản xạ. Áp dụng hệ thức biên $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$ đối với bề mặt của vật dẫn, ta nhận được $\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0 = 0$, hay $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}_0$, vì cả $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{E}'$ đều là tiếp tuyến đối với biên. Đối với một sóng điện từ phẳng ta có

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{\omega}\mathbf{k}'\times\mathbf{E}' = \frac{1}{\omega}(-\mathbf{k}_0)\times(-\mathbf{E}_0) = \mathbf{B}_0\,.$$

Đối với vật dẫn, mật độ điện tích mặt $\sigma = 0$ và mật độ dòng điện mặt là

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}' + \mathbf{H}_0) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 = -2(\mathbf{k}_0 \times \mathbf{H})/k_0 \\ &= 2\varepsilon_0\omega_0\mathbf{E}_0/k_0 = 2\varepsilon_0 c\mathbf{E}_0 \,. \end{aligned}$$

(e) Công do ngoại lực thực hiện có thể xét theo ba bước:

1. Điện tích điểm q được mang từ vô cực đến khoảng cách d tính từ mặt phẳng dẫn điện. Khi khoảng cách giữa q và mặt phẳng dẫn điện là z, lực (hút) trên q được tính bằng phương pháp ảnh là

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2z)^2} \,.$$

Trong bước này, ngoại lực thực hiện một công

$$W_1 = -\int_\infty^d F dz = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d} \,.$$

Lưu ý dấu trừ trước dấu tích phân là vì F và dz là ngược hướng.

2. Điện tích điểm $-q$ được mang từ vô cực đến khoảng cách d tính từ mặt phẳng dẫn điện nhưng ở xa điện tích q. Công do ngoại lực thực hiện trong quá trình này giống hệt như trong bước 1

$$W_2 = W_1 = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d} \,.$$

3. Điện tích $-q$ được chuyển dịch đến q một khoảng cách r trong khi phải giữ khoảng cách của nó đối với mặt phẳng dẫn điện không đổi là d. Khi điện tích $-q$ cách điện tích q một khoảng x, thành phần nằm ngang của lực (hút) tác dụng lên $-q$ được tính bằng phương pháp ảnh là

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + 4d^2)^{3/2}} \,.$$

Trong bước này công do ngoại lực thực hiện là

$$\begin{aligned} W_3 &= -\int_\infty^r F dx = \int_\infty^r \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx - \int_\infty^r \frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + 4d^2)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + 4d^2)^{1/2}} \,. \end{aligned}$$

Do đó tổng công thực hiện bởi ngoại lực là

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{(r^2+4d^2)^{1/2}}\right]. \end{aligned}$$

Ta cũng có thể giải bài tập này bằng cách xét năng lượng tĩnh điện của hệ. Điện thế tại vị trí của q là

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{\sqrt{r^2+4d^2}}\right)$$

và điện thế tại vị trí của $-q$ là

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{\sqrt{r^2+4d^2}}\right),$$

ở đây một lần nữa ta đã sử dụng phương pháp ảnh. Năng lượng tĩnh điện của hệ được tính bởi công thức $W_e = \frac{1}{2}\Sigma q\varphi$. Lấy điện thế trên mặt phẳng dẫn điện bằng 0, ta tìm được công thực hiện bởi ngoại lực là

$$W = W_e = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{\sqrt{r^2+4d^2}}\right).$$

2110

Một đầu dò Hall với kích thước như được cho trên hình 2.81 có độ dẫn σ và chứa mật độ điện tích ρ. Đầu dò được đặt trong một từ trường B chưa biết có hướng $+y$. Một điện thế bên ngoài V_{ext} được đặt vào hai đầu sinh ra một điện trường theo hướng $+z$. Có thể quan sát được hiệu điện thế Hall V_{Hall} cân bằng ở giữa hai đầu nào? Hãy tìm một biểu thức của B qua $V_{\text{Hall}}, V_{\text{ext}}, \sigma, \rho$ và các kích thước của mũi dò.

(*Wisconsin*)

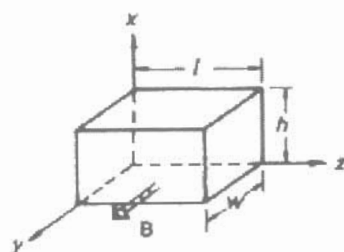
Lời giải:

Hiệu điện thế Hall xuất hiện ở giữa các mặt phẳng $x = 0$ và $x = h$. Đối với trạng thái cân bằng ta có

$$qE_{\text{Hall}} = qBv.$$

Vì

$$E_{\text{Hall}} = \frac{V_{\text{Hall}}}{h}, \quad v = \frac{j}{\rho} = \frac{\sigma E_{\text{ext}}}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho}\cdot\frac{V_{\text{ext}}}{l},$$



Hình 2.81

nên các phương trình trên cho

$$\frac{V_{\text{Hall}}}{h} = B\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{V_{\text{ext}}}{l},$$

hay

$$B = \frac{V_{\text{Hall}}}{V_{\text{ext}}} \cdot \frac{\rho l}{\sigma h}.$$

2111

Một từ trường đều được đặt vuông góc với dòng điện trong một vật dẫn như thấy trên hình 2.82. Lực Lorentz tác dụng lên các hạt tải tích điện sẽ làm lệch hướng các hạt tải qua mẫu để tạo ra một điện thế, gọi là hiệu điện thế Hall, vuông góc với cả hướng của dòng điện I_y và từ trường B_z. Như vậy điện trường toàn phần có thể được biểu thị như sau

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + R_{\text{H}}\mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

trong đó R_{H} là hệ số, σ là độ dẫn điện và j là mật độ dòng điện.

(a) Đối với trường hợp một loại hạt tải, hãy chứng minh rằng R_{H} cho dấu của điện tích hạt tải và mật độ hạt tải.

(b) Mô tả phương pháp thí nghiệm để xác định R_{H} đối với một mẫu ở nhiệt độ phòng. Dựa trên cơ sở hình 2.82, hãy vẽ sơ đồ thí nghiệm chỉ rõ cách mắc dây và tất cả các điểm tiếp xúc với mẫu, bao gồm mạch điện và các thiết bị đo để xác định chính xác hiệu điện thế Hall (độ lớn và sự phân cực của nó).

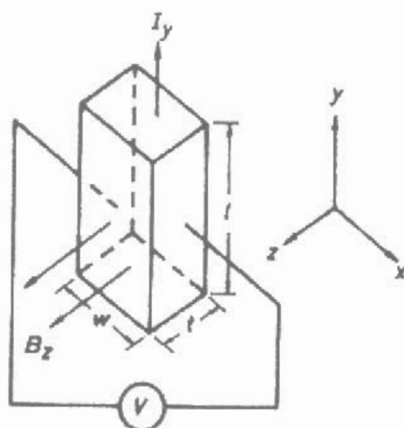
(c) Chuẩn bị một bảng có tất cả các thông số sẽ cần phải đo với từ trường B đóng hoặc mở. Nêu rõ các đơn vị của từng thông số được đo.

(d) Làm thế nào bù trừ được bằng thực nghiệm các hiệu ứng chỉnh lưu có thể tồn tại ở các điểm tiếp xúc điện với mẫu?

(e) Một mẫu (bán dẫn) được phát hiện thấy R_H có giá trị âm ở nhiệt độ phòng. Mô tả các hạt tải tích điện.

(f) Tại nhiệt độ nitơ lỏng R_H của mẫu này đảo ngược thành giá trị dương. Bạn giải thích kết quả đó như thế nào đối với nhiệt độ phòng và nhiệt độ thấp với những giả thiết đơn giản hoá là (1) tất cả các hạt tải tích điện cùng loại có cùng tốc độ trôi và (2) bỏ qua một thực tế là đa số chất bán dẫn có hai vùng riêng biệt chồng lên nhau?

(*Chicago*)



Hình 2.82

Lời giải:

(a) Gọi điện tích của một hạt tải là q và tốc độ trôi là $\mathbf{v}$, khi đó trong trạng thái cân bằng

$$q\mathbf{E}_\perp + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0\,.$$

Vì $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$, với n là mật độ hạt tải, ta có

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{qn}\mathbf{j} \times \mathbf{B}\,.$$

Nhưng ta cũng có

$$\mathbf{E}_\perp = R_H\mathbf{j} \times \mathbf{B}\,,$$

do đó

$$R_H = -\frac{1}{qn}.$$

Như vậy R_H cho biết dấu của hạt tải và mật độ điện tích của các hạt tải.

(b) Một sơ đồ thí nghiệm để xác định R_H được cho trên hình 2.82. Độ lớn và phân cực của hiệu điện thế Hall V có thể đo được bằng cách sử dụng một vôn kế với điện trở trong lớn. Điện trường Hall là $E_\perp = V/w$. Theo đó

$$R_H = \frac{E_\perp}{jB_z} = \frac{Vt}{jwtB_z} = \frac{Vt}{I_y B_z}.$$

I_y có thể đo được bằng một ampe kế, B_z có thể xác định được bằng cách dùng một mẫu có hệ số Hall đã biết trước.

(c) Tất cả các thông số cần phải đo được liệt kê ở dưới đây

Thông số:	B_z	I_y	t	V
Đơn vị:	T	A	m	V

(d) Lặp lại thí nghiệm đối với hai cặp I_y và B_z khác. Ta có

$$R_H = \frac{(V_1 - V_0)t}{I_{y_1} B_{z_1}} = \frac{(V_2 - V_0)t}{I_{y_2} B_{z_2}},$$

trong đó V_0 là hiệu điện thế tiếp xúc gây ra bởi các hiệu ứng chỉnh lưu và có thể xác định từ các biểu thức trên là

$$V_0 = \frac{V_2 I_{y_1} B_{z_1} - V_1 I_{y_2} B_{z_2}}{I_{y_1} B_{z_1} - I_{y_2} B_{z_2}}.$$

Một khi V_0 đã được xác định, nó có thể sẽ được bù trừ.

(e) Vì R_H có giá trị âm, các hạt tải của mẫu có điện tích dương. Do đó mẫu là bán dẫn loại p.

(f) Tại nhiệt độ nitơ lỏng nồng độ của các lỗ trống có quan hệ với các nguyên tử chính giảm đi chủ yếu là do các êlectron và lỗ trống thuần. Nồng độ của các êlectron và lỗ trống thuần bằng nhau, nhưng vì độ linh động của êlectron lớn hơn nên hiệu ứng Hall của chúng vượt quá hiệu ứng Hall của các lỗ trống. Kết quả là R_H của mẫu chuyển dấu thành dương.

2112

Hiệu ứng Hall có liên quan với:

(a) sự lệch của các đường đẳng thế trong một vật liệu mang dòng điện ở trong từ trường.

(b) sự quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng đi qua một vật rắn trong suốt.

(c) điện tích không gian trong dòng êlectron ở trong chân không.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2113

(a) Chứng minh rằng trong một plasma dừng có độ dẫn ohmic σ và độ từ thẩm $\mu = 1$, từ trường **B** thoả mãn phương trình sau

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D\nabla^2 \mathbf{B}\,,$$

trong đó $D = c^2/4\pi\sigma$.

(b) Nếu plasma ở trong trạng thái chuyển động với tốc độ **v**, hãy chứng minh rằng phương trình trên được thay thế bằng

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + D\nabla^2 \mathbf{B}\,.$$

(c) Tại $t = 0$ một plasma ở trạng thái dừng chứa một từ trường

$$\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_z\,,$$

$$B(x) = \begin{cases} B_0, & |x| < L \\ 0, & |x| > L\,, \end{cases}$$

trong đó B_0 là một hằng số. Hãy xác định sự phụ thuộc thời gian của từ trường với giả thiết rằng plasma vẫn ở trạng thái dừng.

(d) Độ dẫn trung bình của trái đất xấp xỉ bằng độ dẫn của đồng, tức là $\sigma \sim 10^{15}\mathrm{s}^{-1}$. Từ trường của trái đất có phải vẫn là từ trường nguyên thuỷ, đã

tồn tại từ khi tạo thành hệ mặt trời, khoảng 5×10^9 năm hay không?

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Nếu một plasma ở trạng thái dừng và dòng điện dịch của nó có thể bỏ qua thì điện từ trường bên trong plasma thoả mãn các phương trình Maxwell sau (trong hệ đơn vị Gauss)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f \,, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_f \,,$$

Và nếu plasma là điện trở thuần, ta cũng có thể viết định luật Ohm

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E} \,.$$

Như vậy

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E} \,,$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\sigma \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,,$$

hay

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D\nabla^2 \mathbf{B} \qquad (1)$$

với $D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$. Phương trình (1) là một phương trình khuếch tán.

(b) Nếu tốc độ của plasma không bằng 0, ta có

$$\mathbf{j}_f = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) .$$

Trong phép gần đúng phi tương đối với $v \ll c$, sử dụng phương trình Maxwell ở trên, ta được

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) .$$

Lấy rota của cả hai vế ta có

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \,. \qquad (2)$$

(c) Đối với một plasma ở trạng thái dừng từ trường được xác định bởi phương trình (1). Từ điều kiện ban đầu ta thấy rằng (1) có thể được quy về phương trình khuếch tán một chiều

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2}.$$

Tách các biến số bằng đặt $B_z(x,t) = X(x)T(t)$, ta được

$$\frac{1}{DT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\omega^2$$

Phương trình này có nghiệm là

$$T(t) = Ae^{-\omega^2 Dt}, \quad X(x) = Ce^{i\omega x}.$$

do đó

$$B_z(x,t,\omega) = A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega x}.$$

Vì ω là bất kì, nên nghiệm tổng quát là

$$B_z(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega x}d\omega.$$

Đối với $t = 0$, nghiệm trên quy về

$$B_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$

Và bằng phép biến đổi Fourier ta nhận được

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_z(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi.$$

Do đó

$$B_z(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\xi)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega(x-\xi)}d\omega\right]d\xi,$$

trong đó tích phân xác định bên trong ngoặc vuông có thể tính là,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega(x-\xi)}d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}}e^{-(x-\xi)^2/4Dt},$$

và $B(\xi)$ được cho bởi điều kiện ban đầu

$$B_z(\xi) = \begin{cases} B_0, & \text{với} \quad |\xi| \le L \\ 0, & \text{với} \quad |\xi| > L. \end{cases}$$

Do đó, sự tiến hoá theo thời gian của từ trường được cho bởi phương trình

$$B_z(x,t) = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \,. \qquad (3)$$

(d) Không có khả năng từ trường trái đất vẫn là từ trường nguyên thuỷ đã tồn tại từ khi hình thành hệ mặt trời cách đây khoảng 5×10^9 năm trước, vì B_0 có thể biến mất nhanh chóng do khuếch tán. Một chứng minh bán định lượng được đưa ra dưới đây:

Vì độ dẫn của trái đất xấp xỉ là $\sigma \approx 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, nên hệ số khuếch tán của từ trường trái đất là

$$D = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \approx 10^5\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$$

và $Dt \approx 10^{22}$ đối với $t = 5 \times 10^9$ năm $= 1,5 \times 10^{17}$s. Kích thước dài của trái đất là $L \simeq 10^9$ cm. Như vậy, số mũ trong phương trình (3) gần đúng là

$$\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} \approx \frac{L^2}{4Dt} \sim 10^{-4} \,,$$

Suy ra

$$e^{-(x-\xi^2)/4Dt} \approx 1$$

và

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \approx L \,.$$

do đó

$$B_z(x,t) = \frac{LB_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \approx 10^{-4} B_0 \,.$$

Điều này cho thấy rằng từ trường của trái đất hiện tại chỉ còn bằng $10^{-4} B_0$ nếu nó phát sinh từ một từ trường nguyên thuỷ B_0. Với từ trường trái đất hiện tại cỡ ~ 1 Gs, từ trường nguyên thuỷ của trái đất đã có thể là $B_0 \sim 10^4$ Gs. Giá trị này lớn hơn nhiều so với các từ trường trong plasma của các thiên thể khác nhau.

2114

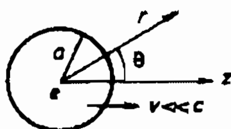
Mô hình của một êlectron bao gồm một vỏ có phân bố điện tích đồng đều trên bề mặt hình cầu bán kính a. Êlectron chuyển động với tốc độ $v \ll c$ (xem H. 2.83).

(a) **E** và **B** tại một điểm (r, θ) ngoài quả cầu là bao nhiêu?

(b) Hãy tìm giá trị của a sao cho động lượng toàn phần do trường sinh ra đúng bằng động lượng cơ học mv. v là tốc độ của êlectron.

(c) Sử dụng giá trị này của a để tính năng lượng trong trường của điện tích chuyển động và so sánh nó với năng lượng nghỉ và động năng.

(*Wisconsin*)



Hình 2.83

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu êlectron đứng yên Σ', trường điện từ tại một điểm có vectơ bán kính $\mathbf{r}'$ tính từ điện tích đó (trong hệ đơn vị Gauss) là

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0.$$

Trong hệ phòng thí nghiệm Σ, bằng phép biến đổi Lorentz (với $v \ll c$), suy ra các trường là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}' = \mathbf{E}',$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'.$$

Điểm trường có toạ độ (r, θ) trong hệ quy chiếu Σ như thấy trong hình 2.83. Khi $v \ll c$, ta có $r' \approx r$ và

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3} \simeq \frac{e\mathbf{r}}{r^3},$$
$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' \simeq \frac{e}{c} \cdot \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

với các độ lớn

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad B = \frac{ev\sin\theta}{cr^2}.$$

(b) Mật độ động lượng của trường là

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{N}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\,.$$

Thay thế các biểu thức của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ vào, ta được

$$\mathbf{g} = \frac{e^2}{4\pi c^2}\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^6} = \frac{e^2}{4\pi c^2 r^5}(\mathbf{v}r - v\mathbf{r}\cos\theta)\,.$$

Do đó động lượng của trường điện từ của êlectron là:

$$\mathbf{P} = \iiint\limits_{\infty} \mathbf{g}dV = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^{\infty} dr \frac{e^2 v(1-\cos^2\theta)}{4\pi c^2 r^4} r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{2e^2 v}{3c^2 a}\mathbf{e}_z = \frac{2e^2}{3c^2 a}\mathbf{v}\,.$$

Lưu ý rằng trong biểu thức dưới dấu tích phân ở trên, thành phần của $\mathbf{g}$ vuông góc với $\mathbf{v}$ sẽ bị triệt tiêu khi lấy tích phân, chỉ có thành phần song song với $\mathbf{v}$ cần được xét đến.

Nếu động lượng trường điện từ của êlectron bằng động lượng cơ $m\mathbf{v}$ của nó, nghĩa là $\frac{2e^2}{3c^2 a}\mathbf{v} = m\mathbf{v}$, khi đó

$$a = \frac{2e^2}{3mc^2} = \frac{2}{3} \times 2{,}82 \times 10^{-5}\,\mathring{A} = 1{,}88 \times 10^{-5}\,\mathring{A}\,.$$

(c) Năng lượng của trường của êlectron là

$$W = \iiint\limits_{\infty} \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)dV = \iiint\limits_{\infty} \frac{1}{8\pi}\left[\frac{e^2}{r^4} + \frac{e^2 v^2 \sin^2\theta}{c^2 r^4}\right]dV$$

$$= \frac{e^2}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^{\infty} r^2 \sin\theta \left[\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{r^4}\right] dr$$

$$= \frac{e^2}{2a}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{3mc^2}{4}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{3}{4}mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Suy ra đối với $v \ll c$, $\frac{1}{2}mv^2 \ll W \lesssim mc^2$.

2115

Một chùm các nguyên tử Na (ở trạng thái cơ bản $^2S_{1/2}$) phân cực theo hướng $+x$ được phóng theo hướng z qua một vùng có từ trường theo hướng

$+y$. Mô tả dạng của chùm nguyên tử đó theo dòng chảy từ vùng từ trường (cả cấu trúc không gian và sự phân cực), giả thiết từ trường có gradient lớn theo hướng y.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Nguyên tử Na phân cực theo hướng $+x$ có xác suất là một nửa ở trạng thái riêng $S_y = +\frac{\hbar}{2}$ và một nửa ở trạng thái riêng $S_y = -\frac{\hbar}{2}$. Dưới tác dụng của từ trường $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ với $\frac{dB}{dy} > 0$, nguyên tử Na có $S_y = +\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $-y$, trong khi nguyên tử Na có $S_y = -\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $+y$. Như vậy, khi đi qua từ trường các nguyên tử Na sẽ tách thành hai chùm với các hướng phân cực là $-y$ và $+y$. (Vì $\Delta E = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{mc}(-\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{mc} S_y B$, và $\frac{dB}{dy} > 0$, các nguyên tử Na có $S_y = \frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $-y$ và các nguyên tử Na có $S_y = -\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $+y$).

2116

Trong một hệ quy chiếu S có một trường điện từ đều

$$\mathbf{E} = 3A\mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{B} = 5A\mathbf{e}_z$$

(trong hệ đơn vị Gauss). Một ion có khối lượng nghỉ m_0 và điện tích q được thả ra từ trạng thái yên tại $(0, b, 0)$. Phải mất bao nhiêu thời gian ion này mới quay trở lại trục y?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Phương trình lực Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right)$$

có các phương trình thành phần

$$\begin{cases} m_0\ddot{x} = 3Aq + \frac{5Aq}{c}\dot{y}\,, & (1) \\ m_0\ddot{y} = -\frac{5Aq}{c}\dot{x}\,, & (2) \\ m_0\ddot{z} = 0\,. & (3) \end{cases}$$

Lấy tích phân (3) và lưu ý rằng $z|_{t=0} = 0, \dot{z}|_{t=0} = 0$, ta có $z = 0$. Lấy tích phân (2) và sử dụng $x|_{t=0} = 0, \dot{y}|_{t=0} = 0$, ta tìm được

$$\dot{y} = -\frac{5Aq}{m_0c}x\,. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta được

$$\ddot{x} + \left(\frac{5Aq}{m_0c}\right)^2 \left(x - \frac{3m_0c^2}{25Aq}\right) = 0\,.$$

Với $\dot{x}|_{t=0} = 0$ ta nhận được

$$x = \frac{3m_0c^2}{25Aq}(1 - \cos\omega t)\,,$$

trong đó

$$\omega = \frac{5Aq}{m_0c}\,.$$

Lưu ý rằng $x = 0$ tại các thời điểm $t = \frac{2n\pi}{\omega}$. Lấy $n = 1$, khi đó

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_0 c}{5Aq}\,.$$

Đây là khoảng thời gian mà sau nó ion quay trở lại trục y.

2117

Một từ trường có thể chặn dòng điện trong một điôt. Xét một từ trường đều $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ lấp đầy khoảng trống giữa hai vật dẫn vô hạn trong mặt phẳng yz. Catốt được đặt tại $x = 0$ và anốt đặt tại $x = d$. Một điện thế dương V_0 được đặt vào anốt. Êlectron rời catốt với tốc độ ban đầu bằng 0 và mật độ điện tích của chúng gây ra điện trường không đều

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, 0, 0\right)\,.$$

(a) Dưới các điều kiện ở trạng thái dừng, những đại lượng nào của chuyển động êlectron là các hằng số?

(b) Hãy xác định cường độ từ trường cần thiết để làm cho các êlectron phản xạ trở lại trước khi chúng đạt đến anốt.

(MIT)

Lời giải:

Khi trọng lực được bỏ qua, chuyển động của các êlectron được diễn tả bằng các phương trình sau (giả thiết $v \ll c$)

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = -e\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y B_0\right)\,, & (1)\\ m\frac{dv_y}{dt} = ev_x B_0\,, & (2)\\ m\frac{dv_z}{dt} = 0\,. & (3)\end{cases}$$

(a) Lấy tích phân (3) ta có

$$v_z(t) = v_z(t=0) = 0\,,$$
$$z(t) = z(t=0) = \text{const}.$$

Do đó toạ độ và tốc độ của êlectron theo hướng z là không đổi, trường hợp đặc biệt là $v_z = 0$.

(b) Công thực hiện bởi điện trường làm dịch chuyển một êlectron từ catốt đến anốt là

$$W = \int_0^d -e \cdot \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx = eV_0\,,$$

vì từ trường không sinh ra công. Khi êlectron đạt đến anốt, độ lớn của tốc độ $\mathbf{v}_f = v_{fx}\boldsymbol{i} + v_{fy}\boldsymbol{j}$ của nó sẽ nhận được bằng cách cho động năng của êlectron bằng công đã thực hiện bởi điện trường

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = eV_0\,,$$

suy ra

$$v_f = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\,.$$

Nếu êlectron không thể đạt đến anốt, chúng ta cần

$$v_{fx} = 0\,, \quad v_{fy} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\,.$$

Viết (2) như sau

$$m\frac{dv_y}{dt} = eB_0\frac{dx}{dt}$$

và lấy tích phân cả hai vế, với lưu ý $v_y = 0, x = 0$, tại $t = 0$, ta nhận được

$$m\sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = eB_0 d\,,$$

Suy ra

$$B_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}}\,.$$

Như vậy, cảm ứng từ phải lớn hơn nhiều so với $\sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}}$ để êlectron phản xạ trở lại trước khi đạt đến anốt.

2118

Các vi khuẩn đặc biệt có thể sống ở những nơi chẳng hấp dẫn tí nào ví dụ như dầu và nước thải của các nhà máy. Một vi khuẩn sống ở những nơi hoàn toàn tối và trong các bề mặt chất lỏng gần đồng nhất sẽ phải đối mặt với vấn đề định hướng rất nghiêm trọng mỗi khi phải ngoi lên lấy oxy và rồi ngụp xuống để lấy thức ăn cho phần bữa ăn quan trọng của nó. Có cách nào để giải quyết vấn đề này? Một nhóm các vi khuẩn đã giải quyết được vấn đề này bằng cách đưa một nam châm ô xít sắt vào bên trong tế bào của nó. Hãy bàn luận những câu hỏi sau một cách định lượng để làm sáng tỏ bản chất của các phép gần đúng thô cần thiết đã được sử dụng.

(a) Vì sao không sử dụng cảm nhận về gradient áp suất (độ chênh áp suất) trong chất lỏng thay cho việc sử dụng một nam châm?

(b) Hãy tính mômen từ tối thiểu có thể sử dụng để xếp thẳng hàng các vi khuẩn.

(c) Giả thiết cho chiều dài của kim nam châm là 10^{-4}, hãy tính đường kính tối thiểu của nó.

(d) Tại sao một nam châm hình kim tốt hơn một nam châm hình cầu?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Gradient áp suất trong một chất lỏng (sức nổi) có thể làm cho một vi khuẩn ngoi lên hoặc ngụp xuống phụ thuộc vào trọng lượng riêng của nó so sánh với chất lỏng. Trái lại, một nam châm bên trong một vi khuẩn có thể làm cho một vi khuẩn ngoi lên hoặc ngụp xuống phụ thuộc vào sự định hướng tương đối giữa mômen từ và từ trường trái đất. Vì sự chuyển động nhiệt ngẫu nhiên (chuyển động Brown) sự định hướng tương đối này cũng thay đổi một cách ngẫu nhiên để một vi khuẩn có thể ngoi lên lấy oxy và ngụp xuống lấy thức ăn. Thực tế, các nam châm rất nhỏ đó của các vi khuẩn có thể xâu chuỗi với nhau tạo thành những nam châm lớn có mômen m. Trong từ trường trái đất không đều, lực làm cho một nam châm để ngoi lên hoặc ngụp xuống là

$$F_z = \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z},$$

trong đó B là cảm ứng từ của trái đất. Nếu chúng ta biểu thị chiều cao ở trên bề mặt đất là z, khi đó $\frac{\partial}{\partial z}|\mathbf{B}|$ là âm khi nó đi lên. F_z có thể chỉ lên trên hoặc xuống dưới phụ thuộc vào sự định hướng của m đối với $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$.

(b) Trong hệ đơn vị Gauss năng lượng tương tác giữa hai lưỡng cực từ có

mômen $\mathbf{m}_1$ và $\mathbf{m}_2$ là

$$W = -\mathbf{m}_1 \cdot \left[\frac{\mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}\right]$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vectơ bán kính từ $\mathbf{m}_2$ đến $\mathbf{m}_1$.

Đối với các nam châm bên trong hai vi khuẩn cạnh nhau sắp xếp sao cho đầu này gối đầu kia, $m_1 = m_2 = m, m_1 // m_2, r = d = 10^{-4}$ cm, và năng lượng tương tác là

$$W = \frac{2m^2}{d^3}.$$

Năng lượng chuyển động Brown của các vi khuẩn là $\sim kT$, với k là hằng số Boltzman và T là nhiệt độ tuyệt đối. Sự chuyển động này có xu hướng phá vỡ sự sắp xếp thẳng hàng của các vi khuẩn. Do đó để có sự sắp xếp thẳng hàng của các nam châm vi khuẩn, cần phải thoả mãn hệ thức

$$\frac{2m^2}{d^3} \gtrsim kT,$$

Từ đây suy ra mômen từ tối thiểu bên trong một vi khuẩn là

$$|\mathbf{m}_{\min}| \gtrsim \sqrt{kTd^3}.$$

(c) Lấy r, M và d là bán kính tiết diện, độ từ hoá và chiều dài của một kim nam châm, khi đó mômen lưỡng cực từ của nó là

$$m = \pi r^2 dM.$$

kết hợp với kết quả trong câu (b), ta nhận được

$$r \gtrsim \left(\frac{\sqrt{kTd}}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lấy T là nhiệt độ phòng, $T \sim 300$ K. Độ từ hoá bão hoà của một nam châm sắt từ tại nhiệt độ này là $M \sim 1,7 \times 10^3$ Gs. Khi đó phương trình trên cho

$$r \simeq 0,6 \times 10^{-6} \text{ cm}.$$

(d) Nam châm dạng kim tốt hơn so với nam châm dạng cầu vì chúng có thể dễ dàng sắp xếp thành hàng hơn.

2119

Để làm một mô hình nhằm mô phỏng các tính chất điện động lực của một pulsar, ta xét một quả cầu bán kính R, quay giống như một vật thể rắn với tốc độ góc ω quanh một trục cố định. Do đó sự phân bố điện tích và dòng điện đối xứng đối với trục này (và đối với mặt phẳng trung gian vuông góc của pulsar). Điện tích toàn phần của quả cầu bằng 0. Trong chân không bên ngoài pulsar, từ trường là từ trường của một lưỡng cực từ $\mathbf{m}$ song song với trụt quay. Từ trường bên trong pulsar phù hợp với từ trường bên ngoài, nhưng ở những nơi khác là bất kì.

(a) Độ lớn của các lực điện và từ tác dụng lên các hạt điện tích bên trong pulsar rất lớn so với tất cả các lực khác. Vì các hạt điện tích được giả thiết rằng cùng chung chuyển động quay với pulsar, suy ra một hệ thức gần đúng khá chính xác, đó là $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, với $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ là tốc độ cục bộ, tại khắp mọi nơi bên trong pulsar. Lợi dụng điều kiện này tại các điểm ngay ở bên trong bề mặt của pulsar, hãy chứng minh rằng tại tất cả những điểm này ta có

$$E_\theta = -\frac{\mu_0 m\omega \sin\theta\cos\theta}{2\pi R^2},$$

trong đó θ là góc cực đối với trục.

(b) Dựa vào kết quả trên hãy tìm điện thế tĩnh điện tại một điểm bất kì bên ngoài quả cầu.

(c) Hãy chứng minh rằng phương trình $\mathbf{E} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}$ là không đúng ở ngay tại bên ngoài pulsar.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Như ta thấy trên hình 2.84, tại một điểm P bên trong bề mặt của quả cầu ($r \approx R$), từ trương sinh ra bởi lưỡng cực $\mathbf{m}$ là

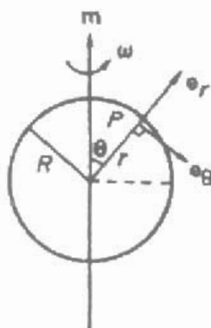
$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= B_r\mathbf{e}_r + B_\theta\mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m\cos\theta}{R^3}\mathbf{e}_r + \frac{m\sin\theta}{R^3}\mathbf{e}_\theta\right).\end{aligned}$$

Như vậy điện trường tại điểm P là

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{B}|_{r\approx R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m\omega\sin^2\theta}{R^2}\mathbf{e}_r - \frac{2m\omega\cos\theta\sin\theta}{R^2}\mathbf{e}_\theta\right),\end{aligned}$$

với thành phần θ

$$E_\theta = -\frac{\mu_0 m\omega \sin\theta\cos\theta}{2\pi R^2}\,.$$



Hình 2.84

(b) Lấy điện thế trên đường xích đạo làm mốc quy chiếu, điện thế cảm ứng tại một điểm có vĩ độ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ là

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} E_\theta R d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\mu_0 m\omega \sin\theta d(\sin\theta)}{2\pi R} = \frac{\mu_0 m\omega \sin^2\theta}{4\pi R}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\ &= \frac{\mu_0 m\omega}{4\pi R}(\cos^2\alpha - 1) = \frac{B_P\omega R^2}{2}(\cos^2\alpha - 1)\,, \end{aligned}$$

trong đó $B_P = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$ là cảm ứng của lưỡng cực từ tại cực bắc.

(c) Phương trình $\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ không còn đúng bên ngoài quả cầu. Nguyên nhân là như sau: Phương trình này được suy ra từ phép biến đổi của trường điện từ (với $v \ll c$),

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\,,$$

trong đó $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ là các trường tại một điểm ở ngay bên trong bề mặt của pulsar được đo bởi một người quan sát trong hệ quy chiếu đứng yên K cố định tại một ngôi sao ở xa, $\mathbf{E}'$ là điện trường được quan sát trong hệ quy chiếu chuyển động K' cố định với bề mặt của pulsar và $\mathbf{v} = \omega\times\mathbf{R}$ là tốc độ của K' đối với K. Bởi vì trong K' lớp bề mặt của pulsar tương đương với

một vật dẫn ở trạng thái dừng, $\mathbf{E}' = 0$ (vì nếu không, $\mathbf{j}' = \sigma\mathbf{E}' \neq 0$, nghĩa là người quan sát trong K' có thể thấy một dòng điện). Như vậy chúng ta có $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{B}$. Nhưng tại các điểm ngay ở bên ngoài bề mặt của pulsar yêu cầu $\mathbf{E}' = 0$ là không cần thiết. Mật độ điện tích trên bề mặt nói chung cũng không bằng 0 sao cho điều kiện biên không có thể cho $\mathbf{E}' = 0$ tại các điểm ngay ở bên ngoài bề mặt. Do đó $\mathbf{E} \neq -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ bên ngoài quả cầu.

PHẦN III

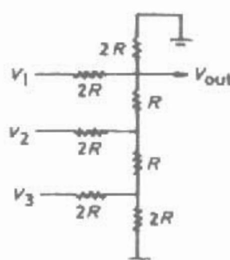
PHÂN TÍCH MẠCH ĐIỆN

1. PHÂN TÍCH MẠCH ĐIỆN CƠ BẢN (3001-3026)

3001

Giả thiết rằng các điện áp đầu vào V_1, V_2, và V_3 trong mạch điện trên hình 3.1 có thể nhận các giá trị hoặc bằng 0 hoặc bằng 1 (0 có nghĩa là nối đất). Như vậy có 8 tổ hợp khả dĩ của các điện áp đầu vào. Hãy tính điện áp đầu ra V_{out} đối với từng khả năng này.

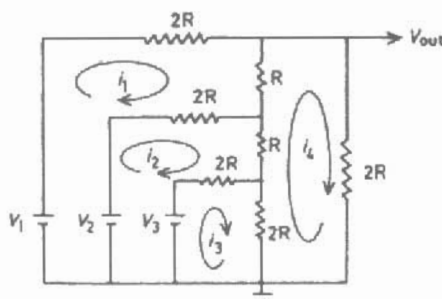
(UC, Berkeley)



Hình 3.1

Lời giải:

Mạch điện trong hình 3.1 có thể vẽ lại như trên hình 3.2



Hình 3.2

Chọn chiều các dòng điện trong các mạch thành phần như được chỉ ra trên

hình. Theo định luật Kirchhoff ta có

$$\begin{aligned}
V_3 &= [2(i_3 - i_2) + 2(i_3 - i_4)]R\,, \\
V_2 - V_3 &= [2(i_2 - i_1) + (i_2 - i_4) + 2(i_2 - i_3)]R\,, \\
V_1 - V_2 &= [2i_1 + (i_1 - i_4) + 2(i_1 - i_2)]R\,, \\
0 &= 2(i_4 - i_3) + (i_4 - i_2) + (i_4 - i_1) + 2i_4\ .
\end{aligned}$$

Sau khi giải tìm i_4, ta được

$$V_{\text{out}} = 2i_4R = \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{12}\ .$$

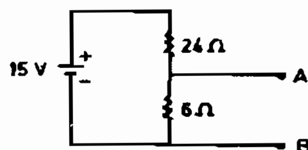
V_{out} đối với các giá trị khác nhau của V_1, V_2, và V_3 được cho trong bảng dưới đây.

V_1	V_2	V_3	V_{out}	V_1	V_2	V_3	V_{out}
0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$
0	0	1	$\frac{1}{12}$	1	0	1	$\frac{5}{12}$
0	1	0	$\frac{1}{6}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$\frac{1}{4}$	1	1	1	$\frac{7}{12}$

3002

Đặc trưng vôn - ampe của các đầu ra A, B (H. 3.3) giống như đặc trưng của một ắc quy có suất điện động ε_0 và điện trở trong r. Hãy tìm ε_0 và r và dòng ngắn mạch của ắc quy đó.

(*Wisconsin*)



Hình 3.3

Lời giải:

Theo định lý Thevenin, suất điện động tương đương là hiệu điện thế giữa A và B khi dòng điện đầu ra bằng 0, nghĩa là, hiệu điện thế hở mạch

$$\varepsilon_0 = V_{AB} = \frac{6}{24+6} \times 15 = 3 \text{ V} .$$

Điện trở trong tương đương là điện trở khi ắc quy được ngắn mạch, nghĩa là, tổ hợp song song của các điện trở

$$r = \frac{6 \times 24}{6+24} = 4,8 \ \Omega .$$

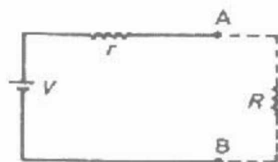
Khi đó ắc quy cung cấp dòng ngắn mạch là

$$I = \frac{\varepsilon_0}{r} = \frac{3 \text{ V}}{4.8 \ \Omega} = 0,625 \text{ A} .$$

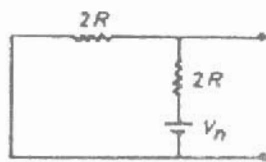
3003

Mạng tuyến tính một chiều (dc) bất kì (một R tải được nối giữa hai điểm bất kì A và B của mạng) tương đương với một mạch nối tiếp bao gồm một ắc quy với suất điện động V và một điện trở r như thấy trên hình 3.4.

(a) Hãy tính V và r của mạch trong hình 3.5.



Hình 3.4



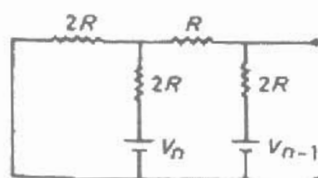
Hình 3.5

(b) Hãy tính V và r của mạch trong hình 3.6.

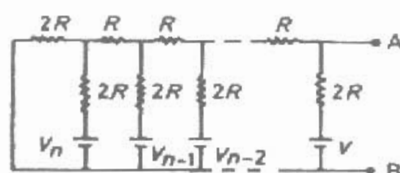
(c) Hãy tính V và r của mạch trong hình 3.7.

(Gợi ý: Sử dụng phép quy nạp toán học).

(Chicago)



Hình 3.6



Hình 3.7

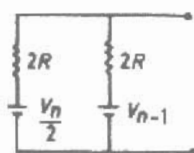
Lời giải:

(a) Theo định lý Thevenin ta tìm được

$$V = \frac{2R}{2R+2R} \cdot V_n = \frac{1}{2} V_n ,$$
$$r = \frac{2R \times 2R}{2R+2R} = R .$$

(b) Sử dụng kết quả của (a) đối với mạch trong hình 3.6 ta nhận được một mạch đơn giản trong hình 3.8. Khi đó theo định lý Thevenin ta có

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{2}\right) + \frac{1}{2}V_{n-1} = \frac{1}{2}\left(V_{n-1} + \frac{1}{2}V_n\right) ,$$
$$r = \frac{2R \times 2R}{2R+2R} = R .$$



Hình 3.8

(c) Bằng phép quy nạp ta có

$$V = \frac{1}{2}\left\{V_1 + \frac{1}{2}\left[V_2 + \frac{1}{2}\left(V_3 + \cdots + \frac{1}{2}\left(V_{n-1} + \frac{1}{2}V_n\right)\cdots\right)\right.\right.$$
$$= 2^{-1}V_1 + 2^{-2}V_2 + \cdots + 2^{-n}V_n ,$$
$$r = R .$$

3004

Bốn tụ điện 1 μF mắc song song, tích điện đến 200 V và phóng điện qua một sợi dây đồng mảnh có chiều dài 5 mm. Sợi dây này có điện trở 4 Ω mét và khối lượng 0,045 gram trên mét. Bạn có nghĩ rằng sợi dây này sẽ bị nóng chảy không? Vì sao?

(*Columbia*)

Lời giải:

Các thông số có liên quan là

Tổng điện dung $C = 4 \times 1 = 4\ \mu F$,

Năng lượng tích trữ trong tụ điện

$$E = \frac{1}{2}\,CV^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times 200^2 = 0,08\,\text{J}\ ,$$

Điện trở của sợi dây đồng $R = 4 \times 5 \times 10^{-3} = 0,02\ \Omega$,

Khối lượng của sợi dây đồng $m = 0,045 \times 5 \times 10^{-3} = 0,225$ mg,

Điểm nóng chảy của đồng $t = 1356^0$C,

Nhiệt dung riêng của đồng $c = 0,091$ cal/g.^{0}C.

Nếu sợi dây đồng ban đầu ở nhiệt độ phòng ($t = 25^0$C), nhiệt cần thiết để đưa nó đến điểm nóng chảy là

$$\begin{aligned} Q &= cm\Delta t = 0,091 \times 0,225 \times 10^{-3} \times (1356 - 25) \\ &= 0,027\ \text{cal} = 0,11\ \text{J}\ . \end{aligned}$$

Vì $Q > E$ sợi dây đồng sẽ không bị nóng chảy.

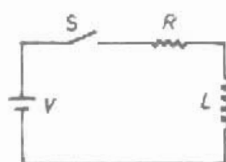
3005

Trong hình 3.9, khoá S đã đóng và một dòng điện một chiều không đổi $I = V/R$ được thiết lập trong một mạch nối tiếp LR đơn giản. Bây giờ khoá S bất ngờ ngắt. Điều gì sẽ xảy ra đối với năng lượng $\frac{1}{2}\,LI^2$ đã được tích trữ trong mạch khi có dòng điện I?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi khoá S được bất ngờ ngắt, năng lượng $\frac{1}{2}\,LI^2$ sẽ phát ra dưới dạng sóng điện từ.



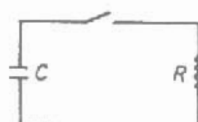
Hình 3.9

3006

(a) Tụ điện trong mạch điện trên hình 3.10 được chế tạo từ hai tấm kim loại vuông phẳng mỗi cạnh dài L và cách nhau một khoảng cách d. Điện dung là bao nhiêu?

(b) Hãy chứng minh rằng năng lượng điện được tích trữ trong tụ C sẽ bị tiêu tán hoàn toàn trong R khi đóng công tắc.

(*Wisconsin*)



Hình 3.10

Lời giải:

(a) Tụ điện có điện dung $C = \frac{\varepsilon S}{d}$. Khi $\varepsilon = \varepsilon_0$ đối với không khí, $C = \varepsilon_0 L^2/d$.

(b) Gọi V_0 là hiệu điện thế hiệu ban đầu giữa các bản cực của tụ điện. Khi đó năng lượng được tích trữ là $W_C = \frac{1}{2}\, CV_0^2$. Sau khi công tắc đóng tại $t = 0$, ta có

$$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC} \, ,$$

$$i(t) = -C\, \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC} \, .$$

Năng lượng tiêu tán trong điện trở là

$$W_R = \int_0^\infty i^2(t) R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2}\, CV_0^2 \, .$$

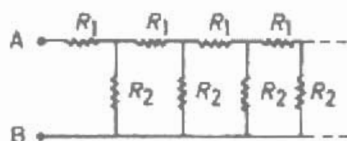
Do đó

$$W_R = W_C \, ,$$

điều này có nghĩa là năng lượng tích trữ trong tụ điện bị tiêu tán hoàn toàn trong điện trở R.

3007

(a) Cho một mạng vô hạn sau (hình 3.11):

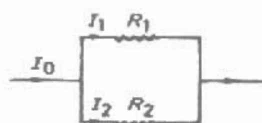


Hình 3.11

Hãy tìm điện trở đầu vào, nghĩa là điện trở tương đương giữa hai đầu A và B.

(b) Hình 3.12 cho thấy hai điện trở mắc song song với giá trị R_1 và R_2. Dòng điện I_0 chia giữa hai điện trở bằng cách nào đó. Hãy chứng minh rằng điều kiện $I_0 = I_1 + I_2$ cùng với điều kiện sự tiêu tán công suất tối thiểu sẽ dẫn đến các giá trị dòng điện giống như ta tính bằng các biểu thức mạch điện thông thường.

(SUNY, Buffalo)



Hình 3.12

Lời giải:

(a) Gọi điện trở tương đương của mạch vô hạn này là R. Sau khi bỏ đi các điện trở của phần đầu tiên, mạch điện còn lại vẫn là mạch vô hạn tương đương với mạch gốc. Mạch tương đương được thấy trên hình 3.13 và có điện trở toàn phần là

$$R = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2} .$$

Đẳng thức trên dẫn tới một phương trình bậc hai của R

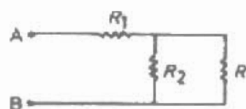
$$R^2 - R_1 R - R_1 R_2 = 0 .$$

Nghiệm dương của nó cho điện trở tương đương

$$R = \frac{R_1}{2} + \frac{\sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}$$

(b) Khi $I_0 = I_1 + I_2$, công suất tiêu tán là

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_1 + (I_0 - I_1)^2 R_2 \ .$$



Hình 3.13

Để đạt công suất tiêu tán cực tiểu, đặt $\frac{dP}{dI_1} = 0$, ta được $2I_1R_1 - 2(I_0 - I_1)R_2 = 0$, hay

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_0 - I_1} = \frac{R_2}{R_1} \ .$$

Đây chính là công thức thường được sử dụng.

3008

Đáp ứng tần số của một bộ lọc dải thông thấp (mạch RC) có thể bù trừ một cách lý tưởng bằng cách nào sau đây:

(a) chính xác chỉ bằng một chuỗi vô hạn các bộ lọc RC.

(b) chính xác chỉ bằng sử dụng các bộ lọc LC.

(c) chính xác bằng một bộ lọc dải thông cao.

(CCT)

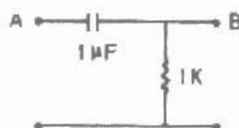
Lời giải:

Câu trả lời là (c).

3009

Một xung điện áp vuông (H. 3.15) được đưa vào đầu A của một mạch điện như trên hình 3.14. Tín hiệu xuất hiện tại B sẽ như thế nào?

(*Wisconsin*)

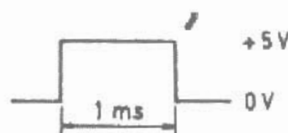


Hình 3.14

Lời giải:

Hằng số thời gian của mạch này là

$$\tau = RC = 1 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} = 10^{-3}\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{ms}\ .$$

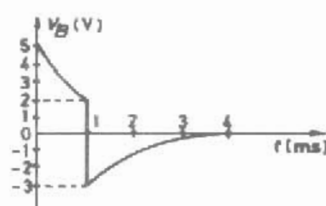


Hình 3.15

Điện áp tại A và B là

$$\begin{aligned} V_A &= 5u(t) - 5u(t-1)\ , \\ V_B &= 5e^{-t/\tau}u(t) - 5e^{-(t-1)/\tau}u(t-1) \\ &= 5e^{-t}u(t) - 5e^{-(t-1)}u(t-1)\ , \end{aligned}$$

trong đó t tính bằng ms. Đồ thị theo thời gian của V_B được cho trong hình 3.16



Hình 3.16

3010

Hãy tính năng lượng có trong tụ điện 3 μF trên hình 3.17.

(Wisconsin)

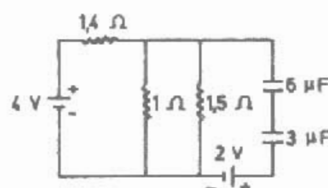
Lời giải:

Điện trở mạch ngoài là

$$1,4 + \frac{1.1,5}{1+1,5} = 2\Omega$$

Hiệu điện thế hai đầu của các tụ điện mắc nối tiếp là

$$V = \left|\frac{4}{2} \times \frac{1.1,5}{1+1,5} - 2\right| = 0,8 \text{ V} .$$



Hình 3.17

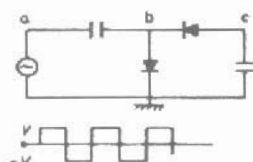
Hiệu điện thế đi qua hai đầu của tụ điện 3 μF là $\frac{6}{3+6} \times 0,8 = 0,53$ V. Như vậy năng lượng tích trữ trong tụ điện 3 μF là

$$E = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-6} \times 0,53^2 = 0,42 \times 10^{-6} \text{ J} .$$

3011

Hình 3.18 cho thấy một mạch điện có hai tụ điện và hai điốt lý tưởng vận hành nhờ một máy phát điện áp. Máy phát sinh ra một sóng vuông ở trạng thái dừng có biên độ V, đối xứng quanh điện thế 0, như được minh hoạ trên hình tại điểm a trong mạch. Hãy vẽ phác dạng của sóng và chỉ ra các giá trị của các mức điện áp tại điểm b và c trong mạch.

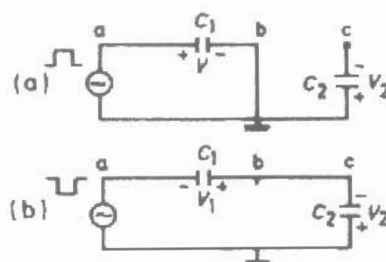
(*Wisconsin*)



Hình 3.18

Lời giải:

Điện trở của một điốt lý tưởng là 0 theo hướng dương (chiều thuận) và bằng ∞ trong hướng âm (chiều nghịch). Hình 3.19 cho mạch tương đương ứng với điện áp dương và âm tại điểm a. Chúng ta sẽ giả thiết rằng máy phát điện áp luôn luôn hoạt động và mạch đã ở trạng thái ổn định.



Hình 3.19

Giả sử trong khi có một xung âm, hiệu điện thế trên C_1 và C_2 lần lượt là V_1 và V_2 với các hướng đã được chỉ ra trên hình 3.19(b)..

Các điểm a,b và c có các điện thế

$$V_a = -V = -V_1 - V_2 ,$$
$$V_b = V_c = -V_2 .$$

Bây giờ điện thế tại a tăng vọt thành $+V$. Hiệu điện thế trên C_2 vẫn giữ là V_2 vì nó không có khả năng phóng điện (xem H. 3.19(a)), trong khi hiệu điện thế trên C_1 thay đổi thành $+V$. Ta có

$$V_{\rm a} = V, \qquad V_{\rm b} = 0\,, \qquad V_{\rm c} = -V_2$$

Sau đó điện thế tại a trở lại thành $-V$. Ta có

$$V_{\rm a} = -V = V - V_2\,,$$

Từ đó cho ta

$$V_2 = 2V\,, \qquad V_1 = -V\,,$$

và

$$V_{\rm b} = V_{\rm c} = -V_2 = -2V\,.$$

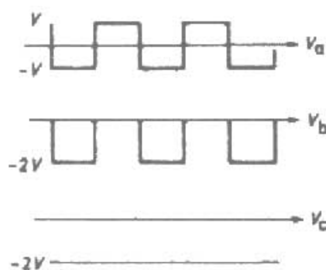
Tổ hợp các giá trị trên ta có

$$V_1 = -V\,, \qquad V_2 = 2V\,,$$

$$V_{\rm b} = \begin{cases} 0 & \text{khi } V_{\rm a} = V \\ -2V & \text{khi } V_{\rm a} = -V \end{cases}$$

$V_{\rm c} = -2V$ tại tất cả mọi thời gian.

Dạng sóng tại các điểm a, b và c được chỉ ra trong hình 3.20.

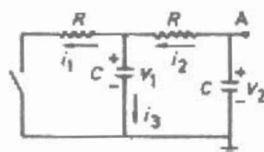


Hình 3.20

3012

Cho mạch điện như trên hình 3.21, các tụ điện ban đầu tích điện đến hiệu điện thế V_0. Tại $t = 0$ công tắc được đóng. Hãy tìm biểu thức của hiệu điện thế tại điểm A sau thời gian t.

(UC, Berkeley)



Hình 3.21

Lời giải:

Giả thiết tại thời gian t hiệu điện thế trên hai tụ điện là V_1, V_2 và các dòng điện trong ba nhánh là i_1, i_2, i_3 như được chỉ rõ trên hình 3.21.

Theo định luật Kirchhoff và phương trình tụ điện ta có

$$\begin{cases} i_1 R + i_2 R - V_2 = 0\,, & (1) \\ i_1 R - V_1 = 0\,, & (2) \\ i_1 - i_2 + i_3 = 0\,; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2 = -C\dfrac{dV_2}{dt}\,, & (4) \\ i_3 = C\dfrac{dV_1}{dt}\,. & (5) \end{cases}$$

Từ (2) và (5) suy ra

$$i_3 = RC\frac{di_1}{dt}\,.$$

Kết hợp phương trình này với các phương trình (3) và (4) ta được

$$i_1 + C\frac{dV_2}{dt} + RC\frac{di_1}{dt} = 0\,. \qquad (6)$$

Từ các phương trình (1) và (4) ta có

$$i_1 = \frac{1}{R}V_2 + C\frac{dV_2}{dt}\,.$$

Thay vào (6), ta được

$$\frac{d^2V_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dV_2}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}V_2 = 0\,.$$

Giải phương trình này ta được

$$V_2 = Ae^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t/RC} + Be^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t/RC}\,,$$

Và do đó

$$V_1 = i_1 R = V_2 + RC\frac{dV_2}{dt}$$
$$= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}Ae^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t/RC} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}Be^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t/RC} .$$

Sử dụng điều kiện ban đầu tại $t = 0$,

$$V_1(0) = V_2(0) = \pm V_0 ,$$

ta được

$$V_A = V_2 = \pm\frac{5-3\sqrt{5}}{10}V_0 e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t/RC} \pm \frac{5+3\sqrt{5}}{10}V_0 e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t/RC}$$
$$\approx \pm(1,17e^{-0,38t/RC} - 0,17e^{-2,62t/RC})V_0 .$$

3013

Một mạch điện bao gồm hai vòng và ba nhánh. Nhánh đầu tiên chứa một ắc quy (có suất điện động ε và điện trở trong R_1) và một khoá S mở. Nhánh thứ hai chứa một điện trở có giá trị R_2 và một tụ điện chưa tích điện có điện dung C. Nhánh thứ ba chỉ có một điện trở có giá trị R_3 (xem H. 3.22).

(a) S đóng tại $t = 0$. Hãy tính điện tích q trên C như một hàm của thời gian t với $t \geq 0$.

(b) Lặp lại bài tập trên nhưng với điện tích ban đầu Q_0 trên C.

(SUNY, Buffalo)

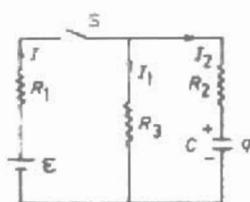
Lời giải:

Gọi dòng điện trong ba nhánh là I, I_1, và I_2 như chỉ rõ trên hình 3.22 và điện tích trên C là q tại thời điểm $t > 0$. Theo định luật Kirchhoff ta có

$$\varepsilon = IR_1 + I_1R_3 ,$$
$$\varepsilon = IR_1 + I_2R_2 + \frac{q}{C} ,$$
$$I = I_1 + I_2 .$$

Vì $\frac{dq}{dt} = I_2$, phương trình trên cho

$$\frac{dq}{dt} = -Aq + B ,$$



Hình 3.22

trong đó

$$A = \frac{R_1 + R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C}, \qquad B = \frac{\varepsilon R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}.$$

Giải ra để tính q ta có

$$q = de^{-At} + \frac{B}{A},$$

Với d được xác định bằng các điều kiện ban đầu như sau

(a) Nếu $q(0) = 0$, khi đó $d = -\frac{B}{A}$, và

$$q = \frac{B}{A}(1 - e^{-At}) = \frac{\varepsilon R_3}{R_1 + R_2}\left(1 - \exp\left\{-\frac{R_1 + R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C}t\right\}\right).$$

(b) Nếu $q(0) = Q_0$, thì $d = Q_0 - \frac{B}{A}$, và

$$q = \frac{B}{A} + \left(Q_0 - \frac{B}{A}\right)e^{-At}$$

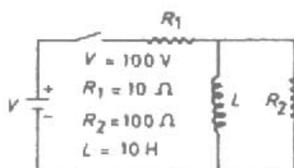
$$= \frac{\varepsilon R_3}{R_1 + R_2} + \left(Q_0 - \frac{\varepsilon R_3}{R_1 + R_2}\right)\exp\left\{-\frac{R_1 + R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C}t\right\}.$$

3014

Cho mạch điện như trên hình 3.23, điện trở của L nhỏ không đáng kể và lúc ban đầu công tắc mở, dòng điện bằng 0. Hãy tìm nhiệt lượng tiêu tán trên điện trở R_2 khi công tắc đóng và được giữ ở trạng thái đóng trong một thời gian dài. Đồng thời, hãy tìm nhiệt tiêu tán trên R_2 khi công tắc sau khi đóng

một thời gian dài thì được mở ra và giữ ở trạng thái mở trong một thời gian dài. (Chú ý đến hình vẽ của mạch và các giá trị của V, R_1, R_2, và L_0 đã được ghi sẵn).

(UC, Berkeley)



Hình 3.23

Lời giải:

Xét một điện trở R và một cuộn tự cảm L mắc nối tiếp với một ắc quy có suất điện động ε. Ta có

$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = IR \ ,$$

hay

$$\frac{-R\,dI}{\varepsilon - IR} = -R\frac{dt}{L} \ .$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln[\varepsilon - I(t)R] = -\frac{t}{\tau} + K \ ,$$

trong đó $\tau = \frac{L}{R}$ và K là hằng số. Đặt $I = I(0)$ tại $t = 0$ và $I = I(\infty)$ khi $t \to \infty$. Khi đó

$$K = \ln[\varepsilon - I(0)R] \ , \qquad I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R} \ ,$$

và nghiệm sẽ được viết dưới dạng sau

$$I(t) = I(\infty) + [I(0) - I(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \ .$$

Bây giờ hãy xét mạch trong hình 3.23.

(1) Khi công tắc vừa mới đóng, ta có

$$I_{R_2}(0) = \frac{V}{R_1 + R_2} = 0,91 \text{ A} \ .$$

Sau khi công tắc đóng một thời gian dài, ta có

$$I_{R_2}(\infty) = 0 \ ,$$

vì trong trạng thái dừng, toàn bộ dòng điện sẽ đi qua L vì nó có điện trở nhỏ không đáng kể.

Vì hằng số thời gian của mạch là

$$\tau = \frac{L}{R_1R_2/R_1 + R_2} = 1,1 \text{ s} \ ,$$

ta có

$$\begin{aligned} I_{R_2}(t) &= I_{R_2}(\infty) + [I_{R_2}(0) - I_{R_2}(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 0,91e^{-0,91t} \text{ A} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{R_2} &= \int_0^\infty I_{R_2}^2(t)R_2dt = \int_0^\infty 0,91^2e^{-1,82t} \times 100dt \\ &= 45,5 \text{ J} \ . \end{aligned}$$

(2) Khi công tắc vừa mới mở, ta có

$$I_L(0) = \frac{V}{R_1} = 10 \text{ A} \ .$$

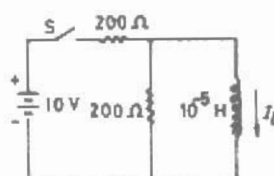
Năng lượng tích trữ trong cuộn cảm L tại thời điểm này sẽ tiêu tán hoàn toàn trong điện trở R_2. Như vậy nhiệt tiêu tán trong R_2 là

$$W_{R_2} = \frac{1}{2}LI_L^2(0) = \frac{1}{2} \times 10 \times 100 = 500 \text{ J} \ .$$

3015

Công tắc S trong hình 3.24 đã được mở trong một thời gian dài. Tại thời điểm $t = 0$, S đóng. Hãy tính dòng điện I_L đi qua cuộn cảm như một hàm của thời gian.

(*Wisconsin*)



Hình 3.24

Lời giải:

Giả thiết cuộn cảm có điện trở nhỏ không đáng kể. Khi đó tại $t = 0$ và $t = \infty$,

$$I_L(0) = 0 \ ,$$
$$I_L(\infty) = \frac{10}{200} = 0,05 \text{ A} \ .$$

Điện trở tương đương khi nhìn từ các đầu của L là

$$R = \frac{200 \times 200}{200 + 200} = 100 \ \Omega \ ,$$

cho hằng số thời gian như sau

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10^{-5}}{100} = 10^{-7} \text{ s} \ .$$

tại thời điểm t, dòng đi qua L là

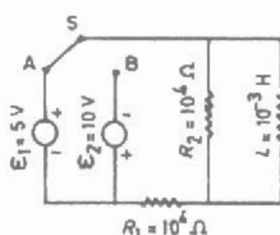
$$I_L(t) = I_L(\infty) + (I_L(0) - I_L(\infty))e^{-t/\tau}$$
$$= 0,05(1 - e^{-10^7 t}) \text{ A} \ .$$

3016

Xét hình 3.25.

(a) Khoá S đặt ở vị trí A trong một thời gian dài. Các suất điện động là một chiều. Hãy xác định các dòng điện (độ lớn và chiều) qua ε_1, R_1, R_2 và L?

(b) Khoá K bất ngờ chuyển đến vị trí B. Ngay sau khi chuyển khoá S, dòng điện trong ε_1, R_1, R_2 và L là bao nhiêu?



Hình 3.25

(c) Sau một thời gian dài ở vị trí B, dòng điện qua ε_2, R_1, R_2 và L là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Sau khi khoá S ở vị trí A một thời gian dài, L tương ứng với sự ngắn mạch. Khi đó ta có

$$I_{R_2} = 0\,,$$
$$I_{R_1} = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{5}{10^4} = 0,5 \text{ mA, theo chiều về bên trái;}$$
$$I_{\varepsilon_1} = I_{R_1} = 0,5 \text{ mA, theo chiều đi lên;}$$
$$I_L = I_{\varepsilon_1} = 0,5 \text{ mA, theo chiều đi xuống.}$$

(b) Khi khoá S bất ngờ chuyển đến vị trí B, I_L tức thời có giá trị không đổi, cụ thể là $I_L = 0,5$ mA và có chiều đi xuống phía dưới. Gọi dòng điện qua R_1 và R_2 là I_{R_1} và I_{R_2}, chiều của chúng tương ứng là sang phải và đi lên. Bây giờ ta có

$$\begin{cases} I_{R_1} + 0,5 \times 10^{-3} = I_{R_2}\,, \\ I_{R_1}R_1 + I_{R_2}R_2 = (I_{R_1} + I_{R_2}) \times 10^4 = \varepsilon_2 = 10\,. \end{cases}$$

Giải các phương trình này ta được

$I_{R_1} = 0,25$ mA, hướng sang phải; $\quad I_{R_2} = 0,75$ mA, hướng lên trên;

$I_{\varepsilon_2} = 0,25$ mA, hướng đi xuống; $\quad I_L = 0,5$ mA, hướng đi xuống.

(c) Sử dụng kết quả của (a) nhưng thay thế $\varepsilon = 5$ V bằng $\varepsilon = -10$ V, ta có

$I_{R_1} = \frac{\varepsilon_2}{R_1} = 1$ mA, hướng sang phải; $\quad I_{R_2} = 0$;

$I_L = 1$ mA, hướng lên trên; $I_{c_2} = 1$ mA, hướng đi xuống.

3017

Như thấy trên hình 3.26, khoá S đặt tại vị trí A trong một thời gian dài. Tại $t = 0$ nó bất ngờ chuyển đến vị trí B. Ngay lập tức sau khi tiếp xúc với B:

(a) Dòng điện đi qua cuộn cảm L là bao nhiêu?

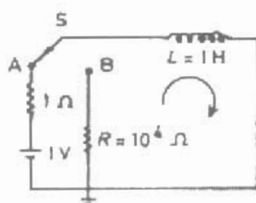
(b) Tốc độ thay đổi theo thời gian của dòng điện qua R là bao nhiêu?

(c) Điện thế của điểm B (so với đất) là bao nhiêu?

(d) Tốc độ thay đổi theo thời gian của hiệu điện thế trên L là bao nhiêu?

(e) Giữa khoảng $t = 0$ và $t = 0,1s$, tổng năng lượng tiêu tán trên R là bao nhiêu?

(Wisconsin)



Hình 3.26

Lời giải:

(a) Vì dòng điện qua cuộn cảm không thể thay đổi một cách đột ngột, nên ta vẫn còn có

$$i_L(0) = \frac{1}{1} = 1 \text{ A} .$$

(b) Vì $-L\frac{di_L}{dt} = i_L R$, nên

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = -i_L(0)\frac{R}{L} = 1 \times \frac{10^4}{1} = -10^4 \text{ A/s} .$$

(c) $V_B(0) = -i_L(0)R = -1 \times 10^4 = -10^4$ V.

(d) Khi $V_L = V_B = i_L R$,

$$\left.\frac{dV_L}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} R = -i_L(0)\,\frac{R^2}{L}$$
$$= -1 \times \frac{(10^4)^2}{1} = -10^8 \text{ V/s} .$$

(e) Khi $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$,

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-10^4 t}\text{ A} ,$$

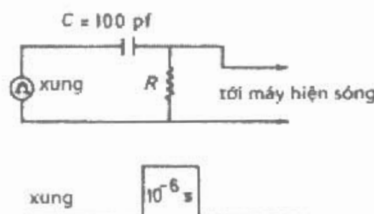
toàn bộ năng lượng tiêu tán trên R trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 0,1$ s là

$$W_R = \frac{1}{2}Li_L^2(0) - \frac{1}{2}Li_L^2(0,1)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (1)^1 - \frac{1}{2} \times 1 \times e^{-2\times 10^4 \times 0,1} = 0,5 \text{ J} .$$

3018

Một nguồn điện áp xung trong mạch trên hình 3.27 có trở kháng không đáng kể. Nguồn này phát ra một xung 1 V có độ rộng là 10^{-6} giây. Điện trở trong mạch được thay đổi từ 10^3 Ω đến 10^4 Ω và sau đó đến 10^5 Ω. Có thể giả thiết rằng, đầu vào máy hiện sóng được bù trừ đúng sao cho nó không tải một mạch điện có trong trạng thái đã giám sát. Hãy vẽ phác dạng sóng dao động khi $R = 10^3$ Ω, 10^4 Ω, và 10^5 Ω.

(*Wisconsin*)



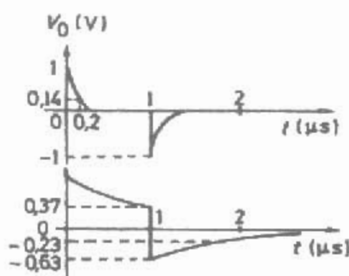
Hình 3.27

Lời giải:

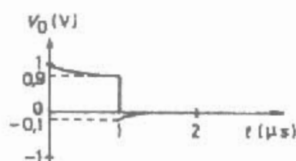
Đầu ra của nguồn điện áp xung là $u(t) - u(t-1)$ V, với t tính bằng μs. Đáp ứng nhảy bậc của mạch CR là $u(t)e^{-t/RC}$ với RC tính bằng μs. Như vậy đầu ra của mạch CR là

$$V_0 = u(t)e^{-t/RC} - u(t-1)e^{-(t-1)/RC} \text{ V} .$$

Dạng sóng trên máy hiện sóng được phác hoạ trên hình 3.28 và hình 3.29.



Hình 3.28



Hình 3.29

(1) $R = 10^3\ \Omega$, $\quad RC = 10^{-1} \mu$s,

$$V_0 = u(t)e^{-10t} - u(t-1)e^{-10(t-1)} \text{ V} .$$

(2) $R = 10^4\ \Omega$, $\quad RC = 1\ \mu$s,

$$V_0 = u(t)e^{-t} - u(t-1)e^{-t+1} \text{ V} .$$

(3) $R = 10^5\ \Omega$, $\quad RC = 10\ \mu$s,

$$V_0 = u(t)e^{-0,1t} - u(t-1)e^{-0,1(t-1)} \text{ V} .$$

Trong tất cả các trường hợp trên t đều tính bằng μs.

3019

Khoá S được đặt tại vị trí A như trên hình 3.30.

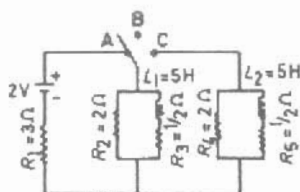
(a) Hãy tìm độ lớn và chiều (lên trên hoặc xuống dưới theo trang sách) của các dòng điện qua R_1, R_2, và R_3, sau khi khoá S ở vị trí A một vài giây.
Bây giờ khoá S được đẩy đến vị trí B (vị trí mở).

(b) Hãy xác định độ lớn và chiều của các dòng điện qua R_1, R_2, và R_3 ngay sau khi khoá S được đẩy đến vị trí B.

(c) Hãy xác định độ lớn và chiều của các dòng điện qua R_1, R_2, và R_3 nửa giây sau khi khoá S được đẩy từ A đến B.
Một giây sau khi khoá S được đẩy từ A đến B, cuối cùng nó được đẩy từ B đến C.

(d) Hãy xác định độ lớn và chiều của các dòng điện qua R_2, R_3, R_4, và R_5 ngay sau khi khoá S được đẩy từ B đến C.

(*Wisconsin*)



Hình 3.30

Lời giải:

Gọi các dòng điện đi qua R_1, R_2, R_3 lần lượt i_1, i_2, i_3.

(a) Khi công tắc được đẩy đến vị trí A, ngay lập tức ta có

$$i_1(0) = i_2(0) = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3+2} = 0,4 \text{ A},$$

$$i_3(0) = 0,$$

$$i_1(\infty) = \frac{2}{R_1 + R_2R_3/(R_2 + R_3)} = 0,59 \text{ A}.$$

Sau khi công tắc ở vị trí A một ít thời gian, ta có

$$i_2(\infty) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_1(\infty) = 0,12 \text{ A} ,$$

$$i_3(\infty) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1(\infty) = 0,47 \text{ A} .$$

Như thấy từ hai đầu của L_1 điện trở trong mạch là

$$R = R_3 + R_1R_2/(R_1 + R_2) = 1,7 \ \Omega ,$$

và hằng số thời gian là

$$\tau = L_1/R = \frac{5}{1,7} = \frac{1}{0,34} \text{ s} .$$

Sử dụng $i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$, (xem bài tập 3014) ta có

$$i_1(t) = 0,59 - 0,19e^{-0,34t} \text{ A, hướng lên trên,}$$

$$i_2(t) = 0,12 + 0,28e^{-0,34t} \text{ A, hướng xuống dưới,}$$

$$i_3(t) = 0,47(1 - e^{-0,34t}) \text{ A, hướng xuống dưới.}$$

(b) Sau khi công tắc ở vị trí A một vài giây, ta có thể coi $e^{-0,34t} \approx 0$. Từ quy luật dòng điện trong một cuộn cảm không thể thay đổi đột ngột, tại thời điểm công tắc được đẩy đến B ta có

$$i_3(0) = 0,47 \text{ A, hướng đi xuống,}$$

và như vậy

$$i_1(0) = 0 ,$$
$$i_2(0) = 0,47 \text{ A, hướng đi lên.}$$

(c) Vì mạch điện hở,

$$i_1(0,5) = 0 .$$

Đối với phần cuộn cảm, hằng số thời gian là

$$\tau = \frac{L}{R_2 + R_3} = \frac{5}{2 + 0,5} = 2 \text{ s} .$$

Sử dụng $i(0)$ nhận được trong (b) và

$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0 ,$$

ta có

$$i_2(t) = 0,47e^{-0,5t} \text{ A}, \text{ hướng đi lên;}$$

$$i_3(t) = 0,47e^{-0,5t} \text{ A}, \text{ hướng đi xuống.}$$

Do đó đối với $t = 0,5$ s

$$i_2(0,5) = 0,37 \text{ A}, \text{ hướng đi lên;}$$

$$i_3(0,5) = 0,37 \text{ A}, \text{ hướng đi xuống.}$$

(d) Ta kí hiệu các khoảnh khắc ngay sau và trước khi $t = 1$ s là $1\pm$. Ta có $i_3(1-) = 0,47e^{-0,5} = 0,29$ A, có chiều xuống phía dưới. Vì dòng điện trong cuộn cảm không thể thay đổi đột ngột, ta có

$$i_5(1+) = 0, \qquad i_3(1+) = 0,29 \text{ A}, \text{ hướng đi xuống.}$$

Đối với mạch đã ổn định ta có

$$i_2(1+) + i_4(1+) = 0,29 \text{ A},$$
$$2i_2(1+) = 2i_4(1+) .$$

Do đó $i_2(1+) = i_4(1+) = 0,145$ A, hướng đi lên.

3020

Một nguồn dòng $i_0 \sin \omega t$, với i_0 là một hằng số, được nối với mạch điện trên hình 3.31. Tần số ω có thể điều khiển được. Tất cả các cuộn cảm L_1 và L_2 và các điện dung C_1 và C_2 đều không bị tổn hao. Một vôn kế không hao tổn chỉ giá trị thế hiệu đỉnh sóng hình sin được nối giữa A và B. Tích $L_2C_2 > L_1C_1$.

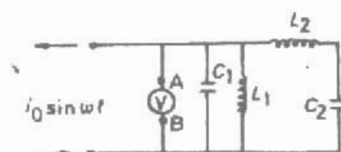
(a) Hãy tìm số chỉ gần đúng V của vôn kế khi ω rất nhỏ nhưng không bằng 0.

(b) Tương tự đối với ω rất lớn nhưng không vô hạn.

(c) Hãy vẽ phác một cách định tính đường cong mô tả sự phụ thuộc của số chỉ của vôn kế theo ω, nhận dạng và giải thích từng nét đặc trưng đặc biệt.

(d) Hãy tìm một biểu thức cho số chỉ của vôn kế trong toàn bộ dải ω.

(*Princeton*)



Hình 3.31

Lời giải:

(a) Trở kháng của cuộn cảm là $j\omega L$ và trở kháng của một tụ điện là $\frac{1}{j\omega C}$. Đối với ω rất nhỏ, dòng điện đi qua các tụ điện có thể bỏ qua được và mạch tương đương bây giờ như trên hình 3.32.



Hình 3.32

Như vậy, ta có

$$V_{\text{BA}} = IZ = j\omega L_1 I \; .$$

với $I = i_0 e^{j\omega t}$. Vì các máy đo xoay chiều thường chỉ các giá trị hiệu dụng, nên ta có

$$V_{\text{máy đo}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0 \omega L_1 \; .$$

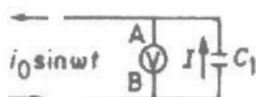
(b) Đối với ω rất lớn, bỏ qua các dòng điện đi qua các cuộn cảm và mạch tương đương như trên hình 3.33. Ta có

$$V_{\text{BA}} = IZ = -\frac{jI}{\omega C_1} \; .$$

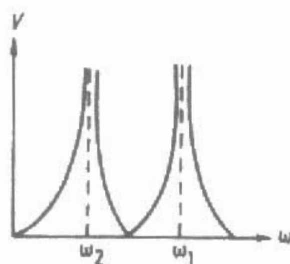
và

$$V_{\text{máy đo}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}\omega C_1} \; .$$

(c) Đặt $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$. Vì $L_2 C_2 > L_1 C_1$, $\omega_1 > \omega_2$. Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của số chỉ của vôn kế theo ω có dạng như trên hình 3.34. Hệ này có tính cảm kháng ω nằm trong vùng $(0, \omega_2)$, và là hệ điện dung thực



Hình 3.33



Hình 3.34

khi ω nằm trong vùng (ω_1, ∞). Sự cộng hưởng xảy ra tại các tần số góc đặc trưng ω_1 và ω_2.

d) Trở kháng toàn phần L là tổng hợp của hai trở kháng L_1, L_2 mắc song song

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \ ,$$

với

$$Z_1 = \frac{-jL_1}{C_1(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})} \ , \qquad Z_2 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \ .$$

Như vậy

$$Z = \frac{j}{\frac{1}{\omega L_1} - \omega C_1 + \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}} \ .$$

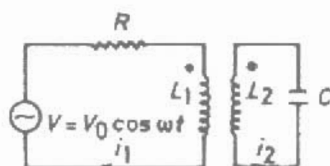
Do đó số chỉ của vôn kế là

$$V_{\mathrm{BA}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}\left|\frac{1}{\omega L_1} - \omega C_1 + \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}\right|} \ .$$

Lưu ý rằng biểu thức này sẽ quy về các kết quả trong (a) và (b) đối với ω rất nhỏ và rất lớn.

3021

Cho mạch điện như trong hình 3.35, hệ số hỗ cảm của hai cuộn L_1 và L_2 là $M = L_1 = L_2 = L$



Hình 3.35

(a) Hãy tìm dòng điện tức thời $i(t)$ mà dao động tử phải tạo ra như một hàm của tần số của nó.

(b) Xác định công suất trung bình đã được cung cấp bởi dao động tử như một hàm của tần số là bao nhiêu?

(c) Xác định dòng điện khi tần số dao động tử bằng tần số cộng hưởng của mạch thứ cấp?

(d) Xác định góc lệch pha của dòng điện đầu vào với điện áp kích thích khi tần số dao động tử gần bằng tần số cộng hưởng của mạch thứ cấp?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi các dòng điện của mạch sơ cấp và thứ cấp là I_1 và I_2, ta có

$$\dot{V} = \dot{I}_1 R + L_1 \ddot{I}_1 + M \ddot{I}_2 ,$$

$$0 = L_2 \ddot{I}_2 + M \ddot{I}_1 + \frac{I_2}{C} .$$

Giải đối với $I_1 \sim \exp(j\omega t)$, ta có

$$I_1 = \frac{V}{R + j\left(\omega L_1 + \frac{\omega^3 M^2}{\frac{1}{C} - \omega^2 L_2}\right)}$$

$$= \frac{V_0 e^{-j\varphi}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 + \frac{\omega^3 M^2}{\frac{1}{C} - \omega^2 L_2}\right)^2}} ,$$

với

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L_1 + \frac{\omega^3 M^2}{\frac{1}{C}-\omega^2 L_2}}{R}\right)$$

là góc lệch pha của dòng điện đầu đối với điện áp kích thích. Áp dụng các điều kiện đã cho $L_1 = L_2 = M = L$, ta có

$$I_1 = \frac{V_0 e^{-j\varphi}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}} ,$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L/R}{1-\omega^2 LC}\right) ,$$

hoặc lấy phần thực,

$$i_1(t) = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \varphi) ,$$

với

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2} .$$

(b)

$$p(t) = V(t)i_1(t) = \frac{V_0^2}{Z}\cos(\omega t - \varphi)\cos\omega t .$$

Lấy trung bình trong một chu kì ta có

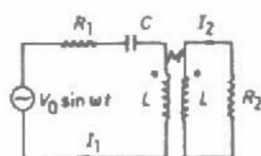
$$P = \bar{p} = \frac{V_0^2}{Z}\overline{\cos(\omega t - \varphi)\cos\omega t} = \frac{V_0^2}{2Z}\cos\varphi$$
$$= \frac{R}{2Z^2}V_0^2 = \frac{RV_0^2/2}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2} .$$

(c) Khi $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z = +\infty$, và $i_1(t) = 0$.

(d) Khi $\omega \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\tan\varphi = \infty$, và $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3022

Cho mạch điện như trên hình 3.36, ω, R_1, R_2 và L là cố định; C và M (độ hỗ cảm giữa hai cuộn cảm giống nhau L) có thể thay đổi được. Hãy tìm các giá trị của M và C để công suất tiêu tán trên điện trở R_2 là cực đại. Công suất cực đại đó là bao nhiêu?



Hình 3.36

Nếu cần, có thể giả thiết $R_2 > R_1, \omega L/R_2 > 10$.

(*Princeton*)

Lời giải:

Giả thiết rằng các dòng điện sơ cấp và thứ cấp có chiều như trên hình 3.36, ta có phương trình mạch điện

$$\dot{V}_0 = R_1\dot{I}_1 + \dot{I}_1\left[\frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right] + j\omega M\dot{I}_2 \,,$$
$$0 = \dot{I}_2 R_2 + j\omega L\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 \,.$$

Hệ phương trình trên có nghiệm

$$I_2 = \frac{j\omega MCV_0}{C[\omega^2(L^2 - M^2) - R_1R_2] - L + j\left[\frac{R_2}{\omega} - \omega LC(R_1 + R_2)\right]} \,.$$

Vì $P_2 = \frac{1}{2}|I_2|^2 R_2$, nên khi $|I_2|$ cực đại thì P_2 cũng cực đại. Ta có

$$|I_2| = \frac{\omega V_0}{\left\{\left[\frac{1}{M}(\omega^2L^2 - R_1R_2 - L/C) - \omega^2 M\right]^2 + \left[\frac{1}{MC}\left(\frac{R_2}{\omega} - \omega LC(R_1+R_2)\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \,.$$

Vì tử số cố định và mẫu số là căn bậc hai của tổng hai số hạng bình phương, nên khi hai số hạng bình phương đạt cực tiểu đồng thời thì $|I_2|$ sẽ đạt giá trị cực đại. Cực tiểu của thành phần bình phương thứ hai bằng 0, ta cần có

$$C = \frac{R_2}{\omega^2 L(R_1 + R_2)} \,.$$

khi đó

$$|I_2| = \frac{\omega V_0}{\omega^2 M + \frac{R_1R_2 + R_1\omega^2L^2/R_2}{M}} \,.$$

Để làm tối thiểu mẫu số ở trên, ta cần

$$M = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\omega^2} + \frac{R_1}{R_2} L^2} .$$

Do đó, đối với

$$M = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\omega^2} + \frac{R_1}{R_2} L^2} , \qquad C = \frac{R_2}{\omega^2 L(R_1 + R_2)}$$

P_2 là cực đại và có giá trị

$$P_2 = \frac{1}{2}|I_2|^2 R_2 = \frac{V_0^2}{8R_1\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R_2^2}\right)} .$$

Giả thiết $\omega L/R_2 > 10$, ta nhận được

$$P_2 = \frac{V_0^2 R_2^2}{8\omega^2 L^2 R_1}$$

như là giá trị công suất cực đại tiêu tán trên R_2.

3023

Trong mạch điện trên hình 3.37 tụ điện ban đầu tích điện đến hiệu điện thế V. Máy biến thế là lý tưởng: không có điện trở cuộn dây, không có hao tổn. Tại $t = 0$ công tắc được đóng. Giả thiết rằng cảm kháng rất lớn so với R_p và R_s. Hãy tính:

(a) Dòng điện sơ cấp ban đầu.

(b) Dòng điện thứ cấp ban đầu.

(c) Thời gian để điện áp V giảm đến e^{-1} giá trị ban đầu của nó.

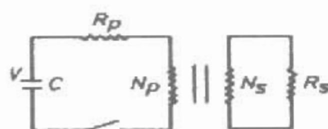
(d) Tổng năng lượng tiêu tán hoàn toàn trên R_s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vì máy biến thế là lý tưởng, ta có

$$N_p/N_s = V_p/V_s , \qquad N_p/N_s = I_s/I_p .$$



Hình 3.37

(a) Điện trở tương đương trong mạch sơ cấp sinh ra do điện trở R_s trong mạch thứ cấp là

$$R'_s = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s \,.$$

Do đó hằng số thời gian của mạch sơ cấp là

$$\tau = (R_p + R'_s)C \,,$$

và hiệu điện thế trên tụ C là

$$V_C = Ve^{-t/\tau} \,.$$

Khi đó dòng điện trong cuộn sơ cấp là

$$i_p = -C\frac{dV_C}{dt} = -CVe^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{V}{R_p + R'_s}e^{-t/\tau} \,.$$

Ban đầu, dòng điện sơ cấp là

$$i_p(0) = \frac{V}{R_p + R'_s} = \frac{V}{R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s} \,.$$

(b)

$$i_s(0) = i_p(0)\frac{N_p}{N_s} = \frac{N_p N_s V}{N_s^2 R_p + N_p^2 R_s} \,.$$

(c) Để V_C giảm xuống còn $V_C = e^{-1}V$, thời gian cần thiết là

$$t = \tau = \left[R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s\right]C \,.$$

(d) Vì

$$i_s = i_p\frac{N_p}{N_s} = \frac{N_p N_s V}{N_s^2 R_p + N_p^2 R_s}e^{-t/\tau} \,;$$

năng lượng tiêu tán trên R_s là

$$W_{RS} = \int_0^\infty i_s^2 R_s dt = \left(\frac{N_p N_s V}{N_s^2 R_p + N_p^2 R_s}\right)^2 R_s \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$$

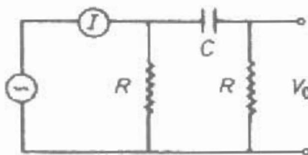
$$= \left(\frac{N_p N_s V}{N_s^2 R_p + N_p^2 R_s}\right)^2 R_s \cdot \frac{1}{2}\left[R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s\right] C$$

$$= \frac{1}{2} \frac{N_p^2 V^2}{N_s^2 R_p + N_p^2 R_s} R_s C \ .$$

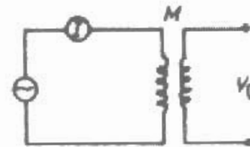
3024

Hãy chứng minh rằng đối với một tần số đã cho, mạch điện trong hình 3.38 có thể "làm giả" mạch trong hình 3.39 với một độ chính xác mong muốn bằng cách lựa chọn R và C thích hợp. ("Làm giả" có nghĩa là nếu $V_0 = IZ_R$ trong một mạch và $V_0 = IZ_L$ trong mạch kia thì Z_L có thể được chọn sao cho $Z_L/Z_R = e^{i\theta}$ với θ nhỏ tuỳ ý). Hãy tính các giá trị của R và C để "làm giả" một độ hỗ cảm $M = 1$ mH tại 200 Hz với $\theta < 0,01$.

(UC, Berkeley)



Hình 3.38



Hình 3.39

Lời giải:

Đối với mạch điện trên hình 3.38, ta có

$$\dot{V}_0 = \dot{I} \cdot \left[\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \| R\right] \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \dot{I} \cdot \frac{R^2}{2R + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{I} \frac{R^2}{\sqrt{4R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \angle \arctan\,(1/2\omega RC) \ .$$

Đối với mạch điện trên hình 3.39, ta có

$$\dot{V}_0 = j\omega M \dot{I} - \dot{I} M\omega \angle \pi/2 \ .$$

Để với mạch trước "làm giả" mạch sau, ta cần có

$$\begin{cases} \frac{R^2}{\sqrt{4R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}} = M\omega\,, & (1) \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2R\omega C}\right) = \theta\,. & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) cho $\omega RC = \frac{1}{2}\tan\theta$. Với $\theta = 0,01$, $\omega RC = 0,005$. Khi đó phương trình (1) cho

$$R = M\omega\sqrt{4+\frac{1}{(\omega RC)^2}} = 10^{-3}\times 2\pi\times 200\times\sqrt{4+\frac{1}{0,005^2}} \approx 251\ \Omega\,,$$

và do đó

$$C = \frac{0,005}{\omega R} = \frac{0,005}{2\pi\times 200\times 251} \approx 1,6\times 10^{-8}\ \text{F} = 0,016\ \mu\text{F}\,.$$

3025

Một "hộp đen" có hai đầu ra được biết có chứa một cuộn cảm L không có tổn hao, một tụ điện không tổn hao C và một điện trở thuần R. Khi một pin 1,5 V được nối với hộp, một dòng điện 1,5 mA chạy qua. Khi một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng 1,0 V tại tần số 60 Hz được nối với hộp, một dòng điện có cường độ hiệu dụng 0,01 A chảy qua. Khi tần số xoay chiều tăng trong khi điện áp đặt vào được giữ không đổi, người ta phát hiện dòng điện đi qua một điểm cực đại 100 A tại $f = 1000$ Hz. Xác định mạch điện bên trong hộp và các giá trị của R, L và C.

(*Princeton*)

Lời giải:

Khi một điện áp một chiều được nối với hộp, có một dòng điện hữu hạn chảy qua. Vì cả C và L đều không tổn hao, điều này cho thấy rằng R phải song song với C hoặc với cả hai L. C. Tại cộng hưởng, một dòng điện lớn 100A đã được quan sát thấy đối với một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng 1 V. Sự cộng hưởng lớn này không có khả năng xảy ra nếu L và C mắc song song, bất kể có nối với R hay không. Do đó mạch chỉ có thể như trên hình 3.40 với L, C mắc nối tiếp. Vì điện áp một chiều 1,5 V làm xuất hiện dòng điện 1,5 mA, ta có

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1,5}{1,5\times 10^{-3}} = 10^3\ \Omega\,.$$

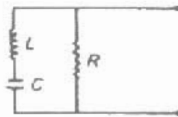
Trở kháng đối với mạch trong hình 3.40 là

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}} \,.$$

Suy ra

$$L = \left[\frac{1}{\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2}} \cdot \frac{1}{\omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}\right]^{-1/2} .$$

trong đó $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.



Hình 3.40

Cộng hưởng xảy ra tại $\omega_0 = 2000\pi$ rad/s. Tại $\omega = 120\pi$ rad/s, các giá trị hiệu dụng $V = 1$ V cho $I = \frac{1}{100}$ A, tương ứng với

$$|Z| = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} = 100\ \Omega = \frac{R}{10} \,.$$

tại

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{50}{3} \,.$$

Do đó

$$L \approx \frac{\omega}{\omega_0^2}|Z| = \frac{60 \times 2\pi}{(1000 \times 2\pi)^2} \times 100 = 0.95 \text{ mH} \,.$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{\omega|Z|} = \frac{1}{60 \times 2\pi \times 100} \approx 27\ \mu\text{F} \,.$$

3026

Trong hình 3.41 một hộp chứa các điện trở, các sợi dây đồng và các pin khô đã được nối theo một cách nào đấy với hai sợi dây như là các đầu ra A, B. Nếu một điện trở $R = 10\ \Omega$ được mắc với A, B, thì thấy nó làm tiêu tán mất 0,9 W.



Hình 3.41

(a) Công suất sẽ bị tiêu tán là bao nhiêu trong một điện trở 30 Ω mắc với A, B (hình 3.42(a))?

(b) Công suất sẽ bị tiêu tán là bao nhiêu trong một điện trở $R_1 = 10\,\Omega$ mắc nối tiếp với một pin khô 5 V khi chúng được mắc vào hai đầu A, B (hình 3.42(b))?



Hình 3.42

(c) Câu trả lời của bạn đối với câu (b) có là duy nhất không? Tại sao?

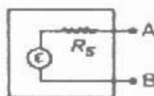
(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng định lý Thevinin, ta có thể xét hộp đó như mạch trên hình 3.43. Khi $R = 10\,\Omega$, $P = \frac{V_R^2}{R} = 2.5$ W, suy ra $V_R = 5$ V. Khi $R = 90\,\Omega$, $P = 0.9$ W, suy ra $V_R = 9$ V. Do đó ta có

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \dfrac{10}{10+R_s} = 5\,, \\ \varepsilon \cdot \dfrac{90}{90+R_s} = 9\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = 10\text{ V}\,, \\ R_s = 10\,\Omega\,. \end{cases}$$

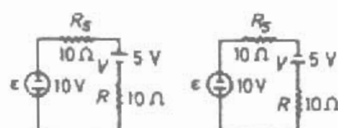
(a) Khi $R = 30\,\Omega$, ta có



Hình 3.43

$$V_R = \frac{30}{30+10} \times 10 = 7.5\text{ V}\,, \qquad P = V_R^2/R = 1.875\text{ W}\,.$$

(b) Nếu điện trở $R = 10\,\Omega$ mắc nối tiếp với một pin khô có $\varepsilon' = 5$ V, ta sẽ có



Hình 3.44

$$V_R = \frac{10}{10+10}(\varepsilon \pm \varepsilon') = \begin{cases} 2,5 \text{ V} \\ 7,5 \text{ V}, \end{cases}$$

$$P = V_R^2/R = \begin{cases} 0,625 \text{ W}, \\ 5,625 \text{ W}. \end{cases}$$

(c) Vì có hai cách mắc một pin khô 5 V, với hai cực tính khác nhau nên có thể nhận được hai câu trả lời khác nhau.

2. CÁC MẠCH ĐIỆN VÀ MẠCH TỪ (3027–3044)

3027

Một xôlênôit với 100 cuộn dây cách đều có đường kính là 2 cm và chiều dài 10 cm. Hãy tìm độ cảm ứng của cuộn dây.

$$\left(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}\right)$$

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bỏ qua hiệu ứng mép, từ trường trong xôlênôit đều. Từ định luật Ampe về lưu số $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$, ta tìm được cảm ứng từ trong xôlênôit là $B = \mu_0 n I$, với $n = \frac{N}{l}$ là mật độ vòng của xôlênôit (tức số vòng dây trên một đơn vị dài). Từ thông toàn phần đi qua cuộn dây là $\psi = NBA$. Độ tự cảm của cuộn dây được cho bởi định nghĩa

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\mu_0 NIA}{lI} = \frac{N^2\mu_0 A}{l}.$$

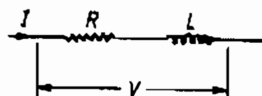
Với $A = \pi \times 10^{-4}$ m^2, ta có

$$L = \frac{100^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 10^{-4}}{0,1} = 3,95 \times 10^{-5} \text{ H}.$$

3028

Một mạch điện chứa một xôlênôit hình xuyến (torus) có bán kính 20 cm, diện tích tiết diện 5 cm^2 và 10^4 vòng. Nó được quấn quanh một lõi sắt có độ từ thẩm 1000 và có điện trở 10 Ω. Hãy tìm thời gian để dòng điện giảm chỉ còn bằng e^{-1} giá trị ban đầu của nó nếu mạch điện bất thình lình bị ngắn mạch.

(UC, Berkeley)



Hình 3.45

Lời giải:

Mạch tương đương trên hình 3.45. Ta có phương trình

$$V = IR + L\frac{dI}{dt},$$

với

$$V|_{t<0} = V_0 = I_0R, \qquad V|_{t\geq 0} = 0.$$

Như vậy, đối với $t \geq 0$

$$-\frac{dt}{\tau} = \frac{dI}{I},$$

trong đó $\tau = \frac{L}{R}$. Do đó

$$I = I_0e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}.$$

Độ tự cảm của cuộn dây hình xuyến là

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2A}{2\pi R}$$
$$= \frac{10^{4\times 2} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 5 \times 10^{-4}}{2\pi \times 20 \times 10^{-2}} = 50 \text{ H}.$$

Khi $I = I_0e^{-1}$, $t = \tau = \frac{L}{R} = \frac{50}{10} = 5$ s.

3029

Một vòng dây tròn đã được đặt giữa các mặt cực của một nam châm điện sao cho mặt phẳng của nó song song với các mặt cực. Vòng dây có bán kính a, tổng điện trở R và độ tự cảm L. Nếu sau đó bật cho nam châm hoạt động, sinh ra một từ trường đều B trên diện tích của vòng dây, thì tổng điện tích q chạy qua một điểm bất kì trong vòng dây là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Khi từ thông đi qua vòng dây tròn thay đổi, một suất điện động ε sẽ được cảm ứng sinh ra một dòng điện cảm ứng i. Cạnh đó, một suất điện động tự cảm $L\frac{di}{dt}$ cũng được sinh ra. Như vậy ta có

$$\varepsilon + iR + L\frac{di}{dt} = 0\ ,$$

với

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}\,, \quad i = \frac{dq}{dt}\,, \quad i(\infty) = 0\,, \quad i(0) = 0\ .$$

Phương trình mạch điện có thể viết lại như sau

$$-d\phi + Rdq + Ldi = 0\ .$$

Khi đó, lấy tích phân theo t từ 0 đến ∞ ta được

$$-\Delta\phi + Rq = 0$$

vì $\Delta i = 0$. Do đó

$$q = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{B\pi a^2}{R}\ .$$

Phương trình này cho thấy rằng L không có ảnh hưởng gì đối với giá trị của q, nó chỉ dẫn đến sự suy giảm chậm hơn của i mà thôi.

3030

Một xôlênôit có một lõi sắt dài 0,5 m, diện tích tiết diện 1 cm^2, và 1000 vòng. Bỏ qua hiệu ứng biên, độ tự cảm là bao nhiêu? Một cuộn thứ cấp quấn quanh tâm của xôlênôit có 100 vòng. Độ hỗ cảm là bao nhiêu? Một dòng điện không đổi 1 A chảy trong cuộn thứ cấp và xôlênôit được nối với một điện trở tải $10^3\ \Omega$. Dòng điện không đổi bất thình lình bị tắt. Có bao nhiêu điện tích

chạy qua điện trở?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Gọi dòng điện trong cuộn dây của xôlênôit là i. Khi đó cảm ứng từ bên trong xôlênôit là $B = \mu_0 ni$ có hướng dọc theo trục, n là số vòng trên một đơn vị chiều dài của cuộn dây.

Từ thông toàn phần đi qua xôlênôit là

$$\psi = N\phi = NBS = N^2\mu_0 Si/l \ .$$

Do đó độ tự cảm là

$$\begin{aligned} L &= \frac{\psi}{i} = N^2\mu_0 S/l \\ &\approx \frac{1000^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-4}}{1/2} \\ &= 2,513 \times 10^{-4} \text{ H} \ . \end{aligned}$$

Từ thông toàn phần qua cuộn thứ cấp sinh ra bởi dòng điện i là $\psi' = N'\phi$, cho độ hỗ cảm là

$$M = \frac{\psi'}{i} = \frac{NN'\mu_o S}{l} = 2,513 \times 10^{-5} \text{ H} \ .$$

Vì từ thông $\psi' = MI$, I là dòng điện trong cuộn thứ cấp, nên một suất điện động sẽ được cảm ứng trong xôlênôit khi dòng điện không đổi I trong cuộn thứ cấp bất thình lình ngừng lại. Đối với dòng điện cảm ứng trong xôlênôit theo định luật Kirchhoff ta có

$$-\frac{d\psi'}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} \ ,$$

hay

$$-d\psi' = Ridt + Ldi = Rdq + Ldi \ .$$

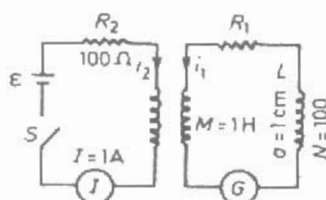
Lấy tích phân theo t từ $t = 0$ đến $t = \infty$ phương trình trên cho $-\Delta\psi' = Rq$, vì $i(0) = i(\infty) = 0$. Như vậy tổng điện tích đi qua điện trở là

$$q = \frac{-\Delta\psi'}{R} = \frac{MI}{R} = \frac{2,513 \times 10^{-5} \times 1}{10^3} = 2,76 \times 10^{-7} \text{ C}$$

3031

Trên hình 3.46, G là một điện kế xung kích (nghĩa là, góc lệch θ của kim điện kế tỉ lệ thuận với điện tích Q chạy nhanh qua nó). Cuộn L ban đầu ở trong từ trường $B_0 = 0$. Sau đó công tắc S đóng lại, dòng điện $I = 1$ A chảy qua và G lệch một góc $\theta_1 = 0,5$ radian và rồi quay trở về trạng thái đứng yên. Sau đó cuộn dây được chuyển từ trường B_2, và G được quan sát lệch một góc $\theta_2 = 1$ radian. Hãy xác định từ trường B_2 (trong hệ các đơn vị lý thuyết bất kì).

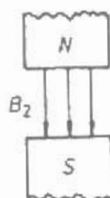
(UC, Berkeley)



Hình 3.46

Lời giải:

Hướng của $\mathbf{B}_2$ được vẽ trong hình 3.47.



Hình 3.47

Gọi độ tự cảm của cuộn dây L là L_1, khi đó

$$\varepsilon_1 = M\frac{di_2}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} ,$$

hay

$$\frac{dq}{dt} = i_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - \frac{M}{R_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{L_1}{R_1}\frac{di_1}{dt} ,$$

với

$$i_2(0) = 0 , \quad i_2(\infty) = 1 \text{ A}, \quad i_1(0) = i_1(\infty) = 0 .$$

Lấy tích phân phương trình mạch điện ta nhận được

$$q_1 = \int_0^\infty \frac{M}{R_1} di_2 + \int_0^\infty \frac{L_1}{R_1} di_1 = \frac{M}{R_1} i_2(\infty) .$$

Khi cuộn dây được chuyển nhanh vào từ trường $\mathbf{B}_2$, suất điện động cảm ứng của nó là

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\psi}{dt} ,$$

với

$$\psi_1(\infty) = -NB_2S , \quad \psi_1(0) = 0 .$$

Như vậy

$$\frac{dq_2}{dt} = i_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{-1}{R_1}\frac{d\psi_1}{dt} ,$$

Suy ra

$$q_2 = \frac{NB_2\pi a^2}{R_1} .$$

Vì $q \propto \theta$, ta có

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{Mi_2(\infty)}{NB_2\pi a^2} ,$$

hay

$$B_2 = \frac{\theta_2 M i_2(\infty)}{\theta_1 N\pi a^2} = \frac{1\times 1\times 1}{0,5\times 100\times \pi\times 10^{-4}} = 63.4 \text{ T} .$$

3032

Hai đĩa dẫn điện hoàn hảo có bán kính a đặt cách nhau một khoảng cách h ($h \ll a$). Một hình trụ rắn có bán kính b, chiều dài h và điện trở suất khối ρ lấp đầy vị trí trung tâm của khoảng trống giữa hai đĩa (xem H. 3.48). Các đĩa được nối với một ắc quy trong khoảng thời gian vô hạn.

(a) Hãy tính điện trường trong khoảng trống giữa hai đĩa như một hàm của thời gian sau khi ắc quy được ngắt ra khỏi tụ điện. Bỏ qua hiệu ứng biên và độ tự cảm.

(b) Hãy tính B trong khoảng trống như một hàm của thời gian và khoảng cách tính từ trục của các đĩa.

(c) Hãy tính Poynting vectơ trong khoảng không gian giữa các đĩa. Hãy giải thích một cách định tính hướng của nó tại $r = a$ và tại $r = b$.



Hình 3.48

(d) Bằng sự tính toán chi tiết trong trường hợp đặc biệt $a = b$, hãy chứng minh rằng định lý bảo toàn năng lượng (định lý Poynting) thoả mãn trong thể tích bao quanh bởi các đĩa và $r = a$.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Giả sử đĩa bên trên chứa điện tích $+Q$ và đĩa dưới chứa điện tích $-Q$ tại thời gian t. Do sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của cường độ điện trường qua mặt phân cách, ta có

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\pi a^2 \varepsilon_0}\mathbf{e}_z \text{ tại } z < h \, .$$

Đối với $r \leq b$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, với $\sigma = 1$, ta có

$$I = j\pi b^2 = \sigma \mathbf{E}\pi b^2 \, .$$

Như vậy

$$\sigma \frac{Q}{\pi a^2 \varepsilon_0}\pi b^2 = -\frac{dQ}{dt} \, ,$$

hay

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} \, ,$$

với $\tau = \frac{a^2\varepsilon_0\rho}{b^2}$. Do đó

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-t/\tau}\mathbf{e}_z = \frac{V_0}{h} e^{-t/\tau}\mathbf{e}_z \, .$$

(b) Áp dụng định luật Ampe về lưu số $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ đối với một vòng tròn đồng trục bán kính $r < b$ trên một tiết diện của hình trụ rắn

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \, ,$$

ta có

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \ ,$$

hay

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j r}{2}\mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 r V_0}{2\rho h} e^{-t/\tau}\mathbf{e}_\theta \ , \qquad (r < b)$$

trong đó $\mathbf{e}_\theta$ là một vectơ đơn vị tiếp tuyến với đường tròn. Đối với $b < r < a$, theo định luật về lưu số

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = j\pi b^2 \mu_0$$

ta có

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 b^2 V_0}{2r\rho h} e^{-t/\tau}\mathbf{e}_\theta \ .$$

(c) Đối với $0 < r < b$ và giữa các đĩa dẫn điện, vectơ Poynting là

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{V_0}{h}e^{-t/\tau} \cdot \frac{rV_0}{2\rho h}e^{-t/\tau}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta) = -\frac{r}{2\rho}(\frac{V_0}{h})^2 e^{-2t/\tau}\mathbf{e}_r .$$

Đối với $b < r < a$, ta có

$$\mathbf{S} = \frac{V_0}{h}e^{-t/\tau} \cdot \frac{b^2 V_0}{2r\rho h}e^{-t/\tau}\mathbf{e}_r = -\frac{1}{2r\rho}\left(\frac{V_0 b}{h}\right)^2 e^{-2t/\tau}\mathbf{e}_r \ .$$

Hướng của $\mathbf{S}$ tại $r = a$ và $r = b$ đều là $-\mathbf{e}_r$, nghĩa là, năng lượng điện từ chảy theo hướng bán kính vào bên trong hình trụ rắn giữa hai đĩa (trong trường hợp lý tưởng). Năng lượng này bù đắp cho năng lượng mất đi do toả nhiệt Joule trong hình trụ rắn nơi có dòng điện chạy qua. Điều này có thể thấy như sau. Đối với $b < r < a$ năng lượng chảy vào trong một đơn vị thời gian là $\frac{1}{2r\rho}(\frac{V_0 b}{h})^2 \cdot 2\pi r h e^{-2t/\tau} = \frac{\pi}{\rho h}(V_0 b)^2 e^{-2t/\tau}$, không phụ thuộc vào r. Nhưng đối với $r < b$, công suất chảy vào là $\frac{r}{2\rho}(\frac{V_0}{h})^2 \cdot 2\pi r h e^{-2t/\tau} = \frac{\pi}{\rho h}(V_0 r)^2 e^{-2t/\tau}$, giảm khi r giảm.

(d) Đối với $a = b$ công suất chảy vào trong hình trụ là

$$P_1 = \iint_{r=a} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\pi}{\rho h}(V_0 a)^2 e^{-2t/\tau} \ .$$

Công suất hao phí do nhiệt Joule trong hình trụ là

$$P_2 = I^2 R = \left[\pi a^2 \cdot \frac{1}{\rho}\frac{V_0}{h}e^{-t/\tau}\right]^2 \cdot \frac{\rho h}{\pi a^2}$$

$$= \frac{\pi}{\rho h}(V_0 a)^2 e^{-2t/\tau} \ .$$

Như vậy $P_1 + P_2 - 0$, và định luật bảo toàn năng lượng được thoả mãn.

3033

Trên hình 3.49, hai cuộn dây được quấn trên lõi sắt theo cùng một hướng. Hãy cho biết dòng điện chạy qua điện trở r có chiều sang phải hay sang trái và đưa ra lý lẽ cho câu trả lời của bạn trong từng trường hợp sau

(a) Công tắc S mở.

(b) Điện trở R giảm.

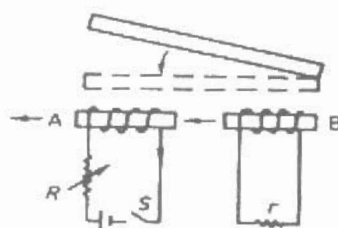
(c) Một thanh sắt được đặt dọc theo hai cuộn dây.

(d) Cuộn dây A được đẩy xa cuộn dây B.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Chiều của dòng điện trong cuộn A với công tắc S đóng đã được chỉ trên hình 3.49. Theo quy tắc vặn ốc vít, từ trường sinh ra chỉ về hướng trái. Nếu dòng điện không đổi thì không có dòng điện trên r.



Hình 3.49

(a) Khi công tắc S mở, từ trường hướng sang trái giảm. Theo định luật Lenz từ trường hướng sang trái được cảm ứng trong cuôn B. Do đó dòng điện cảm ứng trên điện trở r chảy từ phải sang trái.

(b) Nếu R giảm, dòng điện chạy qua cuộn A tăng. Khi đó từ thông có hướng sang trái, đi qua B, cũng sẽ tăng. Theo định luật Lenz dòng điện cảm ứng trong điện trở r chạy từ trái sang phải.

(c) Một thanh sắt đặt dọc các cuộn dây sẽ làm tăng từ trường gốc. Như vậy dòng điện trong r sẽ chạy từ trái sang phải.

(d) Khi cuộn A được kéo ra xa cuộn B, từ thông đi qua B sẽ giảm, như vậy dòng cảm ứng trong r sẽ chạy từ phải sang trái.

3034

Một xôlênôit được thiết kế để tạo một từ trường trong một thể tích lớn. Kích thước của nó như sau: chiều dài = 2 mét, bán kính = 0,1 mét, số vòng = 1000. (Hiệu ứng biên có thể bỏ qua).

(a) Hãy tính độ tự cảm của xôlênôit này.

(b) Từ trường (Wb/m^2) sinh ra trên trục của xôlênôit do một dòng điện 2000 A là bao nhiêu?

(c) Năng lượng tích trữ là bao nhiêu khi xôlênôit hoạt động với dòng điện này?

(d) Tổng điện trở của xôlênôit là 0,1 Ω. Hãy tìm phương trình mô tả dòng điện quá độ như một hàm của thời gian ngay sau khi nối xôlênôit với một nguồn 20 V. Hằng số thời gian của mạch là bao nhiêu?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Giả thiết xôlênôit mang một dòng điện I. Cảm ứng từ bên trong nó là

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 NI/l \ ,$$

và từ thông qua nó là

$$\psi = NBS = N\frac{\mu_0 NI}{l} \cdot \pi r^2 = \frac{I\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \ .$$

Do đó độ tự cảm là

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times \pi \times 0,1^2}{2}$$
$$= 1,97 \times 10^{-2}\ \text{H} \ .$$

(b)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 2000}{2} = 1,26\ \text{Wb/m}^2 \ .$$

(c)

$$W_m = \frac{L}{2}I^2 = \frac{1,97 \times 10^{-2} \times 2000^2}{2} = 3,94 \times 10^4\ \text{J} \ .$$

(d) Phương trình mạch điện là

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt} ,$$

suy ra

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = i(\infty)(1 - e^{-t/\tau}) ,$$

trong đó $\tau = \frac{L}{R} = 0,197$ s là hằng số thời gian của mạch. Vì

$$\varepsilon = 20 \text{ V} , \quad R = 0,1\ \Omega , \quad L = 1,97 \times 10^{-2} \text{ H} ,$$

ta có

$$i(t) = 200(1 - e^{-5t}) \text{ A} .$$

3035

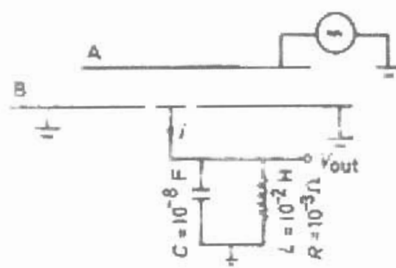
Mạch điện trong hình 3.50 bao gồm hai tấm kim loại lớn song song. Tấm B được nối đất ngoại trừ một phần nhỏ (detector). Một điện áp hình sin có tần số ω được đặt lên tấm A.

(a) Đối với giá trị nào của ω thì V_0 (biên độ của V_{out}) là cực đại?

(b) Với ω cố định, tấm A được chuyển dịch sang trái và phải. Hãy vẽ phác đồ thị biểu diễn V_0 như một hàm của vị trí. Chỉ rõ các điểm mà tại đó rìa của tấm A đi qua detector.

(c) Giả thiết rằng A được giữ ở một điện thế cố định. Trường tĩnh điện tạo ra liên quan với hàm số vẽ trong phần (b) như thế nào? Hãy giải thích.

(Wisconsin)



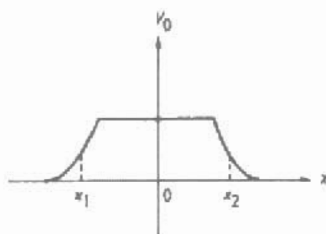
Hình 3.50

Lời giải:

(a) Cộng hưởng sẽ xảy ra khi

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \times 10^{-8}}} = 10^5 \text{ rad/s} .$$

Tại thời điểm này trở kháng tương đương của mạch song song là cực đại. Do đó V_0 cũng sẽ cực đại.



Hình 3.51

(b) Đồ thị biểu diễn V_0 như một hàm của vị trí được chỉ ra trên hình 3.51, trong đó x là khoảng cách nằm ngang từ điểm giữa của A đến điểm giữa của detector, x_1 và x_2 tương ứng với rìa phải và rìa trái của A khi đi qua điểm giữa của detector.

(c) Sự thay đổi của trường tĩnh điện theo x tương tự như sự thay đổi của hàm số vẽ trong phần (b). Cường độ điện trường giảm gần rìa của tấm A.

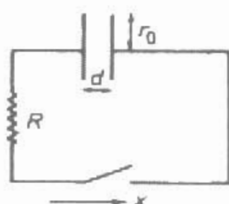
Vì độ lớn của V_0 phản ánh lượng điện tích có trên tấm A và detector, $Q = CV_0$, nên cường độ trường tĩnh điện lớn ở nơi mà V_0 lớn. Tấm B lớn hơn so với tấm A nên chuyển động của tấm A có thể bỏ qua.

3036

Trong mạch điện hình 3.52, tụ điện có các bản cực tròn bán kính r_0 đặt cách nhau một khoảng cách d. Giữa các bản cực là chân không. Tại $t = 0$, khi có một điện tích Q_0 trên tụ điện, công tắc đóng lại.

(a) Đối với $t \geq 0$, điện trường giữa các bản cực gần bằng $\mathbf{E}(t) = E_0 e^{-t/\tau} \mathbf{i}$. Hãy tìm E_0 và τ (nếu bạn không tìm được, hãy lấy chúng như những hằng số đã cho và đi tiếp đến phần (b)).

(b) Hãy nêu một số phép gần đúng và các giả thiết lý tưởng hoá đã dùng để tìm dạng của $\mathbf{E}$ đã cho trong (a).



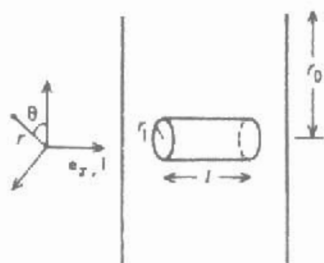
Hình 3.52

(c) Tìm từ trường giữa các bản cực đối với $t > 0$. Bạn có thể sử dụng các phép gần đúng và các giả thiết lý tưởng hoá tương tự như trong phần (b).

(d) Mật độ năng lượng điện từ trong vùng chân không giữa các bản cực là bao nhiêu?

(e) Xét một phần hình trụ của vùng chân không giữa các bản cực (xem hình 3.53). Giả thiết rằng nó có bán kính r_1, chiều dài l và nằm ở giữa. Sử dụng câu (a), (c) và vectơ Poynting hãy tính tổng năng lượng chảy qua bề mặt của hình trụ nhỏ trong khoảng thời gian $0 < t < \infty$.

(UC, Berkeley)



Hình 3.53

Lời giải:

(a) Vì $\frac{Q}{C} = iR = -\frac{dQ}{dt}R$, ta có $Q = Q_0 e^{-t/\tau}$ với $\tau = RC$. Vì $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, ta có $E = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0} e^{-t/\tau}$. So sánh biểu thức này với $E = E_0 e^{-t/\tau}$, ta tìm được

$$E_0 = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}, \qquad \tau = RC = \frac{R\varepsilon_0 \pi r_0^2}{d} .$$

(b) Để tìm **E** cho trường hợp (a) ta đã giả thiết rằng điện tích Q phân bố

đồng đều trên các bản cực tại bất kì thời điểm nào và hiệu ứng rìa có thể bỏ qua được. Phép gần đúng này càng chính xác nếu $d \ll r_0$.

(c) Do đối xứng và phương trình tích phân Maxwell

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} ,$$

trong đó

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} ,$$

ta tìm được

$$\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon_0 r E}{2\tau}\mathbf{e}_\theta , \qquad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 r E}{2\tau}\mathbf{e}_\theta ,$$

khi dùng các phép gần đúng tương tự như trong câu (b).

(d)

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\left[1 + \frac{\mu_0\varepsilon_0 r^2}{4\tau^2}\right] .$$

(e) Vectơ Poynting của trường điện từ là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\varepsilon_0 r}{2\tau}E\right)\mathbf{e}_\theta = \frac{\varepsilon_0 r E^2}{2\tau}\mathbf{e}_r .$$

Như vậy trong khoảng thời gian $t = 0$ đến ∞ năng lượng chảy qua bề mặt hình trụ là

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty N 2\pi r l dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 r_1}{2\tau} 2\pi r_1 l E e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{\varepsilon_0 r_1^2 \pi l}{2}E = \frac{r_1^2 l Q^2}{2\varepsilon_0 \pi r_0^4} . \end{aligned}$$

3037

Một mạch cộng hưởng bao gồm một tụ điện phẳng C và một cuộn cảm có N vòng quấn trên một hình xuyến. Các kích thước tuyến tính của tụ điện và cuộn cảm được giảm đi 10 lần, trong khi số vòng trên hình xuyến giữ không đổi.

(a) Điện dung thay đổi bao nhiêu lần?

(b) Độ tự cảm thay đổi bao nhiêu lần?

(c) Tần số cộng hưởng của mạch cộng hưởng thay đổi bao nhiêu lần?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Điện dung là $C \propto \frac{S}{d}$, khi đó $C_f = \frac{1}{10}C_i$.

(b) Độ tự cảm là $L \propto N^2 S/l$, do đó $L_f = \frac{1}{10}L_i$.

(c) Tần số cộng hưởng là $\omega \propto \frac{1}{\sqrt{LC}}$, do đó $\omega_f = 10\omega_i$.

3038

Bạn có n ắc quy, mỗi cái có điện trở trong R_i và điện áp V. Các ắc quy được nhóm lại thành các bộ k ắc quy mắc nối tiếp. n/k bộ được mắc song song với một điện trở tải R. Hãy tìm giá trị của k để công suất tiêu thụ trong R đạt cực đại. Công suất cực đại đó là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Điện áp đối với từng bộ ắc quy là kV và điện trở trong là kR_i. Sau khi n/k bộ được mắc song song, điện áp toàn phần vẫn là kV nhưng điện trở trong toàn phần trở thành $\frac{kR_i}{n/k} = \frac{k^2 R_i}{n}$. Công suất trên R sẽ cực đại khi điện trở tải R đúng bằng điện trở trong, nghĩa là $R = \frac{k^2 R_i}{n}$. Do đó để có công suất cực đại $k = \sqrt{\frac{nR}{R_i}}$. Công suất đó có giá trị

$$P_{\max} = \left(\frac{kV}{2R}\right)^2 R = \frac{k^2 V^2}{4R} = \frac{nV^2}{4R_i} \ .$$

3039

Khi một tụ điện đang được phóng điện thì:

(a) năng lượng tích trữ ban đầu trong tụ điện đó có thể truyền hoàn toàn cho tụ điện khác.

(b) điện tích ban đầu giảm theo hàm mũ e với thời gian.

(c) cần phải sử dụng một cuộn cảm.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3040

Nếu L = độ cảm ứng và R = điện trở, đơn vị của $\frac{L}{R}$

(a) s (giây). (b) s^{-1}. (c) A.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3041

Hai cuộn cảm L_1 và L_2 được mắc song song ở xa nhau. Độ tự cảm của cả hai là

(a) $L_1 + L_2$ (b) $\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ (c) $(L_1 + L_2)\frac{L_1}{L_2}$

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3042

Một máy phát dòng xoay chiều với điện trở thuần 10 Ω và không có trở kháng được mắc với một tải 1000 Ω qua một máy biến thế lý tưởng. Để chuyển công suất cực đại đến tải, máy biến thế phải có tỉ số vòng là bao nhiêu?

(a) 10 (b) 100 (c) 1000

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3043

Một mạch điện được chế tạo từ một tụ điện và một cuộn cảm mắc nối tiếp có thể hoạt động như một mạch dao động vì các lý do nào dưới đây:

(a) luôn luôn có điện trở trong các dây dẫn.

(b) điện áp và dòng điện không cùng pha với nhau.

(c) điện áp và dòng điện cùng pha với nhau.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3044

Lực theo hướng x giữa hai cuộn dây chứa dòng điện i_1 và i_2 được biểu diễn qua độ hỗ cảm M bởi công thức nào dưới đây:

(a) $i_1 \frac{di_2}{dx} M$ (b) $i_1 i_2 \frac{dM}{dx}$ (c) $i_1 i_2 \frac{d^2 M}{dx^2}$.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3. CÁC MẠCH ANALOG (3045–3057)

3045

Để nhận được hiệu ứng Zener, điôt Zener phải:

(a) phân cực ngược. (b) phân cực thuận. (c) nối với dòng xoay chiều.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3046

Một bộ khuếch đại tranzitor trong cấu hình "cực gốc nối đất" có các đặc tính sau:

(a) trở kháng đầu vào thấp.

(b) độ khuếch đại dòng cao.

(c) trở kháng đầu ra thấp.

(*CCT*)

Lời giải:

Đối với một bộ khuếch đại tranzitor trong cấu hình cực gốc nối đất, trở kháng đầu vào $r_i = R_e \| \frac{r_{be}}{1+\beta}$, có giá trị nhỏ.

Độ khuếch đại dòng $A_i = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{R_c}{R_c+r_i} \cdot \frac{R_c}{R_c+R_L} < 1$,

Trở kháng đầu ra $r_0 \approx R_c$, với R_e, R_c và R_L là điện trở của emitter, colector và tải. Do đó câu trả lời (a) là chính xác.

3047

Có thể đo trở kháng của một cáp đồng trục bằng cách nào sau đây:

(a) dùng một ôm kế mắc với cáp.

(b) bằng cách sử dụng các tính chất phản xạ của các đầu cuối.

(c) bằng cách đo sự suy giảm của các tín hiệu qua cáp.

(*CCT*)

Lời giải:

Khi trở kháng của các đầu cáp phù hợp nhau (nghĩa là có sự phối hợp trở kháng), sẽ không xảy ra phản xạ. Phương pháp này có thể sử dụng để đo trở kháng của một cáp đồng trục. Do đó câu trả lời (b) là chính xác.

3048

Sự truyền các tần số cao trong một cáp đồng trục được xác định bởi:

(a) trở kháng.

(b) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, với L và C là độ tự cảm và điện dung được phân bố một cách phù hợp.

(c) các tổn hao điện môi và hiệu ứng skin.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3049

Giới hạn tần số cao của một tranzitor được xác định bởi:

(a) sự tăng của bức tranh nhiễu với tần số.

(b) loại mạch (bas/emitter/collector nối đất).

(c) kích thước cơ học của các miền tích cực và tốc độ trôi của các hạt tải điện.

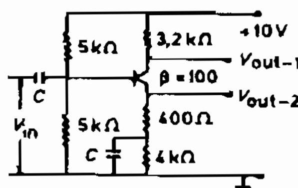
(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

3050

Một tranzitor Si với $\beta = 100$ được sử dụng trong một mạch khuếch đại như trên hình 3.54. Hãy điền các thông tin vào các chỗ trống. Giả thiết rằng đối với các tần số liên quan đến $\frac{1}{\omega C}$ là có thể bỏ qua và nguồn suất điện động cung cấp V_{in} có trở kháng trong nhỏ không đáng kể.



Hình 3.54

$I_B =$ __________ $I_C =$ __________

$I_E =$ __________ $V_C =$ __________

$V_E =$ __________ $V_B =$ __________

Tín hiệu của nguồn 10 V = __________

$R_{\text{in}} =$ __________

Hệ số khuếch đại tín hiệu nhỏ tại đầu ra 1 = __________

Hệ số khuếch đại tín hiệu nhỏ tại đầu ra 2 = __________

$R_{\text{out 1}} =$ ____________ $R_{\text{out 2}} =$ ____________

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Các giá trị được tính dưới đây:

$$V_B = \frac{5}{5+5} \times 10 = 5\,\text{V},$$

$$V_E = 5 - 0,6 = 4,4\,\text{V},$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = 1\text{ mA},$$

$$I_C = \frac{\beta}{1+\beta} I_E \approx 0,99\text{ mA},$$

$$I_B = \frac{I_E}{1+\beta} \approx 0,01\text{ mA},$$

$$V_C = 10 - I_C \cdot 3,2\text{ k}\Omega = 10 - 0,99 \times 3,2 \approx 6,8\,\text{V},$$

$$R_{\text{in}} = 5\text{k}\|5\text{k}\|\left[r_{be} + (1+\beta)\cdot 400\right] \approx 2,4\text{ k}\Omega,$$

với $r_{be} = 300 + (1+\beta)\dfrac{26}{I_C} \approx 3\text{ k}\Omega$,

Hệ số khuếch đại tín hiệu nhỏ tại đầu ra 1 $= -\dfrac{\beta R_C}{r_{be} + (1+\beta)\cdot 400} \approx -7,4$,

Hệ số khuếch đại tín hiệu nhỏ tại đầu ra 2 $= \dfrac{(1+\beta)\cdot 400}{r_{be} + (1+\beta)\cdot 400} \approx 0,93$,

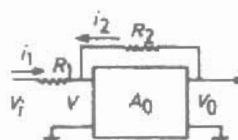
$$R_{\text{out1}} = 3,2\text{ k}\Omega,$$

$$R_{\text{out2}} = 400\|\left(\frac{r_{be} + 5\|5}{1+\beta}\right) \approx 48\,\Omega.$$

3051

Hãy tính $A_F = V_0/V_i$, hệ số khuếch đại của mạch có hồi tiếp như trên hình 3.55. $A_0 = V_0/V$, là hệ số khuếch đại không có hồi tiếp, nó có giá trị lớn và âm. Điện trở đầu vào tới A_0 là lớn hơn nhiều so với R_1 và R_2 và điện trở đầu ra nhỏ hơn nhiều so với R_1 và R_2. Hãy bàn luận về sự phụ thuộc của A_F vào A_0.

(*Wisconsin*)



Hình 3.55

Lời giải:

Khi A_0 lớn và điện trở đầu vào lớn hơn nhiều so với R_1 và R_2, trong khi điện trở đầu ra nhỏ hơn nhiều so với R_1 và R_2, ta có thể coi mạch có hồi tiếp như một bộ khuếch đại lý tưởng.

Lấy $i_1 = -i_2$, khi đó

$$V_i - V = -\frac{R_1}{R_2}(V_0 - V) ,$$

hay

$$\frac{V_i}{V_0} - \frac{V}{V_0} = -\frac{R_1}{R_2}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right) .$$

Đặt

$$A_F = V_0/V_i , \qquad A_0 = V_0/V ,$$

Phương trình trên trở thành

$$\frac{1}{A_F} = -\frac{R_1}{R_2} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{A_0} ,$$

Suy ra

$$A_F = \frac{1}{-\frac{R_1}{R_2} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{A_0}} .$$

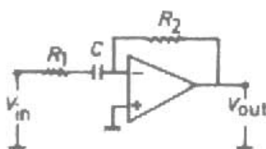
Vì A_0 lớn, $A_F \approx -\frac{R_2}{R_1}$. Điều này dẫn đến A_F không phụ thuộc vào A_0 п được xác định bởi R_1/R_2. Do đó độ khuếch đại là ổn định.

3052

Bộ khuếch đại trong mạch trên hình 3.56 là một bộ khuếch đại thuật toán với hệ số khuếch đại lớn (ví dụ, hệ số khuếch đại = 50 000). Tín hiệu đầu vào V_{in} là hình sin với một tần số góc ω ở giữa độ rộng vùng khuếch đại. Hãy tìm

biểu thức liên hệ góc pha ϕ giữa các điện áp đầu vào và đầu ra khi đo đối với đất. Giả thiết rằng các giá trị R_1 và R_2 có cùng hệ độ lớn như nhau. Chú ý rằng đầu vào không đảo đối với bộ khuếch đại được nối đất.

(*Wisconsin*)



Hình 3.56

Lời giải:

Bộ khuếch đại có thể được coi như một bộ khuếch đại thuật toán lý tưởng với đầu vào đảo mạch "giả nối đất". Khi đó

$$\frac{V_{\text{in}} - 0}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{0 - V_{\text{out}}}{R_2} ,$$

hay

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} .$$

Độ lệch pha giữa các điện áp đầu vào và đầu ra là

$$\phi = \pi - \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\omega C R_1}\right) .$$

3053

Một bộ khuếch đại đầu vào vi phân có hệ số khuếch đại rất cao được nối theo cấu hình mạch khuếch đại thuật toán hồi tiếp âm như hình 3.57.

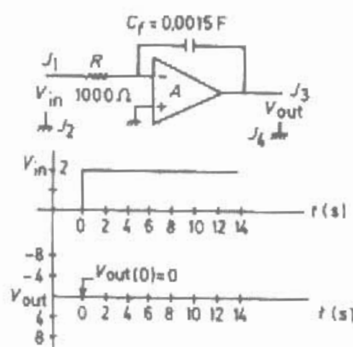
Trở kháng đầu ra có thể được coi như nhỏ không đáng kể. Hệ số khuếch đại vòng mở A có thể coi như "lớn vô hạn" trong ứng dụng này, nhưng bộ khuếch đại bão hoà một cách đột ngột khi V_{out} đạt đến ± 10 V.

(a) Hãy viết biểu thức thuật toán lý tưởng liên hệ $V_{\text{out}}(t)$ với $V_{\text{in}}(t)$.

(b) Trở kháng đầu vào là bao nhiêu tại các đầu (J_1, J_2)?

(c) Một đầu vào nhảy bậc hai vôn được lấy làm V_{in} như trên đồ thị đầu tiên. Hãy sao lại đồ thị thứ hai trên bài làm của bạn và vẽ phác tín hiệu đáp ở đầu ra.

(*Wisconsin*)



Hình 3.57

Lời giải:

(a) Mạch điện là một mạch tích phân ngược pha tạo bởi một bộ khuếch đại lý tưởng. Ta có

$$V_{out} = -\frac{1}{C_f}\int_0^t \frac{V_{in}}{R}dt + V_0(0), \qquad (|V_{out}| < 10\text{ V})$$

Nếu $V_0(0) = 0$ tại thời điểm ban đầu, khi đó

$$V_{out} = -\frac{1}{C_f}\int_0^t \frac{V_{in}}{R}dt .$$

(b) Nếu điện áp đầu vào tại các đầu cuối (J_1, J_2) là hình sin với tần số ω thì trở kháng đầu vào qua hai đầu đó là $R + \frac{1}{j\omega C_f}$.

(c) Nếu đầu vào nhảy bậc 2 vôn được sử dụng làm V_{in} và $V_{out} = 0$ tại thời điểm ban đầu, ta có

$$V_{out} = -\frac{1}{RC_f}\int_0^t V_{in}dt = -\frac{V_{in}}{RC_f}\cdot t .$$

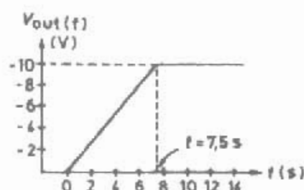
Khi bộ khuếch đại bão hoà đột ngột tại $V_{out} = \pm 10$ V, dòng bão hoà là

$$t = \frac{-V_{out}}{V_{in}}RC_f = \frac{10}{2}\times 1000 \times 0,0015 = 7,5\text{ s} .$$

Do đó

$$V_{\text{out}} = \begin{cases} 0 & t \leq 0\,, \\ -\frac{4}{3}t & 0 < t \leq 7,5\ \text{s}\,, \\ -10 & t > 7,5\ \text{s}\,. \end{cases}$$

Tín hiệu đáp đầu ra được biểu diễn trên hình 3.58.



Hình 3.58

3054

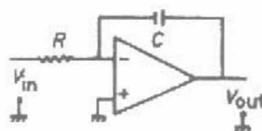
Xét mạch khuếch đại thuật toán trên hình 3.59.

(a) Đây là một mẫu hồi tiếp âm hay hồi tiếp dương?

(b) Hãy chứng minh rằng mạch có chức năng như một mạch tích phân thuật toán. (Nêu các giả thiết cần thiết).

(c) Trình bày một mạch sử dụng các thành phần linh kiện giống như vậy nhưng lại tạo thành một mạch vi phân thuật toán.

(*Wisconsin*)



Hình 3.59

Lời giải:

(a) Mạch hồi tiếp âm.

(b) Từ hình 3.59 ta tìm được

$$\begin{cases} i = C\frac{dV_{\text{out}}}{dt}, \\ Ri = -V_{\text{in}}, \end{cases}$$

Suy ra:

$$V_{\text{out}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_{\text{in}}dt + V_0 .$$

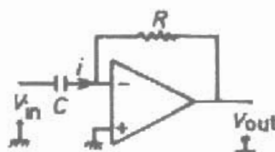
Như vậy mạch là một mạch tích phân thuật toán.

Sự tính toán ở trên dựa trên các giả thiết sau:

(1) Trở kháng lối vào vòng hở là vô hạn.

(2) Hệ số khuếch đại điện áp vòng hở là vô hạn.

(c) Mạch vi phân thuật toán tương ứng được vẽ trên hình 3.60.



Hình 3.60

3055

Mạch điện trên hình 3.61 là một bộ dao động tích thoát được xây dựng từ một bộ khuếch đại vi sai lý tưởng (hệ số khuếch đại vòng hở vô hạn, trở kháng đầu vào vô hạn). Bộ khuếch đại bão hoà tại điện áp đầu ra ±10 V.

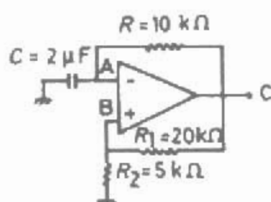
(a) Hãy tính tần số dao động đối với các giá trị đã cho của các linh kiện.

(b) Hãy vẽ dạng sóng tại đầu vào đảo (A), đầu vào không đảo (B) và đầu ra (C).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đây là một bộ dao động tích thoát có hồi tiếp dương được mắc song song phân dòng bởi R_1 và R_2 và phóng điện qua một mạch RC. Khi đã đạt được sự ổn định, đầu ra là một sóng hình chữ nhật với biên độ bằng điện áp bão hoà. Giả sử $V_C = +10$V. Điện thế tại điểm B là $V_B = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times V_C = 2$ V. Tụ



Hình 3.61

điện C được tích điện qua R và V_A sẽ tăng từ -2 V đến $+2$ V. Khi đó V_A cao hơn so với V_B, V_C sẽ giảm đến -10 V và C sẽ phóng điện qua R. Khi V_A thấp hơn so với điện thế tại B mà hiện tại giá trị của nó bằng $\frac{R_2}{R_1+R_2}\times(-10) = -2$ V, V_C sẽ lại tăng đến $+10$ V. Như vậy mỗi một lần tích điện tiếp theo mạch sẽ phục hồi trở lại điểm khởi đầu, nghĩa là xảy ra sự dao động tích thoát (sự dao động phục hồi). Sự tích điện của tụ điện dẫn đến

$$V = V_0\left[1-\exp(-t/RC)\right], \quad \text{hoặc} \quad t = RC\ln\left(\frac{V_0}{V_0-V}\right).$$

Thời gian tích điện T từ V_1 đến V_2 là

$$T = RC\ln\frac{V_0-V_1}{V_0-V_2}.$$

Thời gian tích điện được cho bởi $V_0 = 10$ V, $V_1 = -2$ V, $V_2 = 2$ V, nghĩa là, $T_1 = RC\ln\frac{10+2}{10-2} = 8,1$ ms; thời gian phóng điện được cho bởi $V_0 = -10$ V, $V_1 = 2$ V, $V_2 = -2$ V, nghĩa là $T_2 = RC\ln\frac{-10-2}{-10+2} = 8,1$ ms.

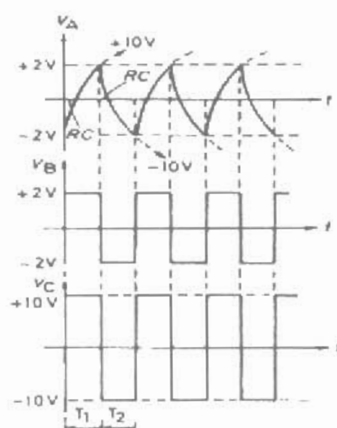
Do đó tần số dao động là $\frac{1}{T_1+T_2} = 61,6$ Hz.

(b) Dạng sóng của V_A, V_B, và V_C được cho trên hình 3.62.

3056

Một mạch máy tính tương tự như trên hình 3.63 được chế tạo bằng cách sử dụng các bộ khuếch đại thuật toán có độ khuếch đại cao. Máy tính tương tự này giải được những phương trình vi phân nào? Nếu sự tính toán tương tự được khởi đầu bằng việc đồng thời mở các công tắc S_1 và S_2, thì các điều kiện ban đầu nào là thích hợp cho việc giải phương trình?

(Wisconsin)



Hình 3.62

Lời giải:

Gọi điện áp đầu ra là V_0. Vì các bộ khuếch đại thuật toán có thể được coi là lý tưởng, ta có các phương trình sau

$$\text{tại điểm 1:} \quad \frac{V_1}{R} = -C\frac{dV_2}{dt}, \tag{1}$$

$$\text{tại điểm 2:} \quad \frac{V_2}{R} = -C\frac{dV_0}{dt}, \tag{2}$$

$$\text{tại điểm 3:} \quad \frac{V_0}{\frac{R}{2}} + \frac{V_2}{3R} = -\frac{V_1}{R}. \tag{3}$$

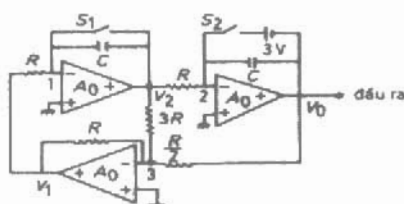
$$T(1) \text{ và (2) cho} \quad \frac{V_1}{R} = RC^2\frac{d^2V_0}{dt^2}, \tag{4}$$

$$T(2) \text{ và (3) cho} \quad \frac{2V_0}{R} - \frac{C}{3}\frac{dV_0}{dt} = -\frac{V_1}{R}. \tag{5}$$

Sau đó từ (4) và (5) cho

$$\frac{d^2V_0}{dt^2} - \frac{1}{3}\frac{dV_0}{dt} + 2V_0 = 0,$$

Nếu lấy $RC = 1$. Đây là phương trình vi phân, có thể được giải bởi máy tính tương tự.



Hình 3.63

Ban đầu, khi S_1 và S_2 vừa ở trạng thái mở, ta có

$$V_0(0) = -3\ \text{V}\,,$$
$$V_1(0) = V_2(0) = 0\,,$$
$$C\,\frac{dV_0}{dt}\bigg|_{t=0} = 0\,,$$

Như vậy, các điều kiện ban đầu là

$$\begin{cases} V_0 = -3 \\ \dfrac{dV_0}{dt}\bigg|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

3057

Hãy thiết kế một mạch máy tính tương tự sử dụng các bộ khuếch đại thuật toán để tạo ra một điện áp $V(t)$ ở trạng thái dừng, mà điện áp này là nghiệm của phương trình

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 10\,\frac{dV}{dt} - \frac{1}{3}V = 6\sin\omega t\ .$$

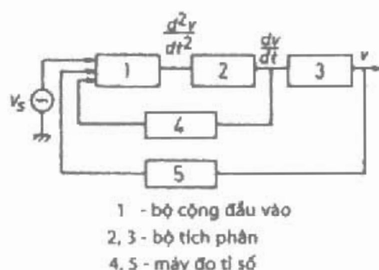
(*Wisconsin*)

Lời giải:

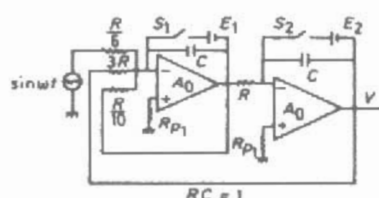
Có thể viết phương trình này như sau

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -10\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3}v + 6\sin\omega t\ .$$

Sơ đồ khối của thiết kế này được trình bày trên hình 3.64 và sơ đồ mạch được cho trên hình 3.65



Hình 3.64



Hình 3.65

Chú ý: Ở thời điểm ban đầu khi các công tắc S_1 và S_2 đóng thì điện thế của nguồn là $V_s = \sin \omega t$.

4. CÁC MẠCH SỐ (3058–3065)

3058

Ứng dụng trực tiếp của điện tử học NIM tiêu chuẩn của hệ thức De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ là:

(a) Sự biến đổi của khối "OR" thành khối "AND".

(b) Sự đảo của các tín hiệu.

(c) Sự thực hiện của một "EXCLUSIVE OR".

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c). Bảng giá trị chân lý của bài toán này được được cho dưới

đây:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	đầu ra
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

3059

Có thể chế tạo một cách hoàn chỉnh một hệ thống digital bằng cách sử dụng:

(a) Chỉ các cổng AND và OR.

(b) Tất cả các cổng NOR hoặc tất cả các cổng NAND.

(c) Không dùng các cổng nào ở trên.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b). Có thể sử dụng một cổng NOR hoặc một cổng NAND như là một cổng NON. Sử dụng định luật De Morgan, chúng ta có thể chuyển một cổng OR thành một cổng AND, và cổng AND thành cổng OR. Vì vậy, chỉ với những cổng NOR hoặc cổng NAND là đủ để chế tạo một hệ thống digital hoàn chỉnh.

3060

Trên hình 3.66 là bốn kí hiệu cổng logic cơ bản.

(a) Hãy chỉ ra tương đương logic âm của chúng ở cột bên phải.

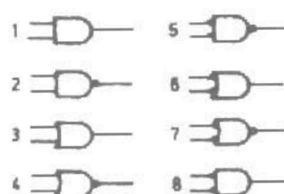
(b) Hãy viết bảng giá trị chân lý cho từng cổng.

(c) Hãy gọi tên hàm logic đó.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Đối với hình 3.66 và ta kí hiệu đầu ra là Q. Đầu ra của các cổng được



Hình 3.66

đưa ra dưới đây:

Cổng	Đầu ra
1	$Q = A \cdot B$
2	$Q = A \cdot B = \overline{A} + \overline{B}$
3	$Q = A + B$
4	$Q = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
5	$Q = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$
6	$Q = \overline{A} + \overline{B}$
7	$Q = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$
8	$Q = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Ta thấy ngay các cặp tương đương là: 1 và 7, 2 và 6, 3 và 5, 4 và 8.

(b) Bảng các giá trị chân lý cho mỗi cặp cổng được cho như sau đây:

1 và 7

A	B	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2 và 6

A	B	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3 và 5

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4 và 8

A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c) Hàm logic đối với mỗi cổng được viết như dưới đây:

1. $Q = A \cdot B$, "AND";
2. $Q = \overline{A} + \overline{B}$, "NOR";
3. $Q = A + B$, "OR";
4. $Q = \overline{A} \cdot \overline{B}$, "NAND";
5. $Q = A + B$, . "AND';
6. $Q = \overline{A} + \overline{B}$, "NOR";
7. $Q = A \cdot B$, "AND";
8. $Q = \overline{A} \cdot \overline{B}$, "NAND".

3061

Bên trong máy đếm lập trình của một bộ vi xử lý có:

(a) địa chỉ lệnh.

(b) địa chỉ của dữ liệu.

(c) số câu lệnh của chương trình.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3062

Một trigger Schmitt có khoảng thời gian chết:

(a) nhỏ hơn độ rộng xung.

(b) gần bằng độ rộng xung.

(c) lớn hơn độ rộng xung.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b)

3063

Hãy xem hình 3.67

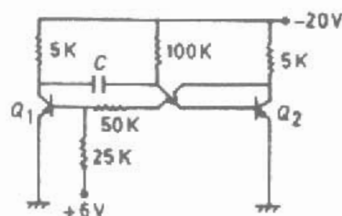
(a) Q_2 đã bão hòa chưa? Giải thích?

(b) Điện áp giữa base-emitter của Q_1 là bao nhiêu?

(c) Khi mạch dao động đơn ổn định này được trigger thì sau bao lâu Q_2 sẽ tắt?

(d) Mạch này có thể được trigger như thế nào? Hãy chỉ ra mạch trigger và dạng sóng này.

(*Wisconsin*)



Hình 3.67

Lời giải:

(a) Trong mạch Q_2, $\beta = \frac{I_c}{I_b} = \frac{100\text{ K}}{5\text{ K}} = 20$. Vì trong một mạch thực tế, bao giờ β cũng lớn hơn 20 nhiều, nên Q_2 đã bão hòa.

(b) Vì Q_2 là bão hòa, $V_c(Q_2) = -0,3$ V nên

$$V_b(Q_1) = 6 - \frac{6 + 0,3}{25 + 50} \times 25 = 3,9 \text{ V} .$$

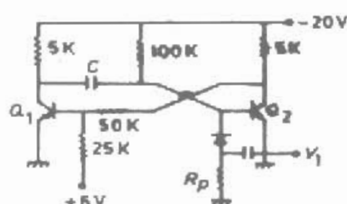
Do đó điện áp base-emitter của Q_1 là 3,9 V.

(c) Độ rộng xung của bộ dao động ổn định đơn là

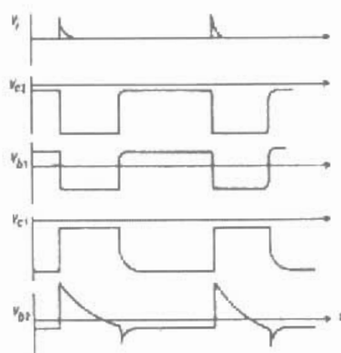
$$\begin{aligned}\Delta t - RC \ln 2 &= 100 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-12} \times 0,7 \\ &= 7 \times 10^{-6} \text{ s} = 7\ \mu\text{s} ,\end{aligned}$$

trong thời gian này Q_2 ở trạng thái tắt.

(d) Mạch trigger được chỉ ra trên hình 3.68, và các dạng sóng được vẽ trong hình 3.69



Hình 3.68



Hình 3.69

3064

Mạch điện trên hình 3.70 là mạch đầu ra của totom pole TTL "điển hình". Giả thiết rằng tất cả các linh kiện chất rắn đều là silic trừ khi nói rõ đó là loại khác. Hãy tính các điện áp với độ chính xác tới 0,1 V cho hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $V_A = 4,0$ V, tính V_B, V_C, và V_E.

Trường hợp 2: $V_A = 0,2$ V, tính V_B, V_C, V_D, và V_E.

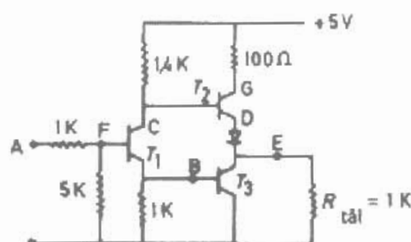
(*Wisconsin*)

Lời giải:

Bởi vì tất cả các linh kiện chất rắn đều là silic, nên các điện áp bão hòa có thể lấy là

$$V_{be} = 0,7 \text{ V}, \qquad V_{ce} = 0,3 \text{ V}.$$

Trường hợp 1: $V_A = 4,0$ V, nên T_1 bão hòa. Tiếp theo T_3 cũng bão hòa, vì vậy $V_B = 0,7$ V, $V_E = 0,3$ V, và $V_C = V_B + 0,3 = 1,0$ V.



Hình 3.70

Trường hợp 2: $V_A = 0,2$ V, nên T_1 là ở trạng thái ngắt, do đó $V_B = 0$ và T_3 cũng ngắt. Đối với T_2, $\beta = \frac{I_c}{I_b} = \frac{1400}{100} = 14$ do vậy T_2 là bão hòa.Vì vậy

$$V_C = 5\text{ V}, \quad V_D = 5 - 0,7 = 4,3\text{ V}, \quad V_E = V_D - 0,7 = 3,6\text{ V} .$$

3065

Thanh ghi (register) ở trong một bộ vi xử lý thường được dùng để:

(a) Lưu giữ một nhóm các số nhị phân có liên quan.

(b) Cung cấp bộ nhớ dữ liệu truy cập ngẫu nhiên.

(c) Lưu giữ một bit đơn của thông tin nhị phân.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a)

5. ĐIỆN TỬ HẠT NHÂN (3066–3082)

3066

Một đường cáp truyền đồng trục có trở kháng 50 Ω, trở kháng này thay đổi một cách đột ngột đến 100 Ω. Dấu của xung này là gì khi nó chuyển từ một xung dương ban đầu?

(a) không có dấu. (b) dương. (c) âm.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

3067

Một xung dương được đưa vào một đường truyền đã được nối tắt ở đầu kia. Xung phản xạ lại:

(a) không có (= 0).

(b) là dương.

(c) là âm.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

3068

Cơ chế truyền phóng điện trong bộ đếm Geiger tự dập tắt là gì?

(a) Sự phát xạ của các êlectron thứ cấp từ catốt bởi các lượng tử UV.

(b) Sự ion hóa khí ở gần anốt bởi các lượng tử UV.

(c) Sự tạo ra các trạng thái giả bền và sự khử kích thích tiếp theo.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c)

3069

Đối với bộ khuếch đại nhạy cảm điện tích nhiễu thấp, các tầng lối vào FET là được ưa chuộng hơn các tranzitor lưỡng cực vì:

(a) Chúng có nhiễu song song không đáng kể.

(b) Chúng nhanh hơn.

(c) Chúng có nhiễu nối tiếp không đáng kể.

CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a)

3070

Khi sử dụng công nghệ có thể so sánh được, thì loại ADC nào có giá trị thấp nhất về thời gian chuyển đổi chia theo khoảng, t_c/A, trong đó t_c = thời gian chuyển đổi và $A = 2^n$ với n = số của các bít?

(a) ADC flash.

(b) Bộ biến đổi xấp xỉ kế tiếp (successive approximation converter).

(c) Bộ biến đổi Wilkinson.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3071

"Bộ khử ngẫu nhiên - derandomizer" là một mạch, nó bao gồm:

(a) Mạch triger.

(b) Các bộ nhớ FIFO.

(c) Mạch vòng khóa pha (phase locked loop).

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

3072

Có thể làm được một bộ phân biệt (discriminator) dùng điốt tunnel có ngưỡng thấp đến mức:

(a) 1 mV. (b) 10 mV. (c) 100 mV.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

3073

Có thể chế tạo các xung với thời gian lên dưới nano giây và biên độ cỡ một vài trăm vôn bằng:

(a) Tranzitor thác (avalance).

(b) Thyratrons.

(c) Các công tắc cơ học.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

3074

Hộp hình vuông trên hình 3.71 biểu thị mạng thụ động tuyến tính không đổi chưa biết. Giả thiết rằng nguồn suất điện động (emf) ở bên trái có trở kháng nội bằng không.

Biết rằng, nếu suất điện động đầu vào, $e_i(t)$, là một hàm nhảy bậc, tức là

$$e_i(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0\,, \\ A & t > 0\,, \end{cases}$$

thì điện áp ra $e_0(t)$ của mạch hở (không tải) có dạng

$$e_0(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0\,, \\ \frac{1}{2}\,A[1 - \exp(-t/\tau)], & t > 0\,, \end{cases}$$

trong đó hằng số τ có giá trị $\tau = 1,2 \times 10^{-4}$ s.

Hãy tính điện áp ra $e_0(t)$ của mạch hở (không tải) khi biết điện áp vào là

$$e_i(t) = 4\cos(\omega t) \text{ V}\,,$$

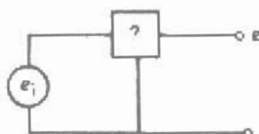
trong đó ω tương ứng với tần số 1500 chu kì/giây.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Trước tiên ta sử dụng ảnh qua phép biến đổi Laplace để tìm hàm truyền $H(s)$ của mạng ở trong vùng tần số. Ảnh Laplace của phương trình $e_i(t) = A \cdot U(t)$ là $E_i(s) = A/s$. Tương tự, ảnh Laplace của điện áp ra $e_0(t)$ là

$$E_0(s) = \frac{1}{2}A\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}\right]\,.$$



Hình 3.71

Vì vậy hàm truyền sẽ là

$$H(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{2\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \ .$$

Ảnh Laplace của điện áp vào mới $e_i(t) = 4\cos(\omega t)$ là

$$E_i(s) = \frac{4s}{\omega^2 + s^2} \ ,$$

nó cho điện áp ra là

$$\begin{aligned} E_0(s) &= E_i(s) \cdot H_i(s) = \frac{4s}{\omega^2 + s^2} \times \frac{\frac{1}{2\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{2}{\tau}\left[\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{-\frac{1}{\tau}}{\omega^2 + (\frac{1}{\tau})^2} + \frac{\frac{1}{2}}{s - i\omega} \times \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{1}{2}}{s + i\omega} \times \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}\right] \ , \end{aligned}$$

Trong đó $\omega\tau = 2\pi \times 1500 \times 1,2 \times 10^{-4} \approx 1$. Biến đổi ngược của $E_0(s)$ sẽ cho điện áp lối ra của mạch hở

$$\begin{aligned} V_0(t) &= \frac{2}{\tau}\left[\frac{-\frac{1}{\tau}}{\omega^2 + (\frac{1}{\tau})^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\frac{1}{\tau}\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{\omega^2 + (\frac{1}{\tau})^2}\right] \\ &\simeq -e^{-t/\tau} + \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \ . \end{aligned}$$

3075

Để mô tả sự truyền của một tín hiệu trên cáp đồng trục, ta có thể coi đường cáp như là một chuỗi của các cuộn cảm, điện trở và các tụ điện, như hình 3.72(a). Như vậy, đường cáp được đặc trưng bởi độ tự cảm, điện dung và điện trở trên một đơn vị độ dài và được gọi lần lượt là L, C và R. Có thể bỏ qua sự bức xạ.

(a) Hãy chứng minh rằng dòng điện trong đường cáp, $I(x,t)$, tuân theo phương trình

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + RC\frac{\partial L}{\partial t} .$$

(b) Hãy viết các phương trình tương tự cho điện áp $V(x,t)$ và điện tích trên một đơn vị độ dài $\rho(x,t)$.

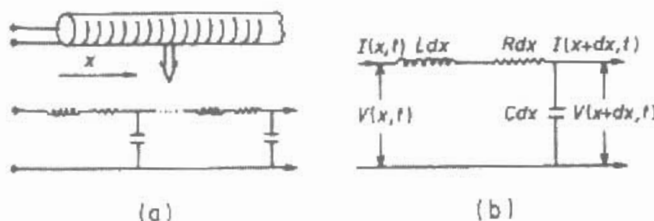
(c) Mật độ năng lượng (năng lượng trên một đơn vị độ dài) trên đường cáp là bao nhiêu? Năng thông là bao nhiêu? Tốc độ tiêu hao năng lượng trên một đơn vị độ dài là bao nhiêu?

(d) Hãy giả thiết rằng một đoạn có chiều dài bán vô cực $(x \geq 0)$ của đường cáp này được nối, tại điểm $x = 0$, với một dao động tử với tần số $\omega > 0$ sao cho

$$V(0,t) = \text{Re}(V_0 e^{i\omega t}) .$$

Hãy tính cường độ dòng điện $I(x,t)$ sau khi trạng thái quá độ đã tắt. Trong giới hạn $R/L\omega \ll 1$ hãy tính độ dài suy giảm và tốc độ truyền của tín hiệu.

(MIT)



Hình 3.72

Lời giải:

(a) Từ hình 3.72(b), ta có

$$\begin{cases} V(x,t) = V(x+dx,t) + RI(t,x)dx + Ldx\,\frac{\partial I(t,x)}{\partial t} \\ I(x,t) = \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t}Cdx + I(x+dx,t) , \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x} = IR + L\frac{\partial I}{\partial t} , \\ -\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial t} . \end{cases}$$

Khử V ta được

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$
$$= +C\frac{\partial}{\partial t}\left(IR + L\frac{\partial I}{\partial t}\right)$$
$$= RC\frac{\partial I}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\ .$$

(b) Tương tự, khử I ta được

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -R\frac{\partial I}{\partial x} - L\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)$$
$$= RC\frac{\partial V}{\partial t} - L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)$$
$$= RC\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\ .$$

Vì

$$\rho dx = Cdx \cdot V\ , \qquad V = \rho/C\ ,$$

suy ra

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = RC\frac{\partial \rho}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\ .$$

(c) Năng lượng và tốc độ hao tán năng lượng trên một đơn vị độ dài lần lượt là

$$W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CV^2\ , \qquad P = I^2R\ .$$

Năng thông là

$$\mathbf{S} = IV\mathbf{e}_x\ .$$

(d) Vì sóng là dạng sin, ta hãy cho

$$V = V_0 \exp[i(kx - \omega t)]\ .$$

Thay vào phương trình vi phân đối với V ta được

$$k^2 = LC\omega^2 + iRC\omega\ .$$

Vì k là số phức, nên đặt $k = K + i\lambda$ và cân bằng phần thực và phần ảo ở hai vế, ta được

$$K^2 - \lambda^2 = LC\omega^2\ ,$$
$$2K\lambda = RC\omega\ .$$

Giải các phương trình trên ta thu được

$$K^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2} + LC\omega^2\right),$$
$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2} - LC\omega^2\right).$$

Vì V có dạng sin, nên I cũng có dạng sin. Từ phương trình $-\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial t}$, ta có

$$I = \frac{\omega C}{k}V = I_0 e^{-\lambda x}\exp\left[i(Kx - \omega t + \varphi_0)\right],$$

trong đó

$$I_0 = \frac{C\omega V_0}{\sqrt{K^2+\lambda^2}}, \qquad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{K}{\lambda}\right).$$

Thực tế $I(x,t) = \operatorname{Re} I = I_0 e^{-\lambda x}\cos(Kx - \omega t + \varphi_0)$. Trong giới hạn $R/L\omega \ll 1$

$$K^2 = LC\omega^2, \quad \lambda^2 = \frac{R^2C}{4L}.$$

Do đó độ dài suy giảm là

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\sqrt{L/C}}{R},$$

và tốc độ truyền là

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3076

Một máy phát xung có trở kháng nội là không đáng kể phát một xung vào cáp đồng trục không bị tiêu hao có trở kháng đặc trưng là 20 Ω. Xung này có $V = 0$ ở $t < 0$ và $t > 5$ μs, và $V = 1V$ đối với $0 < t < 5$ μs. Cáp có độ dài tương đương với độ trễ $1\mu s$ và đầu đối diện với máy phát là hở mạch. Hãy tính dạng (tính cả đến sự phản xạ ở cả hai đầu cáp) của xung điện áp ở đầu mạch hở của đường cáp trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 12\mu s$. Máy phát đã cung cấp cho đường cáp bao nhiêu năng lượng?

(*Columbia*)

Lời giải:

Hệ số phản xạ ρ được cho bởi $\rho = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$, trong đó $Z_0 = 20$ Ω. Tại đầu máy phát, $Z_l = 0$ và

$$\rho_i = \frac{-20}{20} = -1.$$

Tại đầu mạch hở, $Z_l = \infty$ và

$$\rho_f = \frac{\infty - 20}{\infty + 20} = +1 .$$

Gọi điện áp tại thời điểm t tại đầu máy phát và đầu hở mạch lần lượt là v_t và V_t. Khi đó

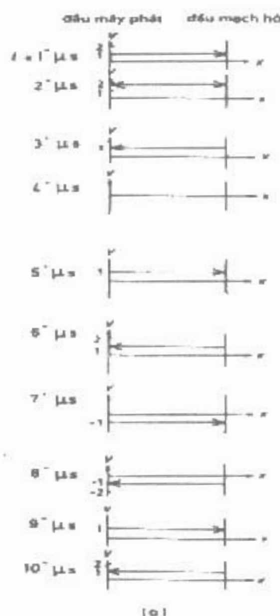
$$v_t = v_{\text{in}} + \rho_i \rho_f v_{t-2} = v_{\text{in}} - v_{t-2} ,$$
$$V_t = v_{t-1} + \rho_f v_{t-1} = 2v_{t-1} ,$$

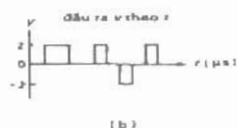
trong đó

$$v_{\text{in}} = 0 \quad \text{với} \quad t < 0 \quad \text{và} \quad t > 5\ \mu\text{s}$$
$$= 1\ \text{V} \quad \text{với} \quad t = 1 - 5\ \mu\text{s} .$$

Từ đó ta có

t (μs)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
V_t (V)	0	2	2	0	0	2	0	−2	0	2	0	−2	0	2	0	...





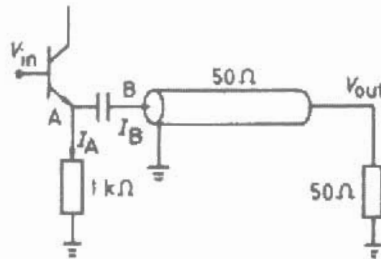
Hình 3.73

Hình 3.73(a) là các dạng sóng tương ứng dọc theo đường truyền trong các thời điểm ngay trước mỗi giây và điện áp ra như là một hàm của thời gian.

3077

Trên hình 3.74 là mạch gánh (lặp lại) emitter được dùng để phát các xung âm nhanh vào một cáp đồng trục 50 Ω. Nếu emitter có thiên áp là +3 V thì ta thấy V_{out} bão hòa ở biên độ xung là −0,15 V. Tại sao?

(*Wisconsin*)



Hình 3.74

Lời giải:

Vì trở kháng đặc trưng của đường truyền 50 Ω, là có sự phù hợp với trở kháng ở đầu ra, nên trở kháng ở điểm B so với đất cũng là $R_B = 50\ \Omega$.

Khi đầu vào là một xung âm thì tranzitor bị đóng và tụ điện sẽ phóng điện qua điểm A. Dòng phóng điện cực đại sẽ là

$$I_A = \frac{3}{1000} = 3\ \text{mA} .$$

Vì có phối hợp trở kháng nên không có sự phản xạ nào ở phía đầu kia của đường truyền. Do đó

$$I_B - I_A - 3\ \text{mA} ,$$

và $V_{out} = -3\ \text{mA} \times 50\ \Omega = -0,15\ \text{V}$ ở trạng thái bão hòa.

3078

Một đường truyền cáp đồng trục có trở kháng đặc trưng la 100 Ω. Một sóng chạy với tốc độ là $2,5 \times 10^8$ m/s trên đường truyền này.

(a) Điện dung trên 1 mét và độ tự cảm trên 1 mét của đường cáp là bao nhiêu?

(b) Một xung điện áp với độ lớn 15 V và có độ rộng xung 10^{-8} s được truyền trên cáp. Hỏi dòng điện của xung này là bao nhiêu?

(c) Hỏi năng lượng đã chứa trong xung này là bao nhiêu?

(d) Nếu xung này gặp một xung khác có độ lớn điện áp ngược lại và đi theo chiều ngược lại, hỏi điều gì sẽ xảy ra về năng lượng tại thời điểm mà hai xung đi ngang qua nhau để điện áp ở mọi nơi là bằng không?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Vì $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z_c = \sqrt{L/C}$, ta có

$$C = \frac{1}{vZ_c} = \frac{1}{2,5 \times 10^8 \times 100} = 4 \times 10^{-11} \text{ F/m} = 40\ p\text{F/m} ,$$

$$L = \frac{Z_c}{v} = \frac{100}{2,5 \times 10^8} = 0,4 \text{ mH/m} .$$

(b) Độ lớn của dòng trong xung này là

$$I_0 = \frac{V}{Z_c} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ A} .$$

(c) Năng lượng mang trong xung này được phân bố khắp đường truyền cáp đồng trục dưới dạng điện trường và từ trường. Độ dài đường truyền là

$$l = vt = 2,5 \times 10^8 \times 10^{-8} = 2,5 \text{ m} ,$$

do đó các năng lượng trường sẽ là

$$W_e = \frac{1}{2}(Cl) \cdot V^2 = \frac{1}{2}(4 \times 10^{-11} \times 2,5) \times 15^2 = 1,125 \times 10^{-8} \text{ J},$$

$$W_m = \frac{1}{2}(Ll)I^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-7} \times 2,5 \times 0,15^2 = 1,125 \times 10^{-8} \text{ J},$$

từ đó ta có

$$W = W_e + W_m = 2,25 \text{ J} .$$

(d) Khi hai xung gặp nhau, các điện áp của chúng triệt tiêu lẫn nhau và các dòng cộng lên, ta có $V' = 0$, $I' = 2I = 0,3$ A. Ở những chỗ không gặp nhau thì $V = 15$ V, $I = 0,15$ A. Ở những chỗ các xung giao nhau thì năng lượng điện chuyển thành năng lượng từ. Các xung giao nhau càng nhiều thì biến đổi năng lượng càng lớn.

3079

Một điện áp có dạng hàm dạng nhảy bậc $V = 0$ đối với $t < 0$, $V = 1$ đối với $t > 0$ được đưa vào một đường truyền cáp điện đồng trục không tổn hao. Ở đầu cuối của đường truyền là hở mạch và một tín hiệu cần thời gian là 10 μs để đi qua đường truyền này.

(a) Hãy tính điện áp theo thời gian đối với $t = 0$ đến 100 μs ở đầu mạch hở.

(b) Cũng hỏi như trên đối với xung vào $V = 1$ đối với $0 \le t \le 40$ μs, $V = 0$ ở các thời gian khác.

(Columbia)

Lời giải:

Giả thiết đầu vào có phối hợp trở kháng, thì hệ số phản xạ là

$$K = \begin{cases} 0 & \text{tại đầu vào,} \\ 1 & \text{tại đầu mạch hở.} \end{cases}$$

Tại đầu mạch hở

$$V(t) = V_i(t-10) + KV_i(t-10) = 2V_i(t-10)\ .$$

(a) Vì

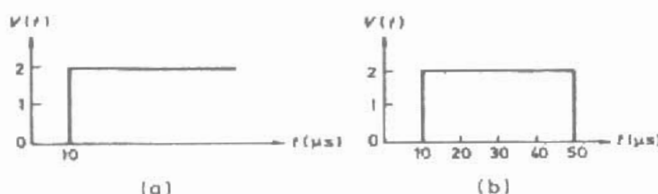
$$\begin{aligned} V_i(t-10) &= 0 \text{ với } \quad t < 10\ \mu\text{s}\,, \\ &= 1\ \text{V với} \quad t > 10\ \mu\text{s}\,, \end{aligned}$$

đồ thị của V(t) được biểu diễn trên hình 3.75 (a)

(b) Vì

$$\begin{aligned} V_i(t-10) &= 0 \quad \text{với} \quad t < 10\ \mu\text{s}\,, \\ &= 1\ \text{V} \quad \text{với} \quad 10 \le t \le 50\ \mu\text{s}\,, \\ &= 0 \quad \text{với} \quad t > 50\ \mu\text{s}\,, \end{aligned}$$

đồ thị của $V(t)$ được biểu diễn trên hình 3.75(b)



Hình 3.75

3080

Trên hình 3.76(a) tranzitor tại A bình thường là BẬT (on) nên điện thế tại A thường là rất gần với 0 V. Hãy miêu tả và giải thích xem bạn có thể thấy gì trên máy dao động kí tại các điểm A và B nếu tranzitor bị TẮT (off) trong khoảng thời gian < 1 ns. (Giả thiết rằng nguồn 5 V có một trở kháng xoay chiều thấp so với đất).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Các sơ đồ bố trí trong hình 3.76(a) và (b) là tương đương nên ở đầu vào $Z_s = 80\ \Omega$, $V_s = 4$ V. Các hệ số phản xạ tại hai đầu là

$$K_{\rm B} = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = \frac{80 - 240}{80 + 240} = -0,5\,,$$

$$K_{\rm A\,ON} = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} \approx \frac{0 - 240}{0 + 240} = -1\,,$$

$$K_{\rm A\,OFF} = \frac{\infty - 240}{\infty + 240} = 1\,.$$

Lấy $t = 0$ tại thời điểm tranzitor TẮT. Khi tranzitor bật, thì điện áp ở B do nguồn cung cấp sẽ là

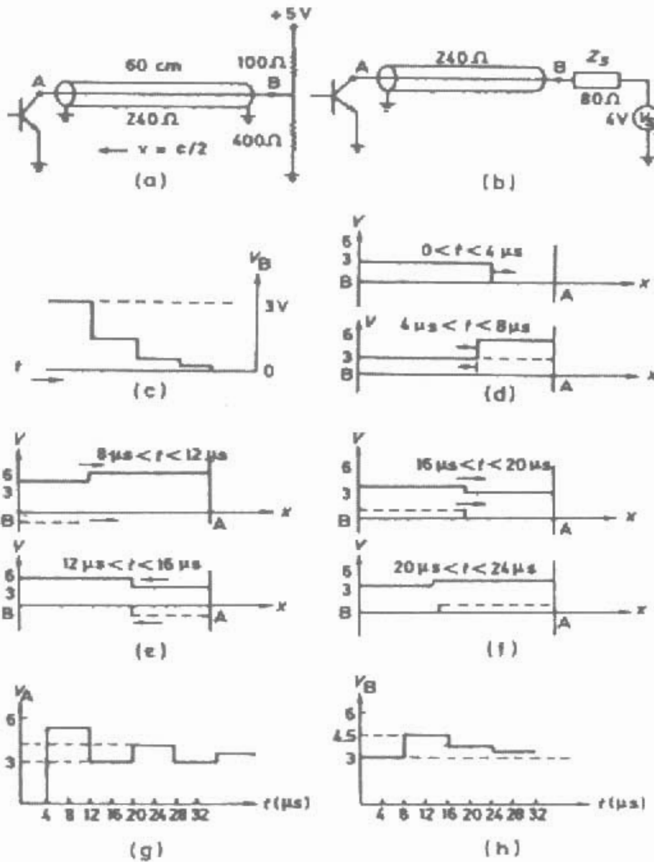
$$4 \times \frac{240}{240 + 80} = 3\ {\rm V}\,.$$

Do có sự phản xạ tại A,

$$V_{\rm B}(0^-) = 3 - 3 = 0\,.$$

Ta cũng có $V_{\rm A}(0^-) = 0$. Dạng sóng ở $t < 0$ như được biểu diễn trên hình 3.76(c)

Khi $t > 0$, tranzitor tắt và mạch bị hở tại điểm A. Ngay tại thời điểm đó $K_{\rm A\,OFF} = 1$, $V_{\rm B}(O^+) = 3$ V. Điều này tương đương với việc đưa vào một xung nhảy bậc 3 V qua điểm B tại $t = 0$. Sau đó các dạng sóng điện áp như trong



Hình 3.76

các hình (d)-(f), ở đó sự truyền qua một chiều sẽ mất 4 μs, các đường đứt nét là chỉ các sóng phản xạ và các đường liền nét chỉ tổng các sóng truyền đi và sóng phản xạ. Do đó, khi nhìn trên dao động kí, các dạng sóng của điện áp này ở các điểm A và B có các dạng như trong các hình (g) và (h).

3081

(a) Để làm một "bộ khuếch đại nhạy với điện tích", người ta có thể mắc một tụ điện qua một bộ khuếch đại đảo lý tưởng như trên hình 3.77(a).

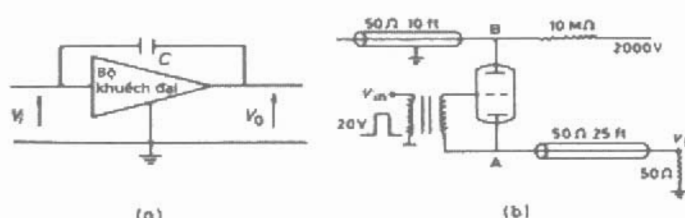
Kí hiệu tam giác biểu diễn một bộ khuếch đại đảo lý tưởng với các đặc trưng sau: trở kháng vào $\gg 1$, trở kháng ra $\ll 1$, hệ số khuếch đại $\gg 1$, và

điện áp ra V_{out} = −(hệ số khuếch đại G) × (điện áp vào V_{in}). Hãy tính điện áp ra như là một hàm của điện tích vào.

(b) Khi nối thiết bị điện tử với nhau để xử lý các tín hiệu điện xung ngắn trong thực tế người ta thường sử dụng cáp đồng trục được kết thúc với trở kháng đặc trưng của nó. Vì lý do gì người ta cần phải kết thúc đầu vào, đầu ra hay cả hai đầu của cáp đồng trục như vậy?

c) Mạch điện trong hình 3.77(b) được sử dụng để tạo ra một xung ngắn, điện áp cao. Nó làm việc như thế nào? Hình dạng, biên độ và thời gian của xung ra là thế nào?

(*Princeton*)



Hình 3.77

Lời giải:

(a) Do

$$V_0 = -GV_i\,, \qquad C(V_i - V_0) = Q\,,$$

Ta có

$$V_0 = -\frac{G}{1+G}\cdot\frac{Q}{C} \approx -\frac{Q}{C}\,,$$

vì $G \gg 1$.

(b) Gọi Z_0 và Z_l lần lượt là các trở kháng đặc trưng và trở kháng tải. Khi đó hệ số phản xạ là

$$\rho = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}\,.$$

Sự phản xạ như vậy thường xảy ra ở cuối của đường trễ trừ khi $\rho = 0$, tức là, $Z_0 = Z_l$, và đường này được gọi là có phối hợp trở kháng. Để tín hiệu không bị ảnh hưởng bởi sự phản xạ, các đầu của đường truyền này đều phải có sự phối hợp trở kháng.

(c) Khi một xung dương được đưa vào đầu vào V_{in}, thyratron sẽ dẫn và điện thế ở điểm A sẽ giống như ở điểm B cho nên sinh ra một sự sụt thế là

2000 V. Điều này sẽ tạo ra một xung cao áp âm V_0 ở đầu ra. Độ rộng của xung được xác định bằng đường trễ ở phía trên hở mạch, sẽ là

$$t_w = 2\tau = \frac{2 \times 10 \times 30,48}{3 \times 10^{10}} \approx 20\ \mu\text{s} .$$

Biên độ của xung ra được xác định bởi sự sụt thế qua điện trở phối hợp của đường trễ phía dưới, sẽ là

$$\frac{2000 \times 50}{50 + 50} = 1000\ \text{V} .$$

3082

Không phải tất cả các hạt pion được sinh ra khi các proton đập vào bia tại Fermilab đều chuyển động song song với chùm proton ban đầu. Một thiết bị hội tụ, được gọi là "horn" (thực tế thì người ta dùng hai cái như vậy tạo thành một cặp) được sử dụng để làm lệch hướng đi của pion, làm cho chúng chuyển động gần hơn tới hướng của chùm proton. Thiết bị này (hình 3.78(a)) gồm một vật dẫn điện hình trụ ở bên trong, dọc theo đó dòng điện chạy theo một chiều và một vật dẫn điện hình trụ bên ngoài, dọc theo đó dòng điện chạy ngược trở lại. Giữa hai mặt trụ này sinh ra một từ trường hình xuyến làm lệch hướng các meson đi qua vùng này.

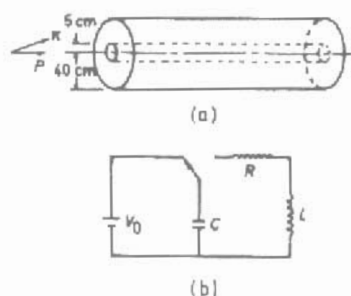
(a) Trước tiên hãy sử dụng các kích thước trong hình vẽ để tính độ tự cảm gần đúng của horn này. Dòng của các pion tích điện và của các proton là không đáng kể so với dòng điện trong các vật dẫn.

(b) Dòng điện trên được cung cấp bởi một bộ tụ điện ($C = 2400\ \mu$F). Tụ điện này phóng điện (ở thời điểm thích hợp trước khi xung của các proton đập vào bia) vào đường truyền nối hai horn này. Độ tự cảm tổng cộng của cả hai horn và đường truyền là $3,8 \times 10^{-6}$ H như trong hình 3.78(b). Trong mạch này điện áp của tụ điện là $V_0 = 14$ kV và điện trở là $R = 8,5 \times 10^{-3}\ \Omega$. Phải mất bao nhiêu giây sau khi công tắc bật thì dòng mới đạt giá trị cực đại của nó?

(c) Dòng cực đại là bao nhiêu ampe?

(d) Tại thời điểm này, giá trị của từ trường tại vị trí cách trục 15 cm là bao nhiêu?

(e) Một meson 100 GeV/c sẽ lệch đi một góc là bao nhiêu nếu nó vượt qua hai mét trong từ trường của một horn tại chính chỗ gần cách trục 15 cm?



Hình 3.78

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Cảm ứng từ tại một điểm giữa hai mặt trục và cách trục một khoảng r từ trục có hướng $\mathbf{e}_\theta$ và có độ lớn là

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ,$$

I là dòng điện ở vật dẫn bên trong. Từ thông đi qua một tiết diện dọc trên một đơn vị chiều dài của horn là

$$\phi = 2\int_{0,05}^{0,4} B dr \approx \frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{0,05}^{0,4} \frac{1}{r} dr = 8,3 \times 10^{-7} \cdot I .$$

Như vậy độ tự cảm gần đúng bằng

$$L = \frac{\phi}{I} \approx 8,3 \times 10^{-7} \text{ H} .$$

(b) Gọi dòng của mạch vòng RCL là $I(t)$. Ta có

$$u_C + u_L + u_R = 0$$

với

$$I = C\frac{du_C}{dt} , \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} , \quad u_L = L\frac{dI}{dt} = LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} ,$$

nghĩa là

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 ,$$

và điều kiện ban đầu

$$u_C(0) = V_0 \ .$$

Để giải phương trình này đối với u_C, giả sử $u_C = u_0 e^{-i\omega t}$. Thay vào phương trình trên ta được

$$\omega = -i\alpha \pm \omega_d \ ,$$

trong đó $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ với

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ ,$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \ .$$

Do đó

$$u_C = u_0 e^{-\alpha t \pm i\omega_d t} \ ,$$

hay

$$I = C u_0 (-\alpha \pm i\omega_d) e^{-\alpha t \pm i\omega_d t} \ .$$

Với các dữ liệu đã cho, ta có

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1,118 \times 10^3 \ \mathrm{s}^{-1} \ ,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,047 \times 10^5 \ \mathrm{s}^{-1} \ ,$$

Vì vậy $\omega_0 \gg \alpha$ và $\omega_d \approx \omega_0$. Như vậy dòng trong mạch vòng RLC là

$$\begin{aligned} I(t) &\approx \mathrm{Re}[\mp i C\omega_0 V_0 e^{-\alpha t} e^{\pm i\omega_0 t}] \\ &= -C\omega_0 V_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) \\ &= -3,52 \times 10^6 e^{-1118t} \sin(1,047 \times 10^5 t) \ . \end{aligned}$$

Để cho $I(t)$ cực đại, cần

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \ ,$$

nghĩa là

$$\tan(\omega_0 t) \approx \omega_0 t = \frac{\omega_0}{\alpha} \ ,$$

từ đó, tính được

$$t = \frac{1}{\alpha} \ .$$

Vì vậy dòng là cực đại tại thời điểm $t = 8,94 \times 10^{-4}$ s.

(c)

$$I_{\max} = 3,52 \times 10^6 e^{-1118\times 8,94\times 10^{-4}} \sin(1,047 \times 10^5 \times 8,94 \times 10^{-4})$$
$$= 1,29 \times 10^6 \text{ A} .$$

(d) Tại $r = 15$ cm, ta có

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1,29 \times 10^6}{2\pi \times 0,15} = 1,72 \text{ Wbm}^{-2} .$$

(e) Vì $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 100$ GeV/c, ta có

$$\frac{m_0 vc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 10^{11} \text{ eV} \gg m_0c^2 = 1,4 \times 10^8 \text{ eV}$$

đối với meson nên ta có thể lấy vận tốc của nó là

$$v \approx c .$$

Lực làm lệch hướng là

$$F = eBv = 1,6 \times 10^{-19} \times 0,41 \times 3 \times 10^8 = 2,0 \times 10^{-11} \text{ N} ,$$

Do vậy khoảng cách đã đi lệch là

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{1}{c}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2,0 \times 10^{-11}}{100 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}/c^2} \cdot \frac{4}{c^2} = 0,0025 \text{ m}$$
$$= 2,5 \text{ mm} .$$

Góc lệch là

$$\theta = \arctan\left(\frac{0,0025}{2}\right) = 0,0013 \text{ rad} .$$

6. CÁC BÀI TẬP KHÁC (3083–3090)

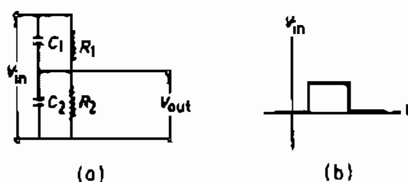
3083

Xét mạch trong hình 3.79(a).

(a) Khi $V_{in} = \text{Re}\{V_0 e^{i\omega t}\}$, hãy tìm biểu thức cho V_{out}.

(b) Trong điều kiện nào thì tỉ số V_{out}/V_{in} không phụ thuộc vào ω?

(c) Nếu V_{in} chỉ gồm một xung "chữ nhật" như trong hình 3.79 (b), hãy vẽ V_{out} (như một hàm của t) khi điều kiện đã nêu trong (b) được thỏa mãn.



Hình 3.79

(d) Cho một xung "chữ nhật" V_{in} ở lối vào như ở trong (c), hãy vẽ $V_{out}(t)$ khi điều kiện đã nêu trong (b) là không được thỏa mãn.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Theo định lý Thévenin, ta có thể dùng hai mạch tương đương để thay thế các mạng điện dung và điện trở ở trong các hình 3.80(a) và (b). Nối các đầu ra của chúng với nhau ta được một mạch tương đương toàn phần như trên hình 3.80(c) hoặc hình 3.80(d).

Đối với mạch 3.80(d), khi sử dụng định luật Kirchhoff ta có

$$I\left[\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{1}{j\omega(C_1+C_2)}\right] = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{C_1}{C_1+C_2}\right]V_{in} \, ,$$

suy ra

$$I = \frac{j\omega[R_2(C_1+C_2) - C_1(R_1+R_2)]}{R_1+R_2+j\omega(C_1+C_2)R_1R_2} V_{in} \, .$$

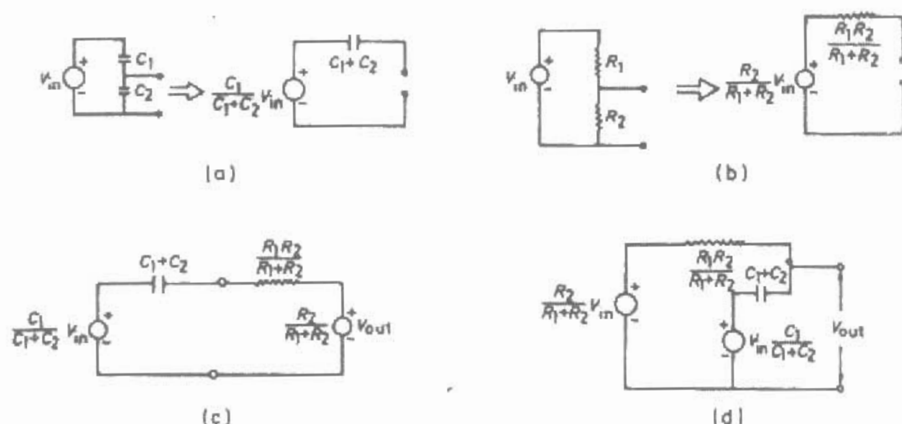
Điện áp ra là

$$V_{out} = \frac{I}{j\omega(C_1+C_2)} + \frac{C_1}{C_1+C_2} V_{in} \, ,$$

vì vậy ta có tỉ số

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{R_2(C_1 + C_2) - C_1(R_1 + R_2)}{(C_1 + C_2)[R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2(C_1 + C_2)]} ,$$

cho phép biểu diễn V_{out} qua V_{in}.



Hình 3.80

(b) Trong mạch tương đương ở hình 3.80(d), nếu hai nguồn điện áp là như nhau, thì sẽ không có dòng chạy qua, tức là $I = 0$, suy ra

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} ,$$

hay $R_1C_1 = R_2C_2$. Lúc đó

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Tỉ số này không phụ thuộc vào ω. Vì vậy $R_1C_1 = R_2C_2$ là điều kiện cần thiết để $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$ không phụ thuộc vào ω.

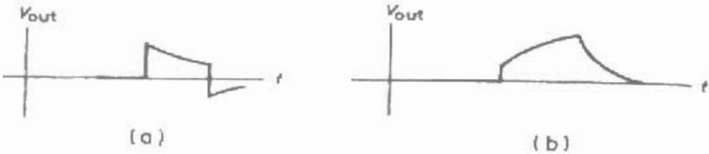
(c) Khi $R_1C_1 = R_2C_2$ được thỏa mãn, $V_{\text{out}} = \frac{C_1}{C_1+C_2} V_{\text{in}}$ cho tất cả các tần số. Điều này được thể hiện trong hình 3.81.

(d) Khi điều kiện nêu trong (b) không được thỏa mãn $\frac{C_1}{C_1+C_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{C_1R_1 - C_2R_2}{(C_1+C_2)(R_1+R_2)}$. Trước tiên hãy xét trường hợp $R_1C_1 > R_2C_2$. Sự suy giảm



Hình 3.81

trong bộ chia điện áp tụ điện là ít hơn trong bộ chia điện áp điện trở. Vì vậy khi xung chữ nhật đi qua mạch này, trường hợp đầu (bộ chia điện áp tụ điện) được ưu tiên lựa chọn ngay, sau đó đầu ra sẽ hồi phục tới giá trị cho bởi trường hợp sau (trường hợp bộ chia điện áp điện trở). Sự thay đổi của V_{out} theo t được chỉ ra trên hình 3.82(a). Đối với trường hợp $R_1C_1 < R_2C_2$, phân tích tương tự sẽ cho kết quả như đã chỉ ra trên hình 3.82(b).



Hình 3.82

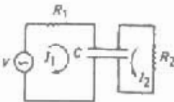
3084

Một mạch điện gồm hai điện trở (R_1 và R_2), một tụ điện (điện dung C) và một nguồn điện áp V có thể thay đổi nối với nhau như trong hình 3.83.

(a) Khi $V(t) = V_0 \cos \omega t$, biên độ của sự sụt thế qua R_1 là bao nhiêu?

(b) Khi $V(t)$ là một xung rất nhọn tại $t = 0$, ta lấy gần đúng $V(t) = A\delta(t)$. Sự sụt thế qua R_1 theo thời gian là như thế nào?

(CUSPEA)



Hình 3.83

Lời giải:

(a) Cho điện áp phức là

$$\widetilde{V} = V_0 e^{-i\omega t} .$$

Các phương trình Kirchhoff cho các mạch 1 và 2 lần lượt là

$$\widetilde{V} = \tilde{I}_1 R_1 + \frac{1}{i\omega C}(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) , \tag{1}$$

$$O = \tilde{I}_2 R_2 + \frac{1}{i\omega C}(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) . \tag{2}$$

Phương trình (2) cho

$$\left(R_2 - \frac{i}{\omega C}\right)\tilde{I}_2 = \frac{i}{\omega C}\tilde{I}_1 .$$

Thay thế vào (1) ta được

$$\tilde{I}_1 = \frac{(R_2 - \frac{i}{\omega C})}{R_1 R_2 - \frac{i}{\omega C}(R_1 + R_2)}\widetilde{V} .$$

Sụt thế trên điện trở R_1 là

$$\widetilde{V}_1 = \tilde{I}_1 R_1 = \frac{R_1(R_2 - \frac{i}{\omega C})}{R_1 R_2 - \frac{i}{\omega C}(R_1 + R_2)}\widetilde{V} ,$$

nên sụt thế thực trên R_1 là

$$V_1 = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{(\omega R_1 R_2 C)^2 + (R_1 + R_2)^2}} R_1 V_0 \cos(\omega t + \varphi) ,$$

trong đó

$$\varphi = \arctan\left[\frac{\omega C R_2^2}{R_1 R_2\, {}^2\omega^2 C^2 + (R_1 + R_2)}\right] .$$

(b) Khi $V(t) = A\delta(t)$, ta dùng biểu thức sau

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

và viết sụt thế qua R_1 như là

$$V_1 = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_1(R_2 - \frac{i}{\omega C})}{R_1 R_2 - \frac{i}{\omega C}(R_1 + R_2)} e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \frac{i}{R_2 C})}{(\omega - \omega_1)} e^{i\omega t} d\omega ,$$

trong đó $\omega_1 = i\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}$. Tích phân này có một cực điểm tại $\omega = \omega_1$ (khi đó mẫu số bằng 0). Sử dụng định lý thặng dư ta tìm nghiệm $V_1 \propto \exp(i\omega_1 t) - \exp(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t)$. Do đó V_1 là bằng không đối với $t < 0$ và

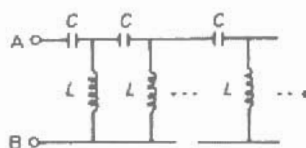
$$V_1 \propto \exp\left(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t\right)$$

đối với $t > 0$.

3085

Một mạng điện bán vô hạn được tạo bởi các tụ điện C và các cuộn cảm L như trong hình 3.84. Mạch điện này bắt đầu từ bên trái tại các điểm A và B; nó kéo dài vô hạn về bên phải. Một điện áp xoay chiều $V_0\cos\omega t$ được đưa vào qua các điểm A và B và nó tạo ra 1 dòng điện chạy qua mạng này. Hãy tính công suất P, trung bình trên 1 chu kì, tức là công suất đã được cung cấp vào mạch điện. Câu trả lời về mặt định lượng sẽ là khác nhau đối với $\omega > \omega_0$, $\omega < \omega_0$, trong đó ω_0 là một tần số tới hạn được tạo ra từ C và L.

(*CUSPEA*)



Hình 3.84

Lời giải:

Vì điện áp đặt vào là hình sin, nên thế và dòng lần lượt là

$$\tilde{V} = V_0e^{i\omega t}, \qquad \tilde{I} = I_0e^{i\omega t}.$$

Công suất trung bình trong một chu kì là

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{V}^*\tilde{I}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{V}^*\tilde{V}}{Z}\right) = \frac{V_0^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right),$$

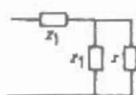
trong đó, dấu sao * chỉ phép liên hợp phức và Z là trở kháng của mạch, $Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$. Đặt $Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$, $Z_2 - i\omega L$, và giả thiết rằng bất kì sự hỗ cảm nào đều là không

đáng kể. Nếu Z là tổng trở của mạng, hãy xét mạch tương đương như trong hình 3.85, mà tổng trở của nó vẫn là Z. Như vậy

$$Z = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}} = Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z + Z_2} ;$$

hay

$$Z^2 - Z_1 Z - Z_1 Z_2 = 0 .$$



Hình 3.85

Vì $Z > 0$, phương trình này chỉ có một nghiệm

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2}$$

Với $\frac{1}{2\sqrt{LC}} = \omega_0$ nghiệm số này trở thành

$$Z = \frac{1}{2i\omega C}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) .$$

Đối với $\omega < \omega_0$, $\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ là số thực do vậy $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = 0$, tức là $\overline{P} = 0$.

Với $\omega > \omega_0$, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}$ và

$$\overline{P} = \frac{V_0^2}{4\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} .$$

3086

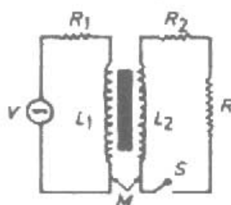
Trong mạch điện ở hình 3.86, L_1, L_2, và M là các độ tự cảm và độ hỗ cảm của các cuộn trong biến thế, R_1 và R_2 là các điện trở của các cuộn, S là công tắc và R là một điện trở tải trong mạch thứ cấp. Điện áp vào là $V = V_0 \sin \omega t$.

(a) Hãy tính biên độ của dòng trong cuộn sơ cấp khi công tắc S là mở.

(b) Hãy tính biên độ của dòng qua R đã được xác lập ổn định khi S đóng.

(c) Đối với một biến áp lý tưởng $R_1 = R_2 = 0$, và M, L_1, L_2 có quan hệ đơn giản với các số vòng N_1, N_2, trong các cuộn sơ cấp và thứ cấp của biến áp. Đặt các hệ thức này vào (b), hãy chứng tỏ rằng các kết quả của (b) được quy về hệ thức như đã trông đợi từ tỉ số các vòng dây N_2/N_1 của biến thế.

(*CUSPEA*)



Hình 3.86

Lời giải:

(a) Khi S mở, ta có

$$I_2 = 0, \quad I_1 = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} .$$

(b) Khi S đóng ta có các phương trình của mạch điện

$$V = I_1 R_1 + L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + M \frac{\partial I_2}{\partial t}$$
$$0 = I_2(R_2 + R) + L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + M \frac{\partial I_1}{\partial t} .$$

Vì $V = V_0 \sin \omega t$, hãy đặt

$$V = V_0 e^{-i\omega t}, \quad I_1 = I_{10} e^{-i\omega t}, \quad I_2 = I_{20} e^{-i\omega t} .$$

Các phương trình của mạch điện sẽ trở thành

$$V = I_1(R_1 - i\omega L_1) - i\omega M I_2 ,$$
$$0 = -i\omega M I_1 + I_2[(R_2 + R) - i\omega L_2] .$$

Định nghĩa

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 - i\omega L_1 & -i\omega M \\ -i\omega M & (R_2 + R) - i\omega L_2 \end{vmatrix}$$
$$= R_1(R_2 + R) + \omega^2(M^2 - L_1 L_2) - i\omega[L_1(R_2 + R) + L_2 R_1] ,$$

ta có

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 - i\omega L_1 & V \\ -i\omega M & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{i\omega M V}{\Delta} ,$$

và

$$I_{20} = \frac{\omega M V_0}{\sqrt{[\omega L_1(R + R_2) + \omega L_2 R_1]^2 + [\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + R_1(R_2 + R)]^2}} .$$

(c) Nếu biến thế là lý tưởng, $R_1 = R_2 = 0$, $M^2 = L_1 L_2$, và ta có

$$I_2 = \frac{\omega M V_0}{\omega L_1 R} = \frac{M V_0}{L_1 R} .$$

Khi đó, vì $M \sim N_2 N_1$, $L \sim N_1^2$, ta thu được

$$I_2 = \frac{N_2}{N_1} \frac{V_0}{R} .$$

Đây chính là điều đã trông đợi, nghĩa là biến thế lý tưởng sẽ biến đổi điện áp V_0 thành điện áp $\frac{N_2}{N_1} V_0$.

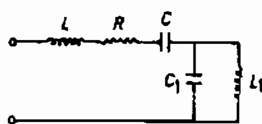
3087

Xét mạch điện trong hình 3.87

(a) Hãy tìm trở kháng của mạch với điện áp V có tần số ω được đặt vào hai đầu cuối.

(b) Nếu người ta thay đổi tần số nhưng không thay đổi biên độ của V, thì dòng cực đại là bao nhiêu? Dòng thấp nhất là bao nhiêu? Sẽ quan sát thấy dòng thấp nhất ở tần số nào?

(UC, Berkeley)



Hình 3.87

Lời giải:

(a) Trở kháng được cho bởi biểu thức sau

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\omega L_1}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1} \\ &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}\right) . \end{aligned}$$

(b) Biểu thức dòng phức là

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1})} .$$

Do vậy, biên độ của nó sẽ là

$$I_0 = \frac{V_0}{[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1})^2]^{1/2}} ,$$

trong đó, V_0 là biên độ của điện áp vào. Tính toán cho thấy

$$(I_0)_{\max} = \frac{V_0}{R} , \qquad (I_0)_{\min} = 0 .$$

Khi I_0 là cực tiểu, tức là, $I_0 = 0$,

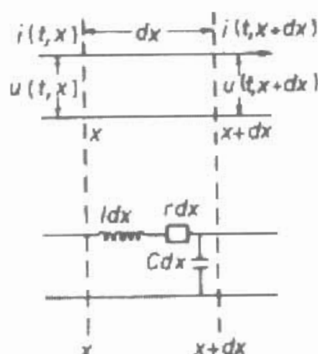
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} = \infty .$$

Các nghiệm của phương trình này là $\omega = 0$, $\omega = \infty$, và $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$. Loại bỏ 2 nghiệm đầu, ta có $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ để thu được dòng tối thiểu.

3088

Trong hình 3.88 một đường truyền dây đơn đường dây điện tín mang một dòng có tần số góc ω. Giả thiết đất là vật dẫn lý tưởng, nó được dùng như dây quay lại. Nếu dây này có điện trở trên một đơn vị độ dài là r, độ tư cảm trên một đơn vị độ dài là l, và điện dung so với đất trên một đơn vị độ dài là C, hãy tìm điện áp và dòng điện như là hàm của độ dài đường truyền.

(*UC, Berkeley*)



Hình 3.88

Lời giải:

Lấy điểm gốc tại điểm xuất phát của dây dẫn và hướng của nó là hướng của trục x. Giả thiết rằng biên độ điện áp tại điểm xuất phát của nó là V_0. Xét một đoạn x tới $x + dx$, theo định luật Kirchhoff ta có

$$u(t,x) = u(t,x+dx) + ldx\,\frac{\partial i(t,x)}{\partial t} + ri(t,x)dx\,,$$

$$i(t,x) = i(t,x+dx) + Cdx\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,,$$

nghĩa là

$$\frac{-\partial u}{\partial x} = l\,\frac{\partial i}{\partial t} + ri\,, \qquad \frac{-\partial i}{\partial x} = C\,\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Giả thiết rằng nghiệm có dạng $e^{-j(\omega t - Kx)}$, thì

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim -j\omega\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \sim jK\,,$$

và các phương trình trên trở thành

$$i(r - j\omega l) + jKu = 0\,,$$
$$i(jK) - j\omega Cu = 0\ .$$

Điều kiện để hệ các phương trình này có nghiệm khác không là

$$\begin{vmatrix} r - j\omega l & jK \\ jK & -j\omega C \end{vmatrix} = -j\omega C(r - j\omega l) + K^2 = 0\ ,$$

suy ra

$$K = \sqrt{\omega^2 lC + j\omega Cr}\ .$$

Đặt $K = \alpha + j\beta$, thì

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 lC\,,$$
$$2\alpha\beta = \omega Cr\ ,$$

và ta có

$$u = V_0 e^{-\beta x} e^{j(\alpha x - \omega t)}$$
$$i = \frac{\omega C}{K} u = \frac{\omega C V_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\beta x} e^{j(\alpha x - \omega t + \varphi)}\ ,$$

trong đó ta đã sử dụng điều kiện $u = V_0$ khi $x = t = 0$, và φ được cho bởi

$$\tan\varphi = \frac{\beta}{\alpha}\ .$$

Các biểu thức này có thể được rút gọn nếu

$$r \ll \omega l\ ,$$

khi đó ta có

$$K = \omega\sqrt{lC}\left(1 + j\frac{r}{\omega l}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega\sqrt{lC} + j\frac{r}{2}\sqrt{\frac{C}{l}}\ .$$

Theo cách trên, ta có

$$u = V_0 \exp[j\omega(\sqrt{lC}x - t)] \exp\left(\frac{-r}{2}\sqrt{\frac{C}{l}}\,x\right)\ ,$$

$$i = \frac{\omega C}{K} u \approx \sqrt{\frac{C}{l}} V_0 \exp\left[-j\omega(\sqrt{lC}x - t)\right] \exp\left(-\frac{r}{2}\sqrt{\frac{C}{l}}\,x\right)\ .$$

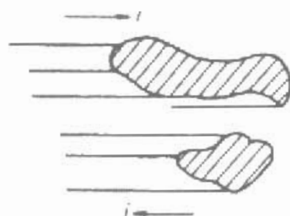
3089

Xét hai vật dẫn lý tưởng song song bất kì nhưng có tiết diện không đổi (hình 3.89). Một dòng điện chạy qua một vật dẫn và quay trở lại qua vật dẫn kia. Hãy chứng minh rằng tích của độ tụ cảm trên đơn vị độ dài, L, và điện dung trên đơn vị độ dài, C, là (trong hệ đơn vị CGS)

$$LC = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} ,$$

trong đó μ và ε là độ từ thẩm và hằng số điện môi của môi trường xung quanh các vật dẫn và c là tốc độ của ánh sáng trong chân không.

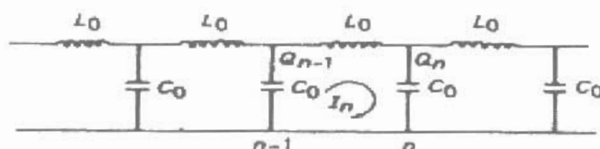
(Columbia)



Hình 3.89

Lời giải:

Các vật dẫn này tạo ra một đường truyền tương đương với mạch trên hình 3.90



Hình 3.90

Hãy xét đoạn thứ n của mạch này. Áp dụng các phương trình sau

$$-L_0\frac{dI_n}{dt} = \frac{Q_n}{C_0} - \frac{Q_{n-1}}{C_0} ,$$

$$I_{n-1} + \frac{dQ_{n-1}}{dt} = I_n ,$$

$$I_n + \frac{dQ_n}{dt} = I_{n+1} ;$$

suy ra

$$-L_0\frac{d^2I_n}{dt^2} = \frac{1}{C_0}\frac{d}{dt}(Q_n - Q_{n-1}) = \frac{1}{C_0}(I_{n+1} - I_n) - \frac{1}{C_0}(I_n - I_{n-1}) \ ,$$

hay

$$L_0C_0\frac{d^2I_n}{dt^2} = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1} \ .$$

Đặt $I_n = A_0\cos(Kna - \omega t)$, trong đó $K = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$, thì phương trình trên cho

$$L_0C_0\omega^2 + 2 = -2\cos(Ka) \ ,$$

hay

$$L_0C_0\omega^2 = 4\sin^2\frac{Ka}{2} \ .$$

Trong giới hạn tần số thấp của $a \to 0$, $\sin(Ka/2) \sim \frac{Ka}{2}$ và ta có

$$L_0C_0\omega^2 = K^2a^2 \ .$$

Vì $\frac{\omega^2}{K^2} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon}$, nên $\frac{L_0C_0}{a^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}$. Trong phương trình này L_0/a và C_0/a lần lượt là độ tự cảm và điện dung trên đơn vị độ dài của đường truyền. Thay chúng bằng L và C, ta thu được

$$LC = \mu\varepsilon/c^2 \ .$$

3090

Hai mạch điện, mỗi mạch có một cuộn dây (xôlênôit) với độ dài l, bán kính ρ ($\rho \ll l$), tổng số vòng là N. Các cuộn dây này đồng trục, cách nhau một khoảng là d ($d \gg l$). Điện trở của mỗi mạch là R. Những ảnh hưởng cảm ứng khác ngoài những thứ liên quan đến các cuộn dây này là không đáng kể.

(a) Hãy tính độ tự cảm và độ hỗ cảm của các mạch điện này. Hãy chỉ ra các đơn vị thích hợp.

(b) Dùng L và M với các giá trị đã tìm được trong (a). Hãy tính độ lớn và pha của dòng điện chạy trong mạch thứ hai nếu có một suất điện động xoay chiều với biên độ V, tần số góc ω được đưa vào mạch thứ nhất. Giả thiết ω không quá lớn.

(c) ω có thể tăng đến bậc độ lớn như thế nào trước khi tính toán của bạn trong (b) không còn đúng nữa?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vì $l \gg \rho$, cảm ứng từ ở bên trong cuộn dây là

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

và có hướng dọc theo trục của cuộn dây. Từ thông đi qua cuộn dây là

$$\Psi = NBS = N \cdot \mu_0 \frac{NI}{l} \cdot \pi\rho^2 = \frac{\mu_0 N^2 I \pi \rho^2}{l} ,$$

do vậy độ tự cảm là

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\pi \mu_0 N^2 \rho^2}{l} .$$

Vì $d \gg l$, từ trường được tạo ra bởi một cuộn dây tại vị trí của cuộn dây kia có thể được coi gần đúng như từ trường được sinh ra bởi một từ. Vì hai cuộn dây là đồng trục, nên có thể biểu thị trường này như $B_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{d^3}$ với $m = NI\pi\rho^2$, tức là

$$B_M = \frac{\mu_0 N I \rho^2}{2d^3} .$$

Vì thế

$$\Psi_M = NB_M S = N \frac{\mu_0 N I \rho^2}{2d^3} \pi\rho^2 = \frac{\mu_0 N^2 \rho^2 \pi \rho^2 I}{2d^3} ,$$

suy ra độ hỗ cảm là

$$M = \frac{\Psi_M}{I} = \frac{\pi \mu_0 N^2 \rho^4}{2d^3} .$$

Các đơn vị của L và M là H = A· s/V.

(b) Giả sử suất điện động trong mạch thứ nhất là $\varepsilon = V \cos\omega t = \mathrm{Re}\,(Ve^{j\omega t})$. Khi đó đối với hai mạch này ta có thể viết

$$L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + I_1 R = Ve^{j\omega t} ,$$

$$L \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + I_2 R = 0 .$$

Vì $I_1, I_2 \sim e^{j\omega t}$, ta có $\frac{d}{dt} \to j\omega$ và các phương trình trên trở thành

$$j\omega L I_1 + j\omega M I_2 + I_1 R = Ve^{j\omega t} , \quad (1)$$

$$j\omega L I_2 + j\omega M I_1 + I_2 R = 0 . \quad (2)$$

Lấy (1) ± (2), ta được

$$j\omega L(I_1 + I_2) + j\omega M(I_1 + I_2) + R(I_1 + I_2) = Ve^{j\omega t} ,$$
$$j\omega L(I_1 - I_2) - j\omega M(I_1 - I_2) + R(I_1 - I_2) = Ve^{j\omega t} .$$

Do đó

$$I_1 + I_2 = \frac{Ve^{j\omega t}}{j\omega(L+M)+R}, \qquad I_1 - I_2 = \frac{Ve^{j\omega t}}{j\omega(L-M)+R},$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{V}{j\omega(L+M)+R} - \frac{V}{j\omega(L-M)+R}\right]e^{j\omega t} \\ &= \frac{-j\omega MVe^{j\omega t}}{[j\omega(L+M)+R]\,[j\omega(L-M)+R]} \\ &= \frac{-j\omega MVe^{j\omega t}}{R^2 - \omega^2(L^2-M^2) + 2j\omega LR} . \end{aligned}$$

Khi viết Re $I_2 = I_{20}\cos(\omega t + \varphi_0)$, ta có

$$\begin{aligned} I_{20} &= \frac{\omega MV}{\sqrt{[R^2-\omega^2(L^2-M^2)]^2 + 4\omega^2L^2R^2}} , \\ \varphi_0 &= \pi - \arctan\frac{2\omega LR}{R^2-\omega^2(L^2-M^2)} . \end{aligned}$$

Sử dụng các dữ liệu đã cho và lưu ý rằng $L \gg M$, ta được

$$I_{20} \approx \frac{\omega MV}{R^2 + 2\omega^2L^2} = \frac{\mu_0\pi N^2\rho^4\omega Vl^2}{2d^3[R^2l^2 + 2\omega^2\mu_0^2\pi^2N^4\rho^4]} ,$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\approx \pi - \arctan\frac{2\omega LR}{R^2-\omega^2L^2} \\ &= \pi - \arctan\frac{2\mu_0\pi\omega RN^2\rho^2l}{R^2l^2 - \omega^2\mu_0^2\pi^2N^4\rho^4} . \end{aligned}$$

(c) Tính toán trong phần (b) chỉ phù hợp trong các điều kiện chuẩn dừng. Điều này cần

$$d \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} ,$$

hay

$$\omega \ll \frac{2\pi d}{c} .$$

PHẦN IV

CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ

1. CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ PHẲNG (4001–4009)

4001

Cho điện trường của một sóng điện từ trong chân không là

$$E_x = 0 \,,$$

$$E_y = 30\cos\left(2\pi\times 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right) ,$$

$$E_z = 0 \,,$$

trong đó E được tính bằng vôn/mét, t tính bằng giây, và x được tính bằng mét. Hãy xác định

(a) tần số f,

(b) bước sóng λ,

(c) hướng truyền của sóng,

(d) hướng của từ trường.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

$$k = \frac{2\pi}{3}\ \text{m}^{-1}, \quad \omega = 2\pi\times 10^8\ \text{s}^{-1} \,.$$

(a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 10^8$ Hz.

(b) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 3$ m.

(c) Sóng truyền dọc theo chiều x dương.

(d) Vì **E**, **B**, và **k** tạo ra một tam diện thuận **B** song song với **k** × **E**. Vì **k** và **E** lần lượt theo hướng x và y theo thứ tự, nên từ trường theo hướng z.

4002

Tốc độ của ánh sáng c, ε_0 và μ_0 được liên hệ với nhau bằng biểu thức nào?

(a) $c = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$; (b) $c = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$; (c) $c = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

4003

Hãy xét sóng điện từ trong không gian tự do có dạng

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t},$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \mathbf{B}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t},$$

trong đó $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{B}_0$ nằm trong mặt phẳng xy.

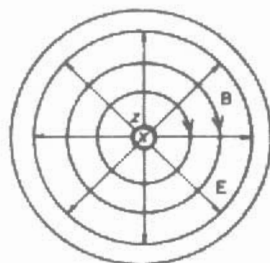
(a) Hãy tìm mối liên hệ giữa k và ω, cũng như mối liên hệ giữa $\mathbf{E}_0(x,y)$ và $\mathbf{B}_0(x,y)$. Hãy chỉ ra rằng $\mathbf{E}_0(x,y)$ và $\mathbf{B}_0(x,y)$ thỏa mãn các phương trình đối với tĩnh điện học và tĩnh từ học trong không gian tự do.

(b) Các điều kiện biên đối với $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ trên bề mặt của một chất dẫn điện lý tưởng là gì?

(c) Xét một sóng có dạng trên lan truyền dọc theo đường truyền cho trên hình 4.1. Giả thiết hình trụ ở giữa và vỏ bọc ngoài là những vật dẫn lý tưởng. Hãy vẽ phác các đường sức của trường điện từ đối với tiết diện cụ thể. Hãy chỉ ra dấu của điện tích và chiều của các dòng điện trong các vật dẫn.

(d) Hãy viết các biểu thức cho $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ qua điện tích trên đơn vị độ dài λ và dòng điện i trong vật dẫn ở giữa.

(SUNY, Buffalo)



Hình 4.1

Lời giải:

(a)

$$\nabla \times \mathbf{E} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & ik \\ E_{0x} & E_{0y} & 0 \end{vmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= \left[-ik\, E_{0y}\mathbf{e}_x + ik\, E_{0x}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \right] e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= \left[ik\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 + \nabla \times \mathbf{E}_0 \right] e^{i(kz-\omega t)} .$$

Ta cũng nhận được một biểu thức tương tự cho $\nabla \times \mathbf{B}$. Do đó các phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

có thể được viết lần lượt dưới dạng sau

$$ik\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0(x, y) = i\omega \mathbf{B}_0(x, y) - \nabla \times \mathbf{E}_0 ,$$

$$ik\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0(x, y) = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_0(x, y) - \nabla \times \mathbf{B}_0 .$$

Chú ý rằng $\nabla \times \mathbf{E}_0$ và $\nabla \times \mathbf{B}_0$ chỉ có thành phần z trong khi đó $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0$ và $\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0$ lại nằm trong mặt phẳng xy, ta đòi hỏi phải thỏa mãn

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0 , \qquad \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 , \tag{1}$$

do vậy

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0(x, y) = \frac{\omega}{k} \mathbf{B}_0(x, y) , \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0(x, y) = -\frac{\omega}{kc^2} \mathbf{E}_0(x, y) . \tag{3}$$

Lấy tích vectơ của $\mathbf{e}_z$ và (2), ta nhận được

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\omega}{k}\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0 .$$

Thay nó vào (3) ta được

$$\frac{\omega^2}{k^2c^2} = 1 ,$$

hay

$$k = \frac{\omega}{c} .$$

Các phương trình (2) và (3) liên quan với $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{B}_0$ và chúng cho thấy rằng $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$, và $\mathbf{e}_z$ là vuông góc với nhau tạo thành một tam diện thuận tay. Hơn nữa, biên độ của chúng có liên hệ với nhau theo biểu thức sau

$$|E_0(x,y)| = \frac{\omega}{k}\,|\mathbf{B}_0(x,y)| = c\,|\mathbf{B}_0(x,y)|\,.$$

Các phương trình Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ cho

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0\,. \tag{4}$$

Các phương trình (1) và (4) chỉ ra rằng $\mathbf{E}_0(x,y)$ và $\mathbf{B}_0(x,y)$ thỏa mãn các phương trình đối với tĩnh điện học và tĩnh từ học trong không gian tự do.

(b) Các điều kiện biên cho bề mặt của một vật dẫn lý tưởng là

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0\,, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0\,,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{I}_l\,, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0\,,$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến hướng ra ngoài bề mặt chất dẫn và $\mathbf{I}_l$ là mật độ dòng tuyến tính (dòng trên đơn vị độ rộng) trên bề mặt vật dẫn.

(c) Đối với một tiết diện cụ thể tại $z = z_0$ và tại một thời điểm cụ thể, $t = t_0$, điện trường là $\mathbf{E}_0(x,y)\exp[i(kz_0 - \omega t_0)]$. Vì $\mathbf{E}_0(x,y)$ thỏa mãn các phương trình tĩnh điện, nên điện trường là giống như ở giữa các bề mặt hình trụ đồng trục tích điện ngược dấu nhau. Do đó các đường sức của $\mathbf{E}_0(x,y)$ hướng theo bán kính đi từ tâm. Cảm ứng từ thỏa mãn (2), tức là

$$\mathbf{B}_0(x,y) = \frac{1}{c}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0(x,y)\,,$$

do vậy các đường sức từ sẽ tạo ra các đường tròn đồng tâm quanh trục hình trụ. Hãy giả thiết tại (z_0, t_0) hình trụ ở giữa mang điện tích dương và vỏ ngoài mang điện tích âm, khi đó $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ có các hướng như đã chỉ trong hình 4.1. Mật độ dòng tuyến tính trên bề mặt vật dẫn trung tâm là $\mathbf{I}_l = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$. Vì $\mathbf{n}$ là hướng từ tâm ra ngoài, dòng trong hình trụ trung tâm là dọc theo hướng $+z$, trong khi đó dòng trong vỏ ngoài là dọc theo chiều $-z$.

Sử dụng các phương trình tích phân Maxwell (Định lý Gauss về thông lượng và định luật Ampe về lưu số) ta có

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathbf{e}_r\,, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\theta\,,$$

các biểu thức này cho điện tích trên đơn vị độ dài λ và dòng I chạy trên vật dẫn trung tâm. Quan hệ giữa $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ cho ta $I = c\lambda$.

4004

Xét một nghiệm khả dĩ của các phương trình Maxwell dưới dạng

$$\mathbf{A}(x,t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \phi(\mathbf{x},t) = 0,$$

trong đó A là thế vectơ và ϕ là thế vô hướng. Ngoài ra, giả thiết $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{K}$ và ω là các hằng số trong không - thời gian. Hãy đưa ra và giải thích những ràng buộc đối với $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{K}$ và ω được áp đặt bởi mỗi phương trình Maxwell dưới đây:

(a) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$ (b) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0;$

(c) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0;$ (d) $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$

(Columbia)

Lời giải:

Trong bài toán này, các phương trình Maxwell đã cho trong hệ đơn vị Gauss, nó cũng sẽ được sử dụng dưới đây. Vì $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp[i(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)]$, ta có $\frac{\partial}{\partial x} = i(K_y z - K_z y)$, $\frac{\partial}{\partial y} = i(K_z x - K_x z)$, $\frac{\partial}{\partial z} = i(K_x y - K_y x)$, hay $\nabla\times = i\mathbf{K}\times$. Do đó trường điện từ sẽ được viết như sau

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{K} \times \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)},$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}.$$

(a) Vì $\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{K} \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{A}_0) e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \equiv 0$, nên không có ràng buộc nào được áp đặt bởi $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

(b) Vì $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\mathbf{K} \times \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} = -\frac{\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{A} + \frac{\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{A} \equiv 0$, nên không có ràng buộc buộc nào được áp đặt bởi phương trình này.

(c) Vì $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = 0$, ta đòi hỏi $\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = 0$.

(d) Vì $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{A}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A} = -(\mathbf{K}\cdot\mathbf{A})\mathbf{K} + K^2\mathbf{A} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A} = (K^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{A} = 0$ ta đòi hỏi $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ hay $K = \pm\frac{\omega}{c}$. Vì vậy các ràng buộc được áp đặt bởi các phương trình Maxwell là

$$K = \omega/c, \quad \text{và} \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Ràng buộc thứ hai có nghĩa K là vuông góc với A. Do đó K vuông góc với E. Vì K cũng vuông góc với B, điều này có nghĩa là nghiệm là một sóng nằm

ngang. Điều ràng buộc thứ nhất cho $\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{K}{\frac{\omega}{c}} = 1$, nó cho thấy rằng sóng này là một sóng điện từ phẳng. Các dấu $\pm$ tương ứng với các hướng truyền là $\pm\mathbf{x}$.

4005

Hãy xét một sóng phẳng với thế vectơ $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_\mu e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, trong đó $\mathbf{a}_\mu$ là một vectơ bốn chiều không đổi. Hơn nữa, giả thiết rằng $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_z$ và hãy chọn một tập hợp (không trực giao) các vectơ cơ sở cho $\mathbf{a}_\mu$

$$\varepsilon^{(1)\mu} = (0,\ 1,\ 0,\ 0)\,,$$
$$\varepsilon^{(2)\mu} = (0,\ 0,\ 1,\ 0)\,,$$
$$\varepsilon^{(L)\mu} = \frac{1}{K}\left(\frac{\omega}{c},\ 0,\ 0,\ K\right) = \frac{1}{K}K^\mu\,,$$
$$\varepsilon^{(B)\mu} = \frac{1}{K}\left(K,\ 0,\ 0,\ -\frac{\omega}{c}\right)\,,$$

trong đó $\varepsilon^\mu = (\varepsilon^0,\ \boldsymbol{\varepsilon})$. Hãy viết

$$a_\mu = a_1\varepsilon^{(1)\mu} + a_2\varepsilon^{(2)\mu} + a_L\varepsilon^{(L)\mu} + a_B\varepsilon^{(B)\mu}\,.$$

Những ràng buộc nào, nếu có, được đặt ra cho a_1, a_2, a_L, a_B từ các biểu thức sau:

(a) $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$,

(b) $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$,

(c) $\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0$,

(d) $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$.

(e) Trong các thông số a_1, a_2, a_L, a_B thông số nào là phụ thuộc dạng chuẩn (gauge)?

(f) Xác định mật độ năng lượng trung bình qua a_1, a_2, a_L, a_B sau khi áp dụng (a) - (d).

(Columbia)

Lời giải:

Ta đã được cho các vectơ bốn chiều

$$K^\mu = (\omega/c,\ 0,\ 0,\ K), \qquad A_\mu = (\varphi,\ A_x,\ A_y,\ A_z)\,.$$

Với $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_z$, $\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = Kz$. Đối với các sóng phẳng ta cũng có $K = \frac{\omega}{c}$. Khi đó với $\mu = 1$, ta có

$$\varphi = \left[a_L \frac{\omega}{Kc} + a_B\left(\frac{K}{K}\right)\right] e^{i(Kz-\omega t)} = (a_L + a_B)\, e^{i(Kz-\omega t)} \,.$$

Một cách tương tự đối với $\mu = 2, 3, 4$, ta có

$$\mathbf{A} = [a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y + (a_L - a_B)\mathbf{e}_z] e^{i(Kz-\omega t)} \,.$$

Do đó

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = iK\mathbf{e}_z \times \mathbf{A} = iK(-a_2\mathbf{e}_x + a_1\mathbf{e}_y) e^{i(Kz-\omega t)} \,,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -iK(a_L + a_B)\mathbf{e}_z e^{i(Kz-\omega t)} + iK\mathbf{A} \\ &= iK(a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y - 2a_B\mathbf{e}_z) e^{i(Kz-\omega t)} \,.\end{aligned}$$

(a) Vì $\nabla\cdot\mathbf{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv 0$, nên nó không đặt một ràng buộc nào.

(b) Vì $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\times\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv 0$ là như nhau, nên nó cũng không đặt ra một ràng buộc nào.

(c) Vì

$$\nabla\times\mathbf{B} = iK\mathbf{e}_z\times\mathbf{B} = K^2(a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y) e^{i(Kz-\omega t)} \,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -iK\mathbf{E} = K^2(a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y - 2a_B\mathbf{e}_z) e^{i(Kz-\omega t)} \,,$$

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

Nó đòi hỏi $a_B = 0$.

(d) Vì

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 2K^2 a_B e^{i(Kz-\omega t)} \,,$$

$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ cũng đòi hỏi $a_B = 0$.

(e) Vì a_1 và a_2 là không tham gia trong phương trình chuẩn (gauge) $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ đối với chuẩn Coulomb và $\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ đối với chuẩn Lorentz, nên a_1, a_2 là không phụ thuộc chuẩn.

(f) Mật độ năng lượng trung bình là

$$U = \frac{1}{16\pi}\left(|E|^2 + |B|^2\right) = \frac{K^2}{8\pi}\left(a_1^2 + a_2^2\right) \,.$$

4006

Một sóng phẳng có tần số góc là ω và số sóng $|\mathbf{K}|$ truyền trong một môi trường không dẫn, bất đẳng hướng, đồng nhất, trung hoà với $\mu = 1$.

(a) Hãy chứng tỏ rằng **H** là trực giao với **E**, **D** và **K**, và rằng **D** và **H** là ngang nhưng **E** thì không.

(b) Giả sử $D_k = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{kl} E_l$, trong đó ε_{kl} là một tenxơ đối xứng thực. Hãy chọn các trục chính của ε_{kl} như là một hệ tọa độ ($D_k = \varepsilon_k E_k$; $k = 1, 2, 3$). Định nghĩa $\mathbf{K} = K\hat{S}$, trong đó các thành phần của vectơ đơn vị $\hat{S}$ dọc theo các trục chính là S_1, S_2, và S_3. Nếu $V = \omega/K$ và $V_j = c/\sqrt{\varepsilon_j}$, hãy chứng tỏ rằng các thành phần của **E** thỏa mãn phương trình

$$S_j \sum_{i=1}^{3} S_i E_i + \left(\frac{V^2}{V_j^2} - 1\right) E_j = 0 \, .$$

Hãy viết ra phương trình đối với vận tốc pha V theo $\hat{S}$ và V_j. Chứng minh rằng phương trình này có hai nghiệm hữu hạn đối với V^2, tương ứng với hai kiểu truyền riêng biệt theo hướng $\hat{S}$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hãy sử dụng hệ đơn vị Gauss.

(a) Các phương trình Maxwell đối với môi trường đã cho là

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \, ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \, .$$

Sóng phẳng này được biểu diễn bởi $\sim e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, nên $\nabla\times \equiv i\mathbf{K}\times$, $\nabla\cdot \equiv iK\cdot$, $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ và các phương trình trên rút gọn thành

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{H} \, ,$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \, ,$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} = 0 \, ,$$

vì $\mu = 1$. Từ đó ta có

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{H} = -\frac{c}{\omega}(\mathbf{K} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} \equiv 0\,, \qquad \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = \frac{c}{\omega}\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \times \mathbf{E} \equiv 0\,.$$

Do đó **K**, **D**, và **H** là vuông góc với nhau, nghĩa là, **D** và **H** là ngang đối với **K**. Nhưng vì $\mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{H}$ nên

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{K}\left(\frac{\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{H} + K^2\mathbf{E}\right) \\ &= \frac{1}{K}\left[-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{D} + K^2\mathbf{E}\right] \neq 0\end{aligned}$$

trừ khi $K^2 = (\frac{\omega}{c})^2$, nghĩa là **E** không cần phải là ngang đối với **K**.

(b) Từ trên ta có

$$\mathbf{K}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) - K^2\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}\,.$$

Vì

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= K(S_1,\, S_2,\, S_3)\,, \\ \mathbf{D} &= (\epsilon_1 E_1,\, \epsilon_2 E_2,\, \epsilon_3 E_3)\,, \\ \mathbf{E} &= (E_1,\, E_2,\, E_3)\,,\end{aligned}$$

Thành phần thứ j của phương trình này là

$$S_j K^2 \sum_i S_i E_i - K^2 E_j + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_j E_j = 0\,.$$

Đặt $\omega^2/K^2 = V^2$ và $c^2/\epsilon_j = V_j^2$, phương trình trên trở thành

$$S_j \sum_{i=1}^{3} S_i E_i + \left(\frac{V^2}{V_j^2} - 1\right)E_j = 0\,.$$

Với $j = 1, 2, 3$, ta có

$$\left(S^2 + \frac{V^2}{V_1^2} - 1\right)E_1 + S_1 S_2 E_2 + S_1 S_3 E_3 = 0\,,$$

$$S_1 S_2 E_1 + \left(S_2^2 - \frac{V^2}{V_2^2} - 1\right)E_2 + S_1 S_3 E_3 = 0\,,$$

$$S_3 S_1 E_1 + S_3 S_2 E_2 + \left(S_3^2 + \frac{V^2}{V_3^2} - 1\right)E_3 = 0\,.$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình trên có nghiệm khác không là định thức

$$\begin{vmatrix} S_1^2 + \frac{V^2}{V_1^2} - 1 & S_1S_2 & S_1S_3 \\ S_2S_1 & S_2^2 + \frac{V^2}{V_2^2} - 1 & S_2S_3 \\ S_3S_1 & S_3S_2 & S_3^2 + \frac{V^2}{V_3^2} - 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

từ đó suy ra

$$V^2\left[\frac{V^4}{V_1^2V_2^2V_3^2} + (S_1^2 - 1)\frac{V^2}{V_2^2V_3^2} + (S_2^2 - 1)\cdot\frac{V^2}{V_1^2V_3^2} + (S_3^2 - 1)\cdot\frac{V^2}{V_1^2V_2^2} + \left(\frac{S_1^2}{V_1^2} + \frac{S_2^2}{V_2^2} + \frac{S_3^2}{V_3^2}\right)\right] = 0 ,$$

Phương trình này có thể giải để tìm hai nghiệm hữu hạn đối với V^2 nếu $V^2 \neq 0$.

Từ $V^2 = \omega^2/K^2$ ta có thể tìm hai giá trị của K^2 tương ứng với hai nghiệm của V^2. Điều này cho ta thấy có hai kiểu truyền riêng biệt.

4007

Trên hình 4.2, bốn nguồn sóng đơn sắc kết hợp giống nhau A, B, C, D tạo ra các sóng có cùng bước sóng λ. Hai đầu thu R_1 và R_2 ở khoảng cách khá xa với B (nhưng bằng nhau).

(a) Đầu thu nào nhận được tín hiệu lớn hơn?

(b) Nếu nguồn B bị tắt đi, đầu thu nào, nếu có, nhận được tín hiệu lớn hơn?

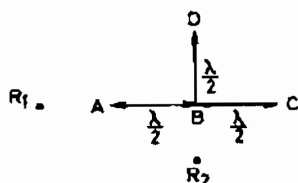
(c) Nếu nguồn D được tắt đi?

(d) Đầu thu nào có thể cho ta biết nguồn nào, B hoặc D, đã bị tắt đi?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Gọi r là khoảng cách từ B đến R_1 và R_2. Theo đề bài $r \gg \lambda$. Giả thiết biên độ của vectơ điện của sóng điện từ phát ra từ mỗi nguồn là E_0. Biên độ



Hình 4.2

tổng hợp của điện trường ở các đầu thu là

$$R_1: \quad E_{10} = E_0 \exp\left[iK\left(r - \frac{\lambda}{2}\right)\right] + E_0 e^{iKr} + E_0 \exp\left[iK\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)\right] + E_0 \exp\left[iK\sqrt{r^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right],$$

$$R_2: \quad E_{20} = E_0 e^{iKr} + E_0 \exp\left[iK\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)\right] + 2E_0 \exp\left[iK\sqrt{r^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right].$$

Vì $K\lambda = \frac{2\pi\nu\lambda}{c} = 2\pi$, $\exp[\pm i\frac{K\lambda}{2}] = e^{\pm i\pi} = -1$. Với $r \gg \lambda$, $\sqrt{r^2 + \frac{\lambda^2}{4}} \approx r$. Do đó

$$E_0 \exp\left[iK\sqrt{r^2 + \frac{\lambda^2}{4}}\right] \approx E_0 e^{iKr},$$

Suy ra

$$E_{10} \approx 0, \qquad E_{20} \approx 2E_0 e^{iKr}.$$

Cường độ của một tín hiệu $I \propto |E|^2$, nên cường độ nhận được bởi R_1 và R_2 lần lượt là

$$I_0 = 0, \qquad I_2 \sim 4E_0^2.$$

Vì vậy R_2 thu được tín hiệu lớn hơn.

(b) Nếu nguồn B bị tắt đi, khi đó

$$E_{10} \approx -E_0 e^{iKr}, \qquad E_{20} \approx E_0 e^{iKr}.$$

Do đó $I_1 = I_2 \sim E_{10}^2$, tức là, hai đầu thu nhận được các tín hiệu với cường độ như nhau.

(c) Nếu nguồn D bị tắt đi, ta có

$$E_{10} \approx -E_0 e^{iKr}, \qquad E_{20} \approx 3E_0 e^{iKr},$$

khi đó

$$I_1 \sim E_{10}^2 , \qquad I_2 \sim 9E_0^2 .$$

Do đó R_2 thu được tín hiệu lớn hơn.

(d) Từ trên, ta có thể thấy rằng I_1 không thay đổi mặc dù các nguồn B và D là tắt hay bật. Vì thế R_1 không thể xác định được trạng thái bật – tắt của B và D. Trái lại, cường độ của I_2 là khác nhau đối với ba trường hợp trên, nên độ mạnh của tín hiệu thu được bởi R_2 có thể xác định trạng thái bật – tắt của các nguồn B và D.

4008

(a) Hãy viết các phương trình Maxwell với giả thiết rằng không có mặt của bất cứ vật liệu điện môi hay vật liệu từ nào. Hãy nói rõ hệ đơn vị mà bạn sử dụng. Bạn phải giải thích câu trả lời của mình cho tất cả các trường hợp sau.

(b) Nếu các dấu của tất cả điện tích nguồn đổi ngược lại, thì điều gì xảy ra với điện trường **E** và từ trường **B**?

(c) Nếu hệ này bị nghịch đảo về không gian, tức là, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, thì điều gì xảy ra với mật độ điện tích và mật độ dòng (ρ và **j**) và với **E** và **B**?

(d) Nếu hệ này bị nghịch đảo về thời gian, tức là, $t \to t' = -t$, thì điều gì xảy ra với ρ, **j**, **E** và **B**?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Hãy sử dụng hệ đơn vị MKSA.

(a) Khi không có mặt các vật liệu điện môi hay vật liệu từ thì các phương trình Maxwell là

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \end{cases}$$

(b) Dưới phép liên hợp điện tích $e \to -e$, ta có $\nabla \to \nabla' = \nabla$, $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\rho \to \rho' = -\rho$, $\mathbf{j} \to \mathbf{j}' = -\mathbf{j}$. Dưới các phép biến đổi này, các phương trình Maxwell giữ nguyên không đổi

$$\begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} , & \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} , \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 , & \nabla' \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} . \end{cases}$$

So sánh phương trình thứ nhất trong (a) và (b), ta thấy rằng, vì $\rho' = -\rho$ nên

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) .$$

Thay nó vào phương trình thứ tư, ta thấy

$$\nabla' \times \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{B}' = -\mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

Do đó

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) .$$

(c) Với phép nghịch đảo không gian

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r} , \qquad \nabla \to \nabla' = -\nabla ,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} , \qquad e \to e' = e .$$

thì

$$\rho(\mathbf{r}, t) \to \rho'(\mathbf{r}, t) = \rho , \qquad \mathbf{j} \to \mathbf{j}' = \rho' \mathbf{u}' = -\rho \mathbf{u} = -\mathbf{j} ,$$

u là vận tốc của các điện tích trong một yếu tố thể tích.

Vì các phương trình Maxwell giữ nguyên không thay đổi dưới phép biến đổi này, nên ta có

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) , \qquad \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) .$$

(d) Với phép nghịch đảo thời gian,

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t} , \qquad \nabla \to \nabla' = \nabla , \qquad e \to e' = e .$$

Khi đó $\rho' = \rho$, $\mathbf{j}' = -\rho\mathbf{u} = -\mathbf{j}$, và từ đặc tính hiệp biến của các phương trình Maxwell, ta có

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) , \qquad \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) .$$

4009

Hãy cho $\mathbf{A}_\omega$, ϕ_ω, $\mathbf{J}_\omega$ và ρ_ω lần lượt là ảnh qua phép biến đổi Fourier theo thời gian của thế vectơ, thế vô hướng, mật độ dòng và mật độ điện tích. Hãy chứng tỏ rằng:

$$\phi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho_\omega(\mathbf{r}') \frac{e^{iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' ,$$

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}')\,\frac{e^{iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' . \qquad \left(K = \frac{|\omega|}{c}\right)$$

Định luật bảo toàn dòng - điện tích được biểu diễn qua ρ_ω và $\mathbf{j}_\omega$ như thế nào? Hãy tìm biểu thức cho từ trường $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r})$ và điện trường $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ ở vùng xa $(r \to \infty)$. Hãy tìm các trường này đối với mật độ dòng $\mathbf{J}_\omega(r) = \mathbf{r}f(r)$.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Nếu ta biểu diễn mật độ dòng $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ như là tích phân Fourier

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r})\mathbf{e}^{-i\omega t}d\omega ,$$

thì thế vectơ trễ có thể viết như sau

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' \int_{\infty}^{\infty} \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}')\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right]d\omega \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}d\omega \int \frac{\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}')e^{iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' ,
\end{aligned}$$

Trong đó tích phân thể tích là theo toàn không gian. Do đó ảnh Fourier của thế vectơ là

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}')\exp\left[iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' .$$

Tương tự, ảnh Fourier của thế vô hướng $\phi(\mathbf{r}, t)$ là

$$\phi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho_\omega(\mathbf{r}')\,\frac{\exp[iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' .$$

Phương trình liên tục biểu thị sự bảo toàn dòng - điện tích, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$, được viết qua tích phân Fourier như sau

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}d\omega + \nabla\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}d\omega = 0 ,$$

hay

$$\int_{-\infty}^{\infty}[-i\omega\rho_\omega(\mathbf{r}) + \nabla\cdot\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r})]e^{-i\omega t}d\omega = 0 .$$

Do đó

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\omega - i\omega\rho_\omega = 0\,.$$

Ở những vùng xa $r \to \infty$, ta có thể lấy gần đúng

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\,.$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\omega \frac{e^{iK|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &\approx \mathbf{J}_\omega \frac{e^{iKr}}{r}\left(1 - iK\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} - \cdots\right)\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \cdots\right)\\ &\approx \mathbf{J}_\omega \frac{e^{iKr}}{r}\left(1 - iK\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right).\end{aligned}$$

Hãy xét

$$\nabla' \cdot (x'\mathbf{J}_\omega) = J_{\omega x'} + x'\nabla \cdot \mathbf{J}_\omega\,.$$

Vì

$$\int \nabla' \cdot (x'\mathbf{J}_\omega) d^3r' = \oint x'\mathbf{J}_\omega \cdot dS' = 0$$

đối với một phân bố dòng hữu hạn, nên ta có

$$\begin{aligned}\int \mathbf{J}_\omega d^3r' &= -\int \mathbf{r}'\nabla' \cdot \mathbf{J}_\omega d^3r'\\ &= -i\omega \int \mathbf{r}'\rho_\omega(\mathbf{r}') d^3r'\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') &= \frac{1}{2}[\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}_\omega)\mathbf{r}'] + \frac{1}{2}[\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}_\omega)\mathbf{r}']\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{J}_\omega)\times\mathbf{r} + \frac{1}{2}[\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}_\omega)\mathbf{r}']\,.\end{aligned}$$

Số hạng thứ hai ở vế phải sẽ làm xuất hiện một điện trường bốn cực. Nó được bỏ qua, vì ta chỉ quan tâm tới trường đa cực thấp nhất. Do đó

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-i\omega\mathbf{p}_\omega\frac{e^{iKr}}{r} - iK\mathbf{m}_\omega \times \frac{\mathbf{r}}{r}e^{iKr}\right), \qquad (2)$$

trong đó

$$\mathbf{p}_\omega = \int \mathbf{r}'\rho_\omega(\mathbf{r}')d^3r'\,, \qquad \mathbf{m}_\omega = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}'\times\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}')d^3r'$$

là các mômen lưỡng cực điện và từ của các nguồn. Để tìm $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ ở vùng xa, ta sử dụng phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

với giả thiết nguồn là hữu hạn. Lấy ảnh Fourier, phương trình trên trở thành

$$\nabla \times \int \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega ,$$

hay

$$\int \nabla \times \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega = -\int \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega ,$$

suy ra

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{ic^2}{\omega}\nabla \times \mathbf{B}_\omega .$$

Tương tự, từ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ta có

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) .$$

Đối với mật độ dòng $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{r} f(r)$, ta có

$$\mathbf{m}_\omega = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' f(r') d^3r' = 0 .$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$\mathbf{p}_\omega = \int \mathbf{r}' \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{i}{\omega}\int \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{i}{\omega}\int \mathbf{r}' f(r') d^3r' ,$$

ở đây ta đã sử dụng (1) và giả thiết phân bố dòng là hữu hạn.

Do đó, sử dụng (2), ta có

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 e^{iKr}}{4\pi r}\int \mathbf{r}' f(r') d^3r' .$$

Khi đó

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) \approx \frac{i\mu_0 K e^{iKr}}{4\pi r}\hat{\mathbf{r}} \times \int \mathbf{r}' f(r') d^3r' ,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) &= \frac{ic^2}{\omega}\nabla \times \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \\ &\approx -ic\,\frac{\mu_0 K e^{iKr}}{4\pi r}\hat{\mathbf{r}} \times \left[\hat{\mathbf{r}} \times \int \mathbf{r}' f(r') d^3r'\right] ,\end{aligned}$$

trong đó $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, các số hạng có các bậc cao hơn của $\frac{1}{r}$ đã được bỏ qua.

2. SỰ PHẢN XẠ VÀ KHÚC XẠ CỦA CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ TRÊN MẶT PHÂN CÁCH GIỮA HAI MÔI TRƯỜNG (4010–4024)

4010

(a) Hãy viết các phương trình Maxwell trong một môi trường không dẫn với độ từ thẩm và độ cảm không đổi ($\rho = \mathbf{j} = 0$). Hãy chứng tỏ rằng $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ đều thỏa mãn phương trình sóng, và hãy tìm biểu thức của vận tốc sóng. Hãy viết ra các nghiệm cho sóng phẳng $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ và hãy chỉ ra $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ liên hệ với nhau như thế nào?

(b) Hãy thảo luận về sự phản xạ và khúc xạ của sóng điện từ tại mặt phẳng phân cách giữa các chất điện môi và đưa ra các mối quan hệ giữa các góc tới, góc phản xạ và khúc xạ.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Các phương trình Maxwell trong môi trường không dẫn đồng nhất và không có nguồn là

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (1) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & (4) \end{cases}$$

trong đó $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, ε, μ là các hằng số. Vì

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$$

và phương trình (2) có thể được viết lại như sau

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

Phương trình (1) cho

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 .$$

Tương tự, người ta tìm được

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 .$$

Như vậy tất cả các vectơ trường $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ đều thỏa mãn phương trình sóng. So sánh với phương trình sóng chuẩn $\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ cho thấy vận tốc sóng là

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

Các nghiệm tương ứng với các sóng điện từ phẳng có tần số góc ω là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} ,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} ,$$

trong đó vectơ sóng $\mathbf{k}$ và các biên độ $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{B}_0$ tạo thành một tam diện thuận. Ngoài ra $v = \frac{\omega}{k}$, và $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ liên hệ với nhau bởi

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} .$$

(b) Điều kiện biên cho rằng thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{E}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{E}_t$, $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với mặt phân cách, là liên tục qua bề mặt phân cách đòi hỏi rằng ngoài sóng tới mặt phân cách ra, nói chung, còn có sóng phản xạ và sóng khúc xạ. Ngoài ra, thực nghiệm cho thấy rằng nếu sóng điện từ tới là một sóng phẳng $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, thì các sóng phản xạ và khúc xạ cũng là các sóng phẳng, chúng lần lượt được biểu diễn

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}-\omega' t)} ,$$

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega'' t)} .$$

Khi đó, điều kiện biên tại mặt phân cách cho

$$\mathbf{n} \times \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{E}_0' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}\right] = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega'' t)} .$$

Điều này có nghĩa rằng tất cả các số mũ trong phương trình này cần phải giống nhau, đó là

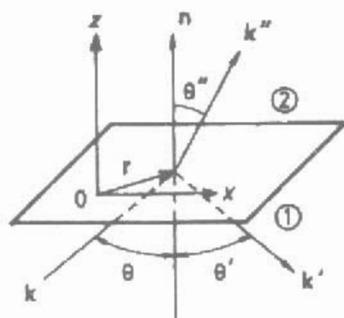
$$\omega = \omega' = \omega'' , \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} .$$

Do đó tần số là không thay đổi bởi sự phản xạ và khúc xạ.

Hãy chọn toạ độ gốc trên mặt phân cách để cho vectơ vị trí $\mathbf{r}$ của điểm mà sóng tới đập vào mặt phân cách là vuông góc với $\mathbf{k}$. Vậy thì ta có

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0 . \qquad (5)$$

Điều này có nghĩa là $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ và $\mathbf{n}$ là cùng phẳng. Do đó sự phản xạ và khúc xạ xảy ra trong mặt phẳng thẳng đứng chứa sóng tới, được gọi là mặt phẳng



Hình 4.3

tới. Bây giờ hãy chọn một hệ tọa độ với gốc ở một điểm O bất kì trên mặt phân cách, trục x song song với mặt phẳng tới, tức là mặt phẳng của **k** và **n**, trục z song song với pháp tuyến **n**, và gọi θ, θ' và θ'' lần lượt là các góc tới, góc phản xạ và khúc xạ được đo từ pháp tuyến như đã được chỉ ra trong hình 4.3. Vậy thì

$$\mathbf{r} = (x, y, 0),$$

$$\mathbf{k} = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,(\sin\theta,\, 0,\, \cos\theta),$$

$$\mathbf{k}' = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,(\sin\theta',\, 0,\, -\cos\theta'),$$

$$\mathbf{k}'' = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,(\sin\theta'',\, 0,\, \cos\theta'').$$

Phương trình (5) cho với x và ω bất kì

$$\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,\sin\theta = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,\sin\theta' = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,\sin\theta''.$$

Do đó

$$\theta = \theta',$$

Tức là, góc tới bằng góc phản xạ. Đây chính là định luật phản xạ. Ta cũng có

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

trong đó $n \propto \sqrt{\varepsilon\mu}$ được gọi là chiết suất của một môi trường và n_{21} được gọi là chiết suất của môi trường 2 đối với môi trường 1. Phương trình này đã được biết, đó chính là định luật khúc xạ.

4011

Một sóng điện từ phẳng với cường độ I đập lên một tấm kính có chiết suất n. Vectơ sóng này là vuông góc với bề mặt (tới vuông góc).

(a) Hãy chỉ ra rằng hệ số phản xạ (của cường độ) ở sóng tới vuông góc này được cho bởi $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$ đối với một mặt phân cách đơn.

(b) Bỏ qua các hiệu ứng giao thoa, hãy tính áp lực bức xạ tác động lên tấm kính qua I và n.

(*Chicago*)

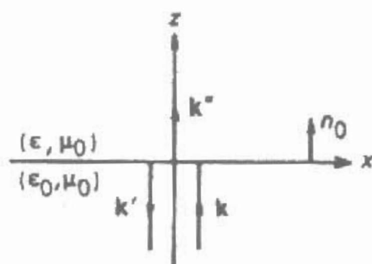
Lời giải:

Hướng của các vectơ sóng của các sóng tới, phản xạ và khúc xạ như chỉ ra trên hình 4.4. Với sóng tới vuông góc, $\theta = \theta' = \theta'' = 0$. Các sóng điện từ tới, phản xạ và khúc xạ lần lượt là

$$E = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} ,$$

$$E' = E_0' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}-\omega t)} , \qquad E'' = E_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega t)} .$$

Vì độ từ thẩm của thủy tinh là rất gần với của chân không, tức là $\mu = \mu_0$, nên chiết suất của thủy tinh là $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$, với ε là hằng số điện môi của nó.



Hình 4.4

(a) Sóng điện từ phẳng có thể được phân tách thành hai thành phần phân cực với các mặt phẳng phân cực vuông góc với nhau. Trong mặt phân cách ta lấy một hướng bất kì coi như là hướng x và hướng vuông góc với nó là hướng y, và phân tách sóng tới thành hai thành phần phân cực với $\mathbf{E}$ song song với hai hướng này. Ta cũng phân tách các sóng phản xạ và khúc xạ bằng cách tương tự. Vì $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ và $\mathbf{k}$ tạo thành một tam diện thuận, đối với hai sự phân cực

này ta có

Phân cực x	Phân cực y
E_x, H_y	$E_y, -H_x$
$E'_x, -H'_y$	E'_y, H'_x
E''_x, H''_y	$E''_y, -H''_x$

Điều kiện biên cho rằng E_t và H_t là liên tục qua mặt phân cách cho đối với phân cực x

$$E_x + E'_x = E''_x , \tag{1}$$

$$H_y - H'_y = H''_y . \tag{2}$$

Đối với sóng phẳng ta có $\sqrt{\mu}\,|\mathbf{H}| = \sqrt{\varepsilon}\,|\mathbf{E}|$. Với $\mu \approx \mu_0$ và $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = n$, (2) trở thành

$$E_x - E'_x = nE''_x . \tag{3}$$

(1) và (3) cho

$$E'_x = \left(\frac{1-n}{1+n}\right) E_x .$$

Bởi vì đối với sóng tới vuông góc, mặt phẳng tới là tùy ý, nên đối với phân cực y thì kết quả cũng giống như vậy. Do đó đối với sóng tới vuông góc, ta có

$$E' = \left(\frac{1-n}{1+n}\right) E .$$

Cường độ của một sóng được xác định bởi độ lớn của vectơ Poynting $\mathbf{N}$ lấy trung bình trên một chu kì. Ta có

$$\mathbf{N} = \mathrm{Re}\,\mathbf{E} \times \mathrm{Re}\,\mathbf{H} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H}\right).$$

Vì hai số hạng đầu tiên trong biểu thức cuối chứa hệ số thời gian $e^{\pm 2i\omega t}$, chúng sẽ biến mất khi lấy trung bình trên một chu kì. Do đó cường độ sẽ là

$$I = \langle N \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,|\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*| = \frac{1}{2}EH^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2 ,$$

$\mathbf{E}_0$ là biên độ của trường $\mathbf{E}$.

Do đó, hệ số phản xạ là

$$R = \frac{E_0'^2}{E_0^2} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 .$$

(b) Mật độ xung lượng trung bình của một sóng được xác định bởi $G = \frac{\langle N \rangle}{v^2} = \frac{I}{v^2}$. Nên xung lượng trung bình va đập vuông góc vào một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian là Gv. Vì vậy áp suất bức xạ tác dụng lên tấm kính là

$$\begin{aligned} P &= Gc - (-G'c) - G''v \\ &= Gc\left(1 + \frac{G'}{G} - \frac{G''}{G}\frac{v}{c}\right) \\ &= \frac{I}{c}\left(1 + \frac{I'}{I} - \frac{c}{v}\frac{I''}{I}\right). \end{aligned}$$

(1) - (3) cho

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{2}{1+n},$$

hay

$$\frac{I''}{I} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\frac{E_0''^2}{E_0^2} = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Với $\frac{I'}{I} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$, ta cũng được

$$P = \frac{I}{c}\left[1 + \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 - \frac{4n^2}{(1+n)^2}\right] = 2\frac{I}{c}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)$$

4012

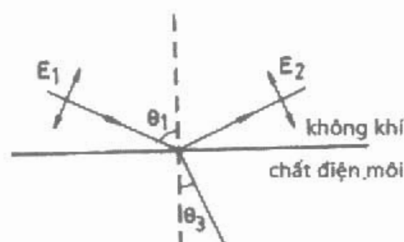
(a) Trên cơ sở của các phương trình Maxwell và tính đến các điều kiện biên thích hợp cho mặt phân cách không khí – chất điện môi, hãy chứng minh rằng công suất phản xạ của thủy tinh có chiết suất n đối với sóng điện từ chiếu tới vuông góc là $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$.

(b) Cũng chứng minh rằng sẽ không có sóng phản xạ nào nếu ánh sáng tới là phân cực như ở trên hình 4.5 (tức là vectơ điện ở trong mặt phẳng tới) và nếu $\tan\theta_1 = n$, trong đó θ_1 là góc tới. Lưu ý rằng ở đây có thể áp dụng định luật nổi tiếng Fresnel.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Giống như đối với phần (a) của bài toán **4011**.



Hình 4.5

(b) Công thức Fresnel sau đây áp dụng cho các sóng có vectơ điện ở trong mặt phẳng tới

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\tan(\theta_3 - \theta_1)}{\tan(\theta_3 + \theta_1)} .$$

Khi $\theta_3 + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $E_2 = 0$, tức là sóng phản xạ biến mất. Định luật Snell cho

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta_3 = n\cos\theta_1 ,$$

hay

$$\tan\theta_1 = n .$$

Vì vậy không có sự phản xạ xảy ra nếu góc tới là $\theta_1 = \arctan n$.

4013

Hãy tính hệ số phản xạ đối với một sóng điện từ, tới vuông góc với mặt phân cách giữa chân không và chất cách điện (hãy cho độ từ thẩm của chất cách điện là 1 và hằng số điện môi là ε. Sóng tới truyền từ phía chân không tới).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Tham khảo bài toán **4011**, hệ số phản xạ là

$$R = \left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 .$$

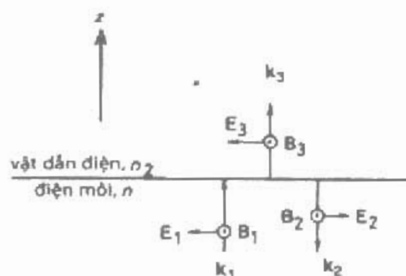
4014

Một sóng điện từ phân cực phẳng truyền trong một môi trường điện môi có chiết suất n, bị phản xạ từ bề mặt một vật dẫn điện khi nó chiếu tới vuông góc. Hãy tìm sự thay đổi pha của vectơ điện nếu chiết suất của vật dẫn điện là $n_2 = n(1 + i\rho)$.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Đối với sóng tới vuông góc, mặt phẳng tới là bất kì. Nên ta có thể lấy vectơ điện như trong mặt phẳng trên hình 4.6. Sóng tới được biểu diễn bằng



Hình 4.6

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} e^{i(k_1 z - \omega t)} ,$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{10} e^{i(k_1 z - \omega t)} ,$$

$$B_{10} = \frac{n}{c} E_{10} , \qquad k_1 = \frac{\omega}{c} n ;$$

sóng phản xạ được biểu diễn bằng

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{-i(k_2 z + \omega t)} ,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{20} e^{-i(k_2 z + \omega t)} ,$$

$$B_{20} = \frac{nE_{20}}{c} , \qquad k_2 = \frac{\omega}{c} n ;$$

và sóng truyền qua được biểu diễn bằng

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{30} e^{i(k_3 z - \omega t)} ,$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_{30} e^{i(k_3 z - \omega t)} ,$$

$$B_{30} = \frac{n_2 E_{30}}{c}, \qquad k_3 = \frac{\omega}{c} n_2 .$$

Điều kiện biên ở mặt phân cách là E_t và H_t đều là liên tục. Do đó

$$E_{10} - E_{20} = E_{30}, \tag{1}$$

$$B_{10} + B_{20} = \frac{\mu}{\mu_2} B_{30} \approx B_{30}, \tag{2}$$

giả thiết rằng môi trường không phải là sắt từ cho nên $\mu \approx \mu_2 \approx \mu_0$. Phương trình (2) được viết lại là

$$E_{10} + E_{20} = \frac{n_2}{n} E_{30} . \tag{3}$$

(1) và (3) cho

$$E_{20} = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} E_{10} = \frac{in\rho}{2n + in\rho} E_{10} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4}} e^{i\varphi} E_{10},$$

với

$$\tan \varphi = \frac{2}{\rho} .$$

Vì vậy độ dịch pha của vectơ điện của sóng phản xạ so với vectơ điện của sóng tới là

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{\rho}\right) .$$

4015

Trong một vùng không gian trống rỗng, từ trường (theo hệ đơn vị Gauss) được mô tả bằng

$$\mathbf{B} = B_0 e^{ax} \hat{\mathbf{e}}_z \sin w ,$$

trong đó $w = ky - \omega t$.

(a) Hãy tính $\mathbf{E}$.

(b) Hãy tìm tốc độ lan truyền v của trường này.

(c) Có thể tạo ra một trường như vậy không? Nếu có thì tạo như thế nào?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Hãy biểu diễn $\mathbf{B}$ như Im $(B_0 e^{ax} e^{iw})\hat{\mathbf{e}}_z$.

(a) Sử dụng phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

và định nghĩa $k = \frac{\omega}{c}$ đối với không gian trống rỗng, ta nhận được

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{\omega}\nabla \times \mathbf{B} = \frac{i}{k}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix},$$

trong đó $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ vì $\mathbf{B}$ không phụ thuộc vào z.

Do đó

$$E_x = \mathrm{Im}\left(\frac{i}{k}B_0 e^{ax} ik e^{iw}\right) = -B_0 e^{ax}\sin w\,,$$

$$E_y = \mathrm{Im}\left(-\frac{i}{k}B_0 a e^{ax} e^{iw}\right) = -\frac{ac}{\omega}B_0 e^{ax}\cos w\,,$$

$$E_z = 0\,.$$

(b) Nếu dạng sóng không bị thay đổi trong khi truyền thì ta có

$$dw = k\,dy - w\,dt = 0\,,$$

hay $\frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$. Như vậy sóng truyền dọc theo hướng y với tốc độ $v = c$.

(c) Sóng điện từ như thế này có thể được tạo ra bằng sự phản xạ toàn phần. Hãy xét mặt phân cách phẳng giữa một chất điện môi có chiết suất $n(> 1)$ và chân không. Lấy mặt phẳng phân cách làm mặt phẳng yz và lấy hướng $+x$ là hướng từ chất điện môi đi ra. Một sóng phẳng phân cực với $\mathbf{B}$ hướng theo trục z đi trong chất điện môi và đập vào mặt phân cách với góc tới θ. Có thể biểu diễn các sóng tới và sóng khúc xạ bằng

$$B_z = B_0\exp[i(xk\cos\theta + yk\sin\theta - \omega t)]\,,$$

$$B_z'' = B_0''\exp[i(xk''\cos\theta'' + yk''\sin\theta'' - \omega t)]\,,$$

trong đó $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}n$, $k'' = \frac{\omega}{c}$.

Ở mặt tiếp xúc, $x = 0$ và y là tùy ý. Điều kiện biên là H_t liên tục, điều này đòi hỏi thỏa mãn biểu thức sau

$$k\sin\theta = k''\sin\theta''\,,$$

hay

$$\sin\theta = \frac{1}{n}\sin\theta'' \le \frac{1}{n}\,.$$

Vì $n > 1$ nên nếu $\theta > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ thì xảy ra sự phản xạ toàn phần.

Có sự phản xạ toàn phần nên

$$\sin\theta'' = n\sin\theta\,,$$

$$\cos\theta'' = \pm i\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}\,.$$

Khi đó

$$B''_z = B''_0 \exp\left(\mp\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}\,x\right)\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}n\sin\theta y - \omega t\right)\right].$$

Vì x tăng lên khi càng đi sâu vào chân không, nên phải dùng dấu $-$. Trường này đúng là có dạng như đã cho.

4016

Một sóng phẳng điều hòa có tần số ν chiếu vuông góc tới mặt phân cách giữa hai môi trường điện môi có các chiết suất là n_1 và n_2. Một phần năng lượng ρ bị phản xạ và tạo ra một sóng đứng khi kết hợp với sóng tới. Cần lưu ý rằng do sự phản xạ, điện trường thay đổi pha đi một góc là π khi $n_2 > n_1$.

(a) Hãy tìm biểu thức cho điện trường tổng hợp như là một hàm của khoảng cách d từ mặt phân cách. Hãy xác định các vị trí cực đại và cực tiểu của $\langle E^2\rangle$.

(b) Từ dáng điệu của điện trường, hãy xác định sự thay đổi pha của từ trường do sự phản xạ. Hãy tìm $B(z,t)$ và $\langle B^2\rangle$.

(c) Khi O. Wiener làm thí nghiệm như vậy có sử dụng một tấm kính ảnh vào năm 1890, ông đã tìm thấy một dải tối cựu tiểu đối với $d = 0$. Dải tối đó là do điện trường hay từ trường gây ra?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Với trục tọa độ trong hình 4.7 và viết z thay cho d, thì điện trường của sóng tới là $\mathbf{E}_0\cos(kz - \omega t)$. Vì điện trường dịch pha một góc là π khi phản xạ từ mặt phân cách, nên biên độ $\mathbf{E}'_0$ của sóng phản xạ là ngược chiều với $\mathbf{E}_0$. Một phần ρ của năng lượng đã bị phản xạ. Vì năng lượng tỉ lệ với E_0^2, ta có

$$E_0'^2 = \rho E_0^2\,.$$

Do đó điện trường của sóng phản xạ là

$$\mathbf{E}' = -\sqrt{\rho}\,\mathbf{E}_0 \cos(-kz - \omega t)\,.$$

Vì thế điện trường tổng hợp trong môi trường thứ nhất là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) - \sqrt{\rho}\,\mathbf{E}_0 \cos(kz + \omega t)\,,$$

suy ra

$$E^2 = E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + \rho E_0^2 \cos^2(kz + \omega t) - \sqrt{\rho}\,E_0^2 [\cos(2kz) + \cos(2\omega t)]\,.$$

Lấy trung bình trên một chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ta có

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E^2 dt = \frac{(1+\rho)E_0^2}{2} - \sqrt{\rho}\,E_0^2 \cos(2kz)\,.$$

Khi $kz = m\pi$, hay $z = \frac{mc}{2\nu n_1}$, trong đó m là một số nguyên $0, 1, 2, \ldots$, $\langle E^2 \rangle$ sẽ có giá trị cực tiểu

$$\langle E^2 \rangle_{\min} = \frac{(1-\sqrt{\rho})^2}{2}\,E_0^2\,.$$

Khi $kz = \frac{(2m+1)\pi}{2}$, hay $z = \frac{(2m+1)c}{4\nu n_1}$, trong đó $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\langle E^2 \rangle$ sẽ có giá trị cực đại

$$\langle E^2 \rangle_{\max} = \frac{(1+\sqrt{\rho})^2}{2}\,E_0^2\,.$$

(b) Vì **E**, **B**, và **k** tạo thành một tam diện thuận, nên trong hình 4.7 ta thấy biên độ $\mathbf{B}_0$ của từ trường sóng phản xạ có chiều giống như của sóng tới $\mathbf{B}_0$, nên không có sự thay đổi pha nào xảy ra. Biên độ của các từ trường này là

$$B_0 = n_1 E_0\,, \qquad B_0' = n_1 E_0' = \sqrt{\rho}\,n_1 E_0 = \sqrt{\rho}\,B_0\,.$$

Từ trường tổng hợp trong môi trường thứ nhất là

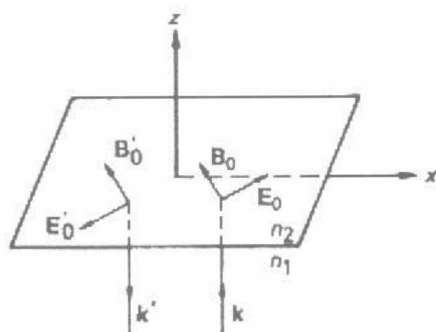
$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0 \cos(kz - \omega t) + \sqrt{\rho}\,\mathbf{B}_0 \cos(kz + \omega t)\,,$$

suy ra

$$\begin{aligned} B^2 = {} & n_1^2 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + \rho n_1^2 E_0^2 \cos^2(kz + \omega t) \\ & + \sqrt{\rho}\,n_1^2 E_0^2 [(\cos(2kz) + \cos(2\omega t)]\,, \end{aligned}$$

với giá trị trung bình là

$$\langle B^2 \rangle = \frac{(1+\rho)n_1^2 E_0^2}{2} + \sqrt{\rho}\,n_1^2 \cos(2kz)\,.$$



Hình 4.7

Vì vậy $\langle B^2\rangle$ sẽ là cực đại đối với $kz = m\pi$ và cực tiểu đối với $kz = \frac{2m+1}{2}\pi$.

(c) Kết quả trên đây cho thấy $\langle B^2\rangle$ là cực đại với $z = 0$ và $\langle E^2\rangle$ cực tiểu đối với $z = 0$. Vì vậy dải tối trên tấm kính ảnh, là cực tiểu tại $z = 0$, là do điện trường gây ra.

4017

Các tia của bức xạ điện từ, ví dụ như các tia rađa, tia ánh sáng, cuối cùng cũng bị loe ra là do sự nhiễu xạ. Hãy nhớ lại rằng một tia lan truyền qua một lỗ hình tròn đường kính D với góc nhiễu xạ là $\theta_d = \frac{1,22}{D}\lambda_n$. Trong nhiều môi trường điện môi chiết suất tăng trong các điện trường lớn và nó có thể được biểu diễn bởi công thức $n = n_0 + n_2E^2$.

Hãy chứng minh rằng trong môi trường phi tuyến như thế này thì sự nhiễu xạ của tia có thể được bù trừ bằng sự phản xạ toàn phần của bức xạ để tạo ra một tia tự. Hãy tính công suất ngưỡng đối với sự tồn tại của một tia tự.

(*Princeton*)

Lời giải:

Hãy xét một mặt trụ đường kính D trong môi trường điện môi.
Giả thiết rằng điện trường bên trong mặt trụ là E và bên ngoài là không. Vì chiết suất của môi trường là $n = n_0 + n_2E^2$, nên chiết suất bên ngoài là n_0.

Hãy xét một tia bức xạ lan truyền dọc theo trục của hình trụ. Một tia tạo

với trục một góc là θ sẽ phản xạ toàn phần từ bề mặt hình trụ nếu

$$n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \geq n_0 ,$$

nghĩa là

$$n \geq \frac{n_0}{\cos\theta} .$$

Sự loe ra nhiễu xạ $\theta_{\rm d} = 1{,}22\lambda_n/D$ sẽ được bù trừ bằng sự phản xạ toàn phần bên trong nếu như $n = n_0 + n_2 E^2 \geq \frac{n_0}{\cos\theta_{\rm d}}$. Do đó ta cần cường độ điện trường lớn hơn một giá trị tới hạn sau

$$E_c = \sqrt{\frac{n_0}{n_2}\left[(\cos\theta_{\rm d})^{-1} - 1\right]} .$$

Giả thiết bức xạ là các sóng điện từ phẳng, ta có

$$\sqrt{\varepsilon}\, E = \sqrt{\mu}\, H .$$

Các sóng với cường độ điện trường tới hạn có vectơ Poynting trung bình là

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} E H^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_c^2 .$$

Vì vậy công suất bức xạ ngưỡng là

$$\langle P \rangle = \langle N \rangle \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{8}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{n_0}{n_2}\left(\frac{1}{\cos\theta_{\rm d}} - 1\right) .$$

Vì

$$n = \frac{n_0}{\cos\theta_{\rm d}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} , \qquad \mu \approx \mu_0 ,$$

$$\langle P \rangle = \frac{\pi c \varepsilon_0 D^2}{8}\frac{n_0^2}{n_2} \cdot \frac{1 - \cos\theta_{\rm d}}{\cos^2\theta_{\rm d}} .$$

Với $\theta_{\rm d} = 1{,}22\lambda_n/D \ll 1$, ta có

$$\langle P \rangle = \frac{\pi c \varepsilon_0 D^2}{16}\frac{n_0^2}{n_2}\theta_{\rm d}^2 = \frac{\pi c \varepsilon_0}{16}\frac{n_0^2}{n_2}(1{,}22\lambda_n)^2 .$$

Vì $n_0\lambda_n = \lambda$ là bước sóng trong chân không, ta nhận được

$$\langle P \rangle = \frac{\pi c \varepsilon_0}{16 n_2}(1{,}22\lambda)^2 .$$

4018

Hãy xét sự truyền của sóng điện từ phẳng qua một môi trường có chiết suất phụ thuộc vào trạng thái của phân cực tròn.

(a) Hãy viết ra các biểu thức đối với các sóng phẳng phân cực tròn phải và trái.

(b) Giả thiết rằng chiết suất trong môi trường này có dạng

$$n_{\pm} = n \pm \beta ,$$

trong đó n và β là số thực và các dấu cộng và trừ lần lượt chỉ các sóng phẳng phân cực phải và trái. Hãy chứng minh rằng một sóng phẳng phân cực thẳng chiếu đến môi trường này thì mặt phẳng phân cực của nó sẽ bị quay khi nó đi qua môi trường đó. Hãy tìm góc mà mặt phẳng phân cực bị quay đi như một hàm của khoảng cách z trong môi trường.

(c) Hãy xét một plasma êlectron loãng có mật độ đồng nhất n_0 với cảm ứng từ $\mathbf{B}_0$ đều, tĩnh và mạnh và các sóng ngang truyền song song với hướng của $\mathbf{B}_0$. Giả thiết rằng biên độ chuyển động của các êlectron là nhỏ, nên các sự va chạm là không đáng kể, và rằng biên độ của trường **B** của các sóng là nhỏ so với B_0. Hãy tìm chiết xuất đối với các sóng phân cực tròn và chỉ ra rằng đối với các tần số cao các hệ số này có thể viết dưới dạng đã giả thiết trong phần (b). Hãy nêu rõ bạn hiểu các tần số cao là như thế nào?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Hãy lấy trục z dọc theo hướng truyền của sóng.

(a) Có thể biểu diễn vectơ điện của ánh sáng phân cực tròn phải bằng phần thực của biểu thức sau

$$\mathbf{E}_{\mathrm{R}}(z,t) = (E_0\mathbf{e}_x + E_0 e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)\, e^{-i\omega t + ik_+ z} ,$$

và biểu diễn vectơ điện của ánh sáng phân cực tròn trái bằng phần thực của

$$\mathbf{E}_{\mathrm{L}}(z,t) = (E_0\mathbf{e}_x + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)\, e^{-i\omega t + ik_- z} ,$$

trong đó

$$k_+ = \frac{\omega}{c} n_+ , \qquad k_- = \frac{\omega}{c} n_- .$$

(b) Một ánh sáng phân cực thẳng sẽ được phân tách thành các sóng phan cực tròn phải và trái

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z,t) &= \mathbf{E}_{\mathrm{R}}(z,t) + \mathbf{E}_{\mathrm{L}}(z,t) \\ &= (E_0\mathbf{e}_x + E_0 e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t + ik_+ z} + (E_0\mathbf{e}_x + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t + ik_- z} . \end{aligned}$$

Tại điểm tới $z = 0$, $\mathbf{E}(0,t) = 2E_0e^{-i\omega t}\mathbf{e}_x$, biểu diễn một sóng với $\mathbf{E}$ phân cực theo hướng $\mathbf{e}_x$. Tại một khoảng cách z ở trong môi trường này ta có

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0[(e^{i(k_+-k_-)z}+1)\mathbf{e}_x + (e^{i(k_+-k_-)z-i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{\pi}{2}})\mathbf{e}_y]\,e^{-i\omega t+ik_-z},$$

và vì vậy

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\cos\left[(k_+-k_-)z-\frac{\pi}{2}\right]}{1+\cos[(k_+-k_-)z]} = \frac{\sin[(k_+-k_-)z]}{1+\cos[(k_+-k_-)z]} = \tan\left[\frac{(k_+-k_-)z}{2}\right].$$

Do đó, khi đi sâu vào môi trường này một khoảng cách là z, thì mặt phẳng phân cực của vectơ điện đã quay một góc là

$$\varphi = \frac{k_+-k_-}{2}z = \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{c}(n_+-n_-)z.$$

Vì $n_+ > n_-$ (giả thiết $\beta > 0$), $\varphi > 0$. Tức là, sự quay của mặt phẳng phân cực là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn ngược lại với hướng truyền sóng.

(c) Lực Lorentz tác dụng lên một êlectron trong trường điện từ của một sóng điện từ phẳng là $-e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, trong đó $\mathbf{v}$ là tốc độ êlectron. Vì $\sqrt{\varepsilon_0}\,|\mathbf{E}| = \sqrt{\mu_0}\,|\mathbf{H}|$, hay $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$, ta có

$$\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} \approx \frac{v}{c} \ll 1.$$

Do đó có thể bỏ qua lực từ do sóng này tác dụng lên êlectron. Phương trình chuyển động của một êlectron trong $\mathbf{B}_0$ và ở trong trường điện từ của sóng, khi bỏ qua sự va chạm, là

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0,$$

trong đó $\mathbf{E}$ là tổng $\mathbf{E}_R$ và $\mathbf{E}_L$ trong câu (a). Xét một êlectron tại một điểm z bất kì. Khi đó nghiệm của phương trình chuyển động có dạng

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0e^{-i\omega t}.$$

Sau khi thay vào phương trình chuyển động, ta được

$$-m\omega^2\mathbf{r} = -e\mathbf{E} - e(-i\omega)\mathbf{r}\times\mathbf{B}_0.$$

Êlectron dao động trong trường của sóng, có tác dụng như là một lưỡng cực dao động, mômen lưỡng cực trên một đơn vị thể tích là $\mathbf{P} = -n_0e\mathbf{r}$. Khi đó phương trình trên cho

$$m\omega^2\mathbf{P} = -n_0e^2\mathbf{E} - i\omega e\mathbf{P}\times\mathbf{B}_0,$$

hay, khi sử dụng $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$, ta được

$$m\omega^2\chi\varepsilon_0\mathbf{E} + n_0e^2\mathbf{E} = -i\omega e\chi\varepsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 .$$

Sử dụng các định nghĩa

$$\omega_P^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}, \qquad \omega_B = \frac{n_0e}{\varepsilon_0B_0},$$

và với $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$, phương trình trên trở thành

$$\chi\frac{\omega^2}{\omega_P^2}\mathbf{E} + \mathbf{E} = -i\chi\frac{\omega}{\omega_B}\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z ,$$

hay

$$\left(1 + \chi\frac{\omega^2}{\omega_P^2}\right)E_x + i\chi\frac{\omega}{\omega_B}E_y = 0 , \tag{1}$$

$$\left(1 + \chi\frac{\omega^2}{\omega_P^2}\right)E_y - i\chi\frac{\omega}{\omega_B}E_x = 0 . \tag{2}$$

$(1)\pm i\times(2)$ cho ta

$$\left(1 + \chi\frac{\omega^2}{\omega_P^2}\right)(E_x \pm iE_y) \pm \frac{\chi\omega}{\omega_B}(E_x \pm iE_y) = 0 .$$

Lưu ý rằng $E_x - iE_y = 0$ và $E_x + iE_y = 0$ lần lượt miêu tả các sóng phân cực tròn phải và trái. Vì vậy đối với thành phần phân cực tròn bên phải, mà độ phân cực của nó biểu thị bằng χ_+, $E_x + iE_y \neq 0$, ta có

$$\left(1 + \chi_+\frac{\omega^2}{\omega_P^2}\right) + \chi_+\frac{\omega}{\omega_B} = 0 ,$$

hay

$$\chi_+ = -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_P^2} + \frac{\omega}{\omega_B}} .$$

Tương tự đối với phân cực trái ta có

$$\chi_- = -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_P^2} - \frac{\omega}{\omega_B}} .$$

Vì hằng số điện môi của một môi trường là $\varepsilon = (1+\chi)\varepsilon_0$ cho nên chiết suất là

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1+\chi} .$$

Do đó đối với hai sự phân cực chúng ta có các chiết suất tương ứng

$$n_\pm = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_P^2} \pm \frac{\omega}{\omega_B}}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 \pm \frac{\omega_P^2 \omega}{\omega_B}}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega \pm \omega'_B)}},$$

trong đó

$$\omega'_B = \frac{\omega_P^2}{\omega_B} = \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_0 B_0}{n_0 e} = \frac{B_0 e}{m}.$$

Đối với các tần số đủ lớn, đến mức $\omega \gg \omega_P$, $\omega \gg \omega'_B$, ta nhận được một cách gần đúng

$$\begin{aligned} n_\pm &= \left[1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\left(1 \pm \frac{\omega'_B}{\omega}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_P^2}{\omega^2}\left(1 \mp \frac{\omega'_B}{\omega}\right) \\ &= n \pm \beta \end{aligned}$$

với $n \approx 1 - \frac{\omega_P^2}{2\omega^2}$, $\beta \approx \frac{\omega_P^2}{2\omega^2}\frac{\omega'_B}{\omega}$.

4019

Ánh sáng phân cực thẳng có dạng $E_x(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$ được chiếu vuông góc lên trên một vật liệu có chiết suất n_R đối với ánh sáng phân cực tròn theo quy tắc bàn tay phải và n_L đối với ánh sáng phân cực tròn trái.

Sử dụng các phương trình Maxwell, hãy tính cường độ và sự phân cực của ánh sáng phản xạ.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Dùng các phương trình Maxwell $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ và $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right) \cdot d\mathbf{S}$, ta thấy rằng tại biên của hai môi trường điện môi các thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{H}$ là liên tục. Sau đó vì $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ và hướng truyền của sóng điện từ phẳng tạo ra một tam diện thuận, nên đối với sóng tới vuông góc ta có

$$E + E'' = E', \qquad H - H'' = H',$$

Trong đó dấu phẩy và dấu hai phẩy chỉ các thành phần khúc xạ và phản xạ, một cách tương ứng. Đối với các sóng phẳng ta cũng có

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\,\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\,E \approx n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E\,.$$

Do đó phương trình đối với H sẽ được viết lại là

$$E - E'' = nE'\,,$$

nếu lấy môi trường thứ nhất là không khí ($n = 1$).

Khử E', ta được

$$E'' = \frac{1-n}{1+n}E\,.$$

Đối với sóng tới vuông góc, mặt phẳng tới là tùy ý và hệ thức trên là đúng bất kể trạng thái phân cực. Do đó

$$E''_{\mathrm{L}} = \frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\,E_{\mathrm{L}}\,, \qquad E''_{\mathrm{R}} = \frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}}\,E_{\mathrm{R}}\,.$$

Ánh sáng tới được phân tách thành các thành phần phân cực trái và phải như sau

$$E = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_0\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}E_0\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\,,$$

trong đó $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ biểu diễn ánh sáng phân cực tròn trái và $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ - tròn phải. Do đó biên độ của sóng phản xạ là

$$E'' = \frac{1}{2}E_0\,\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}E_0\frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}E_0\begin{pmatrix} \frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}} + \frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}} \\ i\left(\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}} - \frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\right) \end{pmatrix}\,.$$

Điều này cho thấy rằng ánh sáng phản xạ là bị phân cực elip và tỉ lệ của các cường độ là

$$\frac{I''}{I} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}} + \frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\right)^2 + \left(\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}} - \frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}}\right)^2 + 2\left(\frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-n_{\mathrm{R}}}{1+n_{\mathrm{R}}}\right)^2 + \left(\frac{1-n_{\mathrm{L}}}{1+n_{\mathrm{L}}}\right)^2\right].$$

4020

Một dung dịch dextrose có hoạt tính quang học và được đặc trưng bằng một vectơ phân cực (mômen lưỡng cực điện trên đơn vị thể tích) $\mathbf{P} = \gamma\nabla \times \mathbf{E}$, trong đó γ là một hằng số thực phụ thuộc vào nồng độ dextrose. Dung dịch này là không dẫn ($\mathbf{j}_{\text{free}} = 0$) và không từ tính (vectơ từ hoá $\mathbf{M} = 0$). Hãy xét một sóng điện từ phẳng có tần số góc (thực) ω lan truyền trong dung dịch này. Để rõ ràng, hãy giả thiết sóng này lan truyền trong hướng $+z$. (Ta cũng giả thiết rằng $\frac{\gamma\omega}{c} \ll 1$ cho nên căn bậc 2 có thể lấy gần đúng bằng $\sqrt{1+A} \approx 1 + \frac{1}{2}A$).

(a) Hãy tìm hai chiết suất có thể tồn tại đối với sóng này. Hãy tìm điện trường tương ứng đối với mỗi chiết suất đó.

(b) Hãy giả thiết ánh sáng phân cực thẳng được chiếu tới dung dịch dextrose này. Sau khi đi qua dung dịch một khoảng cách L ánh sáng vẫn phân cực thẳng nhưng hướng phân cực đã bị quay đi một góc là ϕ (sự quay Faraday). Hãy tìm ϕ qua L, γ, và ω.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) **D**, **E**, **P**, **B**, **H**, **M** liên hệ với nhau bởi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}\,, \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})\,.$$

Với $\mathbf{P} = \gamma\nabla \times \mathbf{E}$, $\mathbf{M} = 0$, ta có

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \gamma\nabla \times \mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}\,.$$

Đối với một môi trường tự do không có nguồn, hai trong số các phương trình Maxwell là

$$\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0\,.$$

Phương trình thứ nhất cho

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} + \gamma\mu_0\nabla \times \dot{\mathbf{E}}\,,$$

Trong khi đó phương trình thứ hai cho

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}\,.$$

Khi đó, từ phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}\,,$$

ta có

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}\,,$$

hay

$$-\nabla^2\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} - \gamma\mu_0\nabla\times\ddot{\mathbf{E}}\,. \tag{1}$$

Đối với một sóng điện từ trường phẳng

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y\,,$$

sự thực hiện các toán tử ∇ và $\frac{\partial}{\partial t}$ cho kết quả (xem bài tập **4004**)

$$\nabla \to ik\mathbf{e}_z\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega\,.$$

Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$k^2\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} + i\gamma\mu_0\omega^2 k\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}\,,$$

nó có các phương trình thành phần

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_x + i\gamma\mu_0\omega^2 kE_y = 0\,,$$

$$i\gamma\mu_0\omega^2 kE_x - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_y = 0\,.$$

Hệ hai phương trình này có các nghiệm khác không khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} & i\gamma\mu_0\omega^2 k \\ i\gamma\mu_0\omega^2 k & -(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \end{vmatrix} = -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \gamma^2\mu_0^2\omega^4 k^2 = 0\,,$$

nghĩa là

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \pm\gamma\mu_0\omega^2 k\,.$$

Dấu trên và dưới cho

$$\left(k_\pm^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(E_x \pm iE_y) = 0\,.$$

Do đó sóng này tương đương với hai sóng phân cực tròn. Đối với phân cực tròn phải, $E_x + iE_y \neq 0$ và ta có

$$k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \gamma\mu_0\omega^2 k_+\,.$$

Đối với phân cực tròn trái, $E_x - iE_y \neq 0$ và ta có

$$k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma\mu_0\omega^2 k_- .$$

Giải phương trình đối với $k_\pm$

$$k_\pm^2 \mp \gamma\mu_0\omega^2 k_\pm - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 ,$$

ta được

$$k_\pm = \frac{1}{2}\left[\pm\gamma\mu_0\omega^2 \pm \sqrt{\gamma^2\mu_0^2\omega^4 + \frac{4\omega^2}{c^2}}\right] .$$

Vì $k_\pm$ phải là dương nên chúng ta chọn dấu dương trước căn bậc hai. Do đó

$$k_\pm = \frac{\omega}{c}\left[1 + \left(\frac{\gamma\mu_0\omega c}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\gamma\mu_0\omega^2}{2} .$$

Để chuyển sang hệ đơn vị Gauss, ta phải thay thế $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi}$ bằng 1. Vì vậy $\frac{\gamma\mu_0\omega c}{2}$ là phải được thay bằng $\frac{2\pi\gamma\omega}{c}$, nó được giả thiết là $\ll 1$. Vì vậy $k_\pm \approx \frac{\omega}{c} \pm \frac{\gamma\mu_0\omega^2}{2}$, và $n_\pm = \frac{c}{\omega}k_\pm \approx 1 \pm \frac{\gamma\mu_0\omega c}{2}$.

(b) Nếu ánh sáng đi qua là phân cực thẳng, thì các chiết suất khác nhau đối với các thành phần phân cực tròn sẽ được thể hiện ở chỗ các thành phần sẽ quay bởi các góc khác nhau. Kết hợp lại, mặt phẳng của phân cực sẽ bị quay khi đi qua môi trường. Góc đã quay sau khi đi qua một đoạn L là (xem Bài toán **4018**)

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)L \approx \frac{1}{2}\gamma\mu_0\omega^2 L .$$

4021

Một số chất điện môi đẳng hướng trở thành lưỡng chiết khi chúng được đặt trong một từ trường ngoài tĩnh. Các vật liệu đã *nhiễm từ tính* như thế này được gọi là *hồi chuyển (gyrotropic)* và được đặc trưng bởi hằng số điện môi ε và "vectơ hồi chuyển" g không đổi. Nói chung, g tỉ lệ với từ trường tĩnh đặt lên chất điện môi này. Hãy xét một sóng phẳng đơn sắc

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{B}_0\end{bmatrix} e^{i(K\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

đi qua một vật liệu hồi chuyển. ω là tần số góc đã cho của sóng, và $\hat{\mathbf{n}}$ là hướng lan truyền. $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$, và K là các hằng số phải xác định. Đối với vật liệu *gyrotropic* không dẫn ($\sigma = 0$) và không *thẩm thấu* qua được ($\mu = 1$) độ dịch điện $\mathbf{D}$ và điện trường $\mathbf{E}$ được liên hệ với nhau bởi

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g}),$$

trong đó hằng số điện môi ε là một số thực dương và "vectơ hồi chuyển" $\mathbf{g}$ là một vectơ thực không đổi. Hãy xét các sóng phẳng lan truyền theo hướng $\mathbf{g}$, với $\mathbf{g}$ hướng dọc theo trục z.

$$\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z \quad \text{và} \quad \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_z .$$

(a) Xuất phát từ các phương trình Maxwell, hãy tìm các giá trị khả dĩ của chiết suất $N \equiv Kc/\omega$. Hãy biểu thị các đáp số qua các hằng số ε và g.

(b) Đối với mỗi giá trị khả dĩ của N, hãy tìm sự phân cực tương ứng của $\mathbf{E}_0$.

(*Columbia*)

Lời giải:

Các phương trình Maxwell trong hệ đơn vị Gauss cho môi trường tự do không có nguồn là

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

ở đây chúng ta đã sử dụng $\mu = 1$ và $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Vì vectơ sóng là $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_z$ và sóng điện từ được biểu diễn bằng $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(Kz-\omega t)}$, nên các phương trình trên trở thành (xem Bài toán 4004)

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{K} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D}.$$

Do đó

$$\mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \mathbf{K}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) - K^2\mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D},$$

hay

$$K^2\mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} - \mathbf{K}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) = 0.$$

Dùng hệ thức $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i(\mathbf{E}\times\mathbf{g})$, ta có

$$\left(K^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}) - i\frac{\omega^2}{c^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{g}) = 0\,,$$

hay với $N = \frac{Kc}{\omega}$,

$$(N^2 - \varepsilon)\mathbf{E} - \frac{c^2}{\omega^2}\mathbf{K}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}) - i(\mathbf{E}\times\mathbf{g}) = 0\,.$$

Vì $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_z$, $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$, $N = \frac{Kc}{\omega}$ nên các phương trình thành phần là

$$(N^2 - \varepsilon)E_x - igE_y = 0\,, \tag{1}$$

$$igE_x + (N^2 - \varepsilon)E_y = 0\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon E_z = 0\,. \tag{3}$$

Phương trình (3) cho thấy rằng $E_z = 0$. Vì vậy sóng này là sóng ngang. Để cho nghiệm của (1) và (2) là khác không, cần phải có

$$\det\begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon & -ig \\ ig & N^2 - \varepsilon \end{pmatrix} = 0\,,$$

suy ra

$$(N^2 - \varepsilon)^2 = g^2\,,$$

nghĩa là

$$N = \sqrt{\varepsilon \pm g}\,.$$

Vì vậy chiết suất có hai giá trị

$$N_1 = \sqrt{\varepsilon + g}\,, \qquad N_2 = \sqrt{\varepsilon - g}\,.$$

Thay vào (1) chúng ta nhận được

$$\text{đối với } N_1\text{:} \quad g(E_x - iE_y) = 0\,,$$

$$\text{đối với } N_2\text{:} \quad g(E_x + iE_y) = 0\,.$$

Vì $g \neq 0$, N_1 là chiết suất của thành phần phân cực tròn phải và N_2 là của thành phần phân cực tròn trái. $\mathbf{E}_0$ đối với hai thành phần này, lần lượt là

$$E_{0x} = iE_{0y}\,, \qquad E_{0z} = 0\,,$$

$$E_{0x} = -iE_{0y}\,, \qquad E_{0z} = 0\,.$$

4022

Một sóng điện từ phẳng với tần số góc ω chiếu vuông góc tới một tấm vật liệu không hấp thụ. Bề mặt này nằm trong mặt phẳng xy. Vật liệu này là bất đẳng hướng với

$$\varepsilon_{xx} = n_x^2\varepsilon_0 \quad \varepsilon_{yy} = n_y^2\varepsilon_0 , \quad \varepsilon_{zz} = n_z^2\varepsilon_0 ,$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 , \qquad n_x \neq n_y .$$

(a) Nếu sóng phẳng tới là phân cực thẳng với điện trường của nó lập một góc 45^0 với các trục x và y, thì trạng thái phân cực của sóng phản xạ sẽ là như thế nào đối với một tấm có độ dày vô hạn?

(b) Đối với một tấm có độ dày d, hãy viết phương trình đối với biên độ và pha của các vectơ điện trường truyền qua có sự phân cực theo các hướng x và y.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Hãy xét một sóng điện từ phẳng tới từ một môi trường bất đẳng hướng 1 vào môi trường bất đẳng hướng thứ 2 khác, và hãy chọn hệ trục tọa độ để sóng tới là ở trong mặt phẳng xz, mặt phân cách là mặt xoy như trong hình 4.8. Các sóng tới, phản xạ và truyền qua được biểu diễn như sau

sóng tới: $e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$,

sóng phản xạ: $e^{i(\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}$,

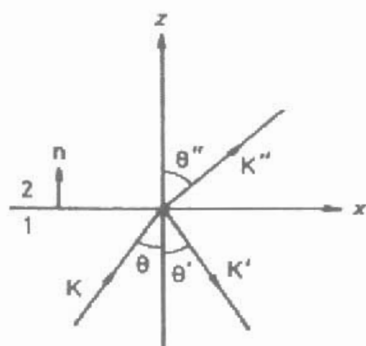
sóng truyền qua: $e^{i(\mathbf{K}''\cdot\mathbf{r}-\omega'' t)}$.

Để các thành phần tiếp tuyến của **E** và **H** là liên tục ở mặt phân cách, cần phải có

$$K_x = K'_x = K''_x ,$$
$$K_z = K'_z = K''_z$$
$$\omega = \omega' = \omega'' .$$

Từ đó, ta có các định luật phản xạ và khúc xạ

$$K(\theta)\sin\theta = K'(\theta')\sin\theta' ,$$
$$K(\theta)\sin\theta = K''(\theta'')\sin\theta'' .$$



Hình 4.8

(a) Vì môi trường 1 được cho là không khí hoặc chân không, nên ta có $K = K' = \frac{\omega}{c}$. Đối với sóng tới vuông góc

$$\theta = \theta' = \theta'' = 0\,,$$

cho nên

$$\mathbf{K} = K\mathbf{n}\,, \quad \mathbf{K}' = -K\mathbf{n}\,, \quad \mathbf{K}'' = K''\mathbf{n}\,. \qquad (\mathbf{n} = \mathbf{e}_z)$$

Từ phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$, ta có (Bài toán **4004**)

$$\mathbf{K}'' \times \mathbf{H}'' = -\omega \mathbf{D}''\,. \tag{1}$$

Vì $\mathbf{K}''$ là song song với $\mathbf{e}_z$, nên $\mathbf{D}''$ và $\mathbf{H}''$ nằm trong mặt phẳng xy. Hãy lấy các trục dọc theo các trục chính của chất điện môi, khi đó

$$D''_i = \varepsilon_{ii} E''_i\,, \qquad (i = x, y, z)$$

và

$$\mathbf{E}'' = E''_x \mathbf{e}_x + E''_y \mathbf{e}_y\,. \qquad D''_z = E''_z = 0\,.$$

Nếu sóng tới là phân cực thẳng với điện trường của nó lập một góc 45^0 so với các trục x và y, ta có

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y\,,$$

với $E_x^2 + E_y^2 = E^2$, $E_x = E_y = \frac{E}{\sqrt{2}}$.

Giả sử sóng phản xạ là $\mathbf{E}' = E'_x \mathbf{e}_x + E'_y \mathbf{e}_y$. Sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của điện trường qua mặt phân cách cho ta

$$E_x + E'_x = E''_x\,; \tag{2}$$

$$E_y + E'_y = E''_y \,. \tag{3}$$

Phương trình (1) cũng áp dụng cho sóng tới và sóng phản xạ. Vì môi trường 1 là đẳng hướng với hằng số điện môi ε_0, ta có

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \frac{\omega}{K} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \frac{\omega}{K}(E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) \,,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}' = \varepsilon_0 \frac{\omega}{K} \mathbf{E}' = \varepsilon_0 \frac{\omega}{K}(E'_x \mathbf{e}_x + E'_y \mathbf{e}_y) \,,$$

Cũng như vậy

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}'' = -\frac{\omega}{K''} \mathbf{D}'' = -\frac{\omega}{K''}(\varepsilon_{xx} E''_x \mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} E''_y \mathbf{e}_y) \,.$$

Sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{H}$ qua mặt phân cách, $\mathbf{n} \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}') = \mathbf{n} \times \mathbf{H}''$, khi đó cho

$$\frac{\varepsilon_0}{K}(E_x - E'_x) = \frac{\varepsilon_{xx}}{K''} E''_x \,,$$

$$\frac{\varepsilon_0}{K}(E_y - E'_y) = \frac{\varepsilon_{yy}}{K''} E''_y \,.$$

Sử dụng $\varepsilon_{xx} = n_x^2 \varepsilon_0$, $\varepsilon_{yy} = n_y^2 \varepsilon_0$, $\varepsilon_{zz} = n_z^2 \varepsilon_0$ và $K'' = \frac{\omega}{v''_z} = \frac{\omega}{c} n_z = n_z K$, các phương trình này trở thành

$$E_x - E'_x = \frac{n_x^2}{n_z} E''_x \,, \tag{4}$$

$$E_y - E'_y = \frac{n_y^2}{n_z} E''_y \,. \tag{5}$$

Kết hợp các phương trình (2) với (5), ta có

$$E'_x = \left(\frac{n_z - n_x^2}{n_z + n_x^2} \right) E_x \,, \qquad E''_x = \frac{2 n_z}{n_x^2 + n_z} E_x \,,$$

$$E'_y = \left(\frac{n_z - n_y^2}{n_z + n_y^2} \right) E_y \,, \qquad E''_y = \frac{2 n_z}{n_y^2 + n_z} E_y \,.$$

Vì $E_x^2 + E_y^2 = E^2$ ta có

$$\left(\frac{E'_x}{a} \right) + \left(\frac{E'_y}{b} \right)^2 = 1 \,,$$

trong đó

$$a = \left(\frac{n_z - n_x^2}{n_z + n_x^2} \right) E \,,$$

$$b = \left(\frac{n_z - n_y^2}{n_z + n_y^2}\right) E\,,$$

cho thấy rằng sóng phản xạ là phân cực elip với **E** song song với mặt phẳng xy.

(b) Đối với một tấm với độ dày d, sóng truyền qua $\mathbf{E}''$ ở trên trở thành sóng tới trên mặt phẳng $z = d$. Hãy biểu thị ba sóng này tại biên bằng chỉ số 1, như trên hình 4.9. Khi đó đối với sóng tới ta có

$$\mathbf{K}_1 = K_1\mathbf{n}\,, \quad K_1 = n_z K\,, \quad \mathbf{E}_1 = E_{1x}\mathbf{e}_x + E_{1y}\mathbf{e}_y\,,$$

$$E_{1x} = \frac{2n_z}{n_x^2 + n_z} E_x\,,$$

$$E_{1y} = \frac{2n_z}{n_y^2 + n_z} E_y\,,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = -\frac{\omega}{K_1}\left(\varepsilon_{xx} E_{1x}\mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} E_{1y}\mathbf{e}_y\right);$$

đối với sóng khúc xạ

$$\mathbf{K}_1' = -K_1\mathbf{n}\,,$$

$$\mathbf{E}_1' = E_{1x}'\mathbf{e}_x + E_{1y}'\mathbf{e}_y\,,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1' = \frac{\omega}{K_1}\left(\varepsilon_{xx} E_{1x}'\mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} E_{1y}'\mathbf{e}_y\right);$$

đối với sóng truyền qua

$$\mathbf{K}_1'' = K\mathbf{n}\,,$$

$$\mathbf{E}_1'' = E_{1x}''\mathbf{e}_x + E_{1y}''\mathbf{e}_y\,,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1'' = -\varepsilon_0\frac{\omega}{K}\left(E_{1x}''\mathbf{e}_x + E_{1y}''\mathbf{e}_y\right).$$

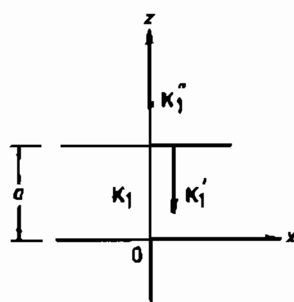
Các điều kiện biên đối với mặt phân cách $z = d$ cho

$$E_{1x}e^{iK_1d} + E_{1x}'e^{-iK_1d} = E_{1x}''e^{iKd}\,, \tag{6}$$

$$E_{1y}e^{iK_1d} + E_{1y}'e^{-iK_1d} = E_{1y}''e^{iKd}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\omega}{K_1}\varepsilon_{xx}\left(E_{1x}e^{iK_1d} - E_{1x}'e^{-iK_1d}\right) = \varepsilon_0\frac{\omega}{K}E_{1x}''e^{iKd}\,,$$

$$\frac{\omega}{K_1}\varepsilon_{yy}\left(E_{1y}e^{iK_1d} - E_{1y}'e^{-iK_1d}\right) = \varepsilon_0\frac{\omega}{K}E_{1y}''e^{iKd}\,.$$



Hình 4.9

Có thể viết lại 2 phương trình cuối cùng như sau

$$E_{1x}e^{iK_1d} - E'_{1x}e^{-iK_1d} = \frac{n_z}{n_x^2}E''_{1x}e^{iKd} \tag{8}$$

$$E_{1y}e^{iK_1d} - E'_{1y}e^{-iK_1d} = \frac{n_z}{n_y^2}E''_{1y}e^{iKd}\,. \tag{9}$$

Hệ phương trình (6), (7), (8), (9) cho ta biên độ và pha của 3 sóng điện từ ở mặt phân cách thứ 2. Trong thực tế, sóng phản xạ $\mathbf{K}_1'$ lại trở thành sóng tới trong mặt phẳng $z = 0$ và sự phản xạ và truyền qua sẽ lại cũng xảy ra, và cứ tiếp diễn như vậy. Sự phản xạ nhiều lần như vậy xảy ra giữa các bề mặt trên và dưới của tấm, với một phần năng lượng truyền ra khỏi tấm đó sau mỗi lần phản xạ.

4023

Hãy xét một sóng điện từ có tần số góc ω trong môi trường chứa các êletron tự do với mật độ n_e.

(a) Hãy tìm mật độ dòng sinh ra bởi E (bỏ qua tương tác giữa các êlectron).

(b) Từ các phương trình Maxwell hãy viết các phương trình vi phân đối với sự phụ thuộc không gian của một sóng có tần số ω trong một môi trường như trên.

(c) Từ các phương trình này hãy tìm điều kiện cần và đủ để các sóng điện từ đó lan truyền trong môi trường này một cách vô hạn.

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của một êlectron trong trường của một sóng điện từ là

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E},$$

trong đó chúng ta bỏ qua ảnh hưởng của từ trường, mà độ lớn của nó là vE/c, khi $v \ll c$. Đối với một sóng có tần số góc ω, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ và phương trình trên cho ta

$$\mathbf{v} = -i\frac{e}{m_e\omega}\mathbf{E}.$$

Do đó mật độ dòng là

$$\mathbf{j} = -n_e e\mathbf{v} = i\frac{n_e e^2 \mathbf{E}}{m_e\omega}.$$

(b) Các phương trình Maxwell là

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

Các phương trình (2) và (4) cho

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

vì $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$.

Ta có thể coi môi trường là không có điện tích, ngoài các êlectron tự do. Vì vậy (1) cho $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. Ta cũng có thể viết

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{i\omega}\frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e\omega^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Do đó

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

với

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}.$$

Tương tự, ta nhận được

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Các phương trình sóng có thể được viết dưới dạng

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)\mathbf{E}_0 = 0$$

bằng cách đặt $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$, sẽ cho ta sự phụ thuộc không gian.

(c) Nghiệm của phương trình cuối cùng có dạng $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})$, suy ra

$$K^2c^2 = \omega^2 - \omega_P^2\,.$$

Điều kiện cần và đủ để các sóng điện từ lan truyền trong môi trường này một cách vô hạn là K phải là số thực, tức là $\omega^2 > \omega_P^2$, hay

$$n_e < \frac{\varepsilon_0 m_e\omega^2}{e^2}\,.$$

4024

Một sóng điện từ với điện trường được cho bởi

$$E_y = E_0 e^{i(Kz-\omega t)}\,, \qquad E_x = E_z = 0\,,$$

lan truyền trong một môi trường đồng nhất gồm có n êlectron tự do trong một đơn vị thể tích. Tất cả các điện tích khác trong môi trường là đứng yên và không ảnh hưởng đến sóng này.

(a) Hãy viết các phương trình Maxwell đối với các trường trong môi trường này.

(b) Hãy chỉ ra rằng chúng có thể được thỏa mãn bởi sóng này với điều kiện $\omega^2 > \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$.

(c) Hãy tìm từ trường và bước sóng của sóng điện từ đối với một ω đã cho (được phép). Bỏ qua lực do từ trường tác dụng lên các êlectron.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a), (b) xem lời giải của Bài toán **4023**.

(c) Sử dụng phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

vì

$$\nabla \times \mathbf{E} = iK\mathbf{e}_z \times E_y\mathbf{e}_y = -iKE_z\mathbf{e}_x,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{B},$$

ta có

$$\mathbf{B} = -\frac{K}{\omega}E_0e^{i(Kz-\omega t)}\mathbf{e}_x.$$

Lưu ý rằng ta đã sử dụng $\nabla\times = -i\mathbf{K}\times$ từ Bài toán **4004**.

3. SỰ LAN TRUYỀN CỦA CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG MỘT MÔI TRƯỜNG (4025–4045)

4025

Khoảng cách suy giảm đối với một sóng phẳng truyền trong một vật dẫn tốt là gì? Hãy biểu diễn câu trả lời của bạn qua độ dẫn σ, độ từ thẩm μ, và tần số ω.

(*Coulumbia*)

Lời giải:

Đối với một môi trường dẫn Ohmic có hằng số điện môi ε, độ từ thẩm μ độ dẫn σ, thì phải dùng phương trình sóng tổng quát, có dạng

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\ddot{\mathbf{E}} - \mu\sigma\dot{\mathbf{E}} = 0.$$

Đối với các sóng điện từ phẳng có tần số góc ω, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}$, thì phương trình trên trở thành

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 + \mu\varepsilon\omega^2\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\mathbf{E}_0 = 0.$$

So sánh phương trình này với phương trình sóng đối với một chất điện môi, ta thấy rằng đối với vật dẫn ta phải thay

$$\mu\varepsilon \rightarrow \mu\varepsilon\left(1+\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right),$$

nếu muốn sử dụng các kết quả cho một chất điện môi.

Hãy xét sóng phẳng khi nó chiếu vuông góc lên vật dẫn hướng vào trong, và ta hướng này làm trục z. Khi đó có thể biểu diễn sóng điện từ này trong vật dẫn như sau

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} .$$

Vectơ sóng có độ lớn

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1+\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Giả sử $k = \beta + i\alpha$. Ta có

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon , \qquad \alpha\beta = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma .$$

Đối với một vật dẫn tốt, nghĩa là với $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$, ta có nghiệm

$$\alpha = \beta = \pm\sqrt{\frac{\omega\varepsilon\sigma}{2}} .$$

Do đó trong vật dẫn ta có

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z-\omega t)} .$$

Theo định nghĩa của vectơ sóng, β phải lấy dấu dương. Vì sóng này không thể khuếch đại trong vật dẫn, nên α cũng phải lấy dấu dương. Độ dài suy giảm δ là khoảng cách mà sóng đi qua để biên độ của nó giảm đi e lần so với giá trị ban đầu. Do đó

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} .$$

4026

Cho một sóng điện từ phân cực phẳng

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega\left[t - \frac{n}{c}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\right]\right\},$$

từ các phương trình Maxwell hãy rút ra các hệ thức giữa **E**, **K** và từ trường **H**. Hãy viết biểu thức của chiết suất n qua ω, ε, μ, σ (độ dẫn).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Các phương trình Maxwell cho môi trường dẫn ohmic không có điện tích là

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (1) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & (3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & (4) \end{cases}$$

với

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Đối với loại sóng đã cho ta có $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$, $\nabla \to -i\frac{n\omega}{c}\mathbf{K}$ (xem Bài toán **4004**). Khi đó các phương trình (3) và (4) cho

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} = 0,$$

và (1) cho

$$i\frac{n\omega}{c}\mathbf{K} \times \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H},$$

hay

$$\mathbf{H} = \frac{n}{\mu c}\mathbf{K} \times \mathbf{E}.$$

Tác dụng toán tử ∇ lên cả 2 vế của biểu thức (1) và sử dụng (2) và (3) ta có

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

hay

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \left(\mu\varepsilon - i\frac{\mu\sigma}{\omega}\right)\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

đó là phương trình mô tả một sóng lan truyền với vận tốc pha v được xác định bởi

$$v^2 = \left(\mu\varepsilon - i\frac{\mu\sigma}{\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1}.$$

Vì vậy chiết suất của môi trường là

$$n = \frac{c}{v} = \left[\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}\left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Viết $n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}(\beta - i\alpha)$, ta có

$$\beta^2 - \alpha^2 = 1 , \qquad \alpha\beta = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} .$$

Giải phương trình đối với α và β, ta tìm được

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2\mu_0\varepsilon_0}}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2}+1} - i\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2}-1}\right] .$$

4027

Một sóng điện từ phẳng phân cực $E = E_{y0}e^{i(Kz-\omega t)}$ chiếu vuông góc tới một vật liệu bán vô hạn có độ từ thẩm μ, hằng số điện môi ε, và độ dẫn σ.

(a) Từ các phương trình Maxwell hãy rút ra biểu thức cho điện trường trong vật liệu khi σ là lớn và là số thực như là đối với kim loại ở các tần số thấp.

(b) Hãy làm giống như vậy đối với một plasma loãng, trong đó độ dẫn bị giới hạn bởi quán tính chứ không phải bởi tán xạ của các êlectron, và có độ dẫn là

$$\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega} .$$

(c) Từ các lời giải này hãy bình luận về các tính chất quang của các kim loại trong vùng tử ngoại.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Hãy giả thiết môi trường này là ohmic và không có điện tích, khi đó $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, $\rho = 0$ và các phương trình Maxwell là

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

Cũng giả thiết rằng môi trường là tuyến tính, đẳng hướng và đồng nhất, cho nên

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} , \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} .$$

Đối với một sóng điện từ hình sin

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\,,\qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

trong môi trường dẫn các phương trình Maxwell trở thành

$$\begin{aligned}&\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})=i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})\,,\\&\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})+\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r})\,,\\&\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})=\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})=0\,.\end{aligned}$$

Sử dụng các phương trình này ta nhận được

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})&=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=-\nabla^2\mathbf{E}\\&=i\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}=(\omega^2\varepsilon\mu+i\omega\mu\sigma)\mathbf{E}\,,\end{aligned}$$

nghĩa là

$$\nabla^2\mathbf{E}+(\omega^2\varepsilon\mu+i\omega\mu\sigma)\mathbf{E}=0\,. \qquad (1)$$

Bằng cách đặt

$$K''^2=\omega^2\mu\varepsilon''\,,\qquad \varepsilon''=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\,,$$

ta có thể viết phương trình (1) như sau

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r})+K''^2\mathbf{E}(\mathbf{r})=0\,.$$

Đây là phương trình Helmholtz với nghiệm là sóng phẳng

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}_0e^{i\mathbf{K}''\cdot\mathbf{r}}\,,$$

trong đó vectơ $\mathbf{K}''$ có độ lớn là một số phức

$$K''=\omega\left[\mu\left(\varepsilon+\frac{i\sigma}{\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\beta+i\alpha,\ \ .$$

với β và α được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\,,\\ \beta\alpha=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\,,\end{cases}$$

có nghiệm là

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{1/2}\,,$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{1/2}$$

Sóng tới đã cho là $E = E_{y0}e^{i(Kz-\omega t)}$, cho nên $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_z$, $\mathbf{E}_0 = E_{y0}\mathbf{e}_y$, $\mathbf{H}_0 = H_{x0}\mathbf{e}_x$. Giả sử các sóng phản xạ và truyền qua là

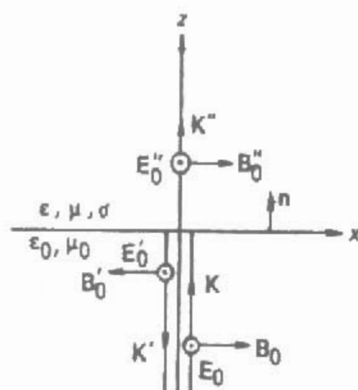
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_0 e^{i(\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{K}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}'' = \mathbf{H}''_0 e^{i(\mathbf{K}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Vì **E**, **B**, **K** tạo thành một tam diện thuận và sóng tới là phân cực với **E** theo hướng y các vectơ này đã được chỉ ra trong hình 4.10. Để thỏa mãn điều kiện biên nói rằng thành phần tiếp tuyến của **E** là liên tục ở mọi điểm của mặt phân cách, chúng ta yêu cầu các số mũ có liên quan là phải giống nhau, điều này nói chung sẽ dẫn đến các định luật phản xạ và khúc xạ, và rằng các biên độ cần thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} E_{y0} + E'_{y0} = E''_{y0}, & (2) \\ H_{x0} - H'_{x0} = H''_{x0}. & (3) \end{cases}$$

Vì các sóng là sóng điện từ phẳng, ta có



Hình 4.10

$$H_{x0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{y0}, \qquad H'_{x0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E'_{y0},$$

$$H''_{x0} = \frac{K''}{\omega\mu}\,E''_{y0},$$

và có thể viết (3) như là

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(E_{y0} - E'_{y0}) = \frac{K''}{\omega\mu} E''_{y0} . \tag{4}$$

Các phương trình (2) và (4) cho

$$E''_{y0} = \frac{2E_{y0}}{1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{K''}{\omega\mu}} . \tag{5}$$

(a) Nếu σ là lớn và là số thực như là kim loại tại các tần số thấp, ta có

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1 , \qquad \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} \pm 1 \approx \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} ,$$

và vì vậy

$$\beta = \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} ,$$

hay

$$K'' = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1 + i) .$$

Do đó

$$\begin{aligned} E''_{y0} &= \frac{2E_{y0}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{2\varepsilon_0\omega\mu}}\right) + i\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{2\varepsilon_0\omega\mu}}} \approx 2E_{y0}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\mu\omega}{\mu_0\sigma}}(1 + i)^{-1} \\ &= 2E_{y0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu\omega}{\mu_0\sigma}} e^{-i\frac{\pi}{4}} , \end{aligned}$$

vì $\mu \approx \mu_0$, $\varepsilon_0 \sim \varepsilon$, $\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{2\varepsilon_0\mu\omega}} \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} \gg 1$. Khi đó phương trình (5) cho

$$E''_{y0} \approx 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu\omega}{\mu_0\sigma}} E_{y0} e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t - \frac{\pi}{4})} \mathbf{e}_y$$

đối với điện trường trong môi trường dẫn.

(b) Đối với một môi trường plasma loãng $\mu \approx \mu_0$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, với $\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega}$, (1) sẽ trở thành

$$\nabla^2\mathbf{E} + \mu_0\varepsilon_0(\omega^2 - \omega_P^2)\mathbf{E} = 0 ,$$

trong đó $\omega_P^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ là tần số (góc) plasma của môi trường. Do đó

$$K''^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_P^2) .$$

Nếu $\omega_P < \omega$, K'' là số thực và (5) trở thành

$$E''_{y0} = \frac{2E_{y0}}{1 + \frac{cK''}{\omega}} = \frac{2E_{y0}}{1 + (1 - \omega_P^2/\omega^2)^{1/2}},$$

suy ra

$$\mathbf{E}''_y = E''_{y0} e^{i(K''z - \omega t)} \mathbf{e}_y .$$

Nếu $\omega_P^2 > \omega^2$, K'' là số ảo và

$$E''_{y0} = \frac{2E_{y0}}{1 + i(\omega_P^2/\omega^2 - 1)^{1/2}},$$

$$E''_y = E''_{y0} e^{-|K''|z} e^{-i\omega t} .$$

(c) Mật độ số êlectron đặc trưng của các kim loại là $n \approx 10^{22}/\text{cm}^3$. Tần số plasma tương ứng là

$$\omega_P = \left(\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{10^{22} \times 10^6 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}\right)^{1/2}$$
$$\approx 0,56 \times 10^{16}\ \text{s}^{-1} .$$

Đối với ánh sáng tử ngoại, tần số góc là $\omega > 10^{16}\ \text{s}^{-1}$. Nên điều kiện $\omega_P < \omega$ được thỏa mãn và ánh sáng tử ngoại có thể lan truyền một cách thông thường trong các kim loại.

4028

Một sóng điện từ phẳng có tần số ω và số sóng K lan truyền theo hướng $+z$. Đối với $z < 0$, môi trường là không khí với $\varepsilon = \varepsilon_0$ và độ dẫn $\sigma = 0$. Với $z > 0$, môi trường là chất điện môi tổn hao với $\varepsilon > \varepsilon_0$ và độ dẫn $\sigma > 0$. Giả thiết rằng $\mu = \mu_0$ trong cả hai môi trường.

(a) Hãy tìm hệ thức tán sắc (mối liên hệ giữa ω và K) trong môi trường tổn hao này.

(b) Hãy tìm các giá trị tới hạn của K đối với vật dẫn rất tốt và vật dẫn rất kém.

(c) Hãy tìm độ xuyên sâu e^{-1} (δ) đối với công suất sóng phẳng trong môi trường tổn hao.

(d) Hãy tìm hệ số truyền công suất T đối với sự truyền từ $z < 0$ đến $z > 0$, với giả thiết $\sigma \ll \varepsilon\omega$ trong môi trường tổn hao.

(e) Phần lớn các lò vi sóng hoạt động ở tần số 2,45 GHz. Ở tần số này, với thịt bò, ta có các đại lượng gần đúng sau $\varepsilon/\varepsilon_0 = 49$ và $\sigma = 2$ mho m^{-1}. Hãy đánh giá T và δ qua các đại lượng đó. Có thể sử dụng các phép gần đúng ở các chỗ cần thiết. Câu trả lời của bạn về δ có chỉ ra lợi thế của việc nướng bằng vi sóng so với nướng bằng hồng ngoại hay không?

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Trong môi trường tổn hao, số sóng K' là số phức, $\mathbf{K}' = (\beta + i\alpha)\mathbf{e}_x$. Từ Bài toán **4025**, thấy rằng K' liên quan với ω bằng $K'^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})$. Vì vậy

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon\,,$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}\omega\mu_0\sigma\,.$$

Giải hệ phương trình này, ta được

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{1/2},$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{1/2}.$$

Vì chiết suất được định nghĩa là $n = \frac{cK}{\omega} = \frac{c}{\omega}(\beta + i\alpha)$, nên các phương trình này cho hệ thức tán sắc đối với môi trường.

(b) Đối với một vật dẫn rất tốt, $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$, và ta có

$$\beta = \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\,.$$

Đối với một chất dẫn rất kém, $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1$, và ta có

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\,, \qquad \alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\,.$$

(c) Có thể biểu diễn sóng truyền qua như $E_2 = E_{20}e^{-\alpha z}e^{i(\beta z - \omega t)}$. Do đó độ xuyên sâu e^{-1} là

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}}\left[\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{-1/2}.$$

Đối với một vật dẫn rất tốt: $\delta \approx \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$. Đối với một vật dẫn rất kém: $\delta \approx \dfrac{2}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu_0}}$.

(d) Theo lời giải của Bài toán **4011**, ta có

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{2}{1 + n'},$$

trong đó n' là chiết suất của môi trường tổn hao. Ở đây n' là số phức

$$n' = \frac{c}{\omega}(\beta + i\alpha).$$

Đối với $\sigma \ll \varepsilon\omega$,

$$\begin{aligned} n' &= \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon} + \frac{i\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(1 + \frac{i}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right) \\ &= n\left(1 + \frac{i}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right), \end{aligned}$$

trong đó

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Năng lượng trung bình tới hay rời một đơn vị diện tích của mặt phân cách trong đơn vị thời gian là độ lớn của vectơ Poynting trung bình $\overline{S}$ (Bài toán **4011**)

Đối với sóng tới: $\overline{S}_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_{10}|^2$. Đối với sóng đã truyền qua: $\overline{S}_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu_0}}|E_{20}|^2$.

Do đó hệ số truyền công suất là

$$\begin{aligned} T = \frac{\overline{S}_2}{\overline{S}_1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left|\frac{E_{20}}{E_{10}}\right|^2 = \frac{4n}{|1 + n'|^2} \\ &= \frac{4n}{(1 + n)^2 + n^2\sigma^2/4\varepsilon^2\omega^2}. \end{aligned}$$

(e) Để nấu thịt bò trong lò vi sóng đã cho, ta có

$$\varepsilon\omega = 49 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2\pi \times 2,45 \times 10^{9}\ \text{mho/m} \approx 7\ \text{mho/m} > \sigma\,.$$

Nếu coi thịt bò như là chất dẫn kém, thì độ xuyên sâu và hệ số truyền công suất lần lượt là

$$\delta = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} = \frac{2 \times 7}{2}\sqrt{\frac{8,85 \times 10^{-12}}{12,6 \times 10^{-7}}} \approx 1,85\ \text{cm}\,,$$

$$T = \frac{4n}{(1+n)^2 + n^2\sigma^2/4\varepsilon^2\omega} \approx \frac{4 \times 7}{8^2 + 7^2 \times 2^2/4 \times 7^2} \approx 0,43\,.$$

$$\left(n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = 7\right)$$

Bước sóng của các tia hồng ngoại là gần bằng 10^{-3} cm, nên tần số của nó là $\sim 3 \times 10^{13}$ Hz. Đối với thịt bò ở trong lò hồng ngoại, $\varepsilon\omega \approx \frac{7\times 3\times 10^{13}}{2,45\times 10^{9}} \approx 10^5$ mho/m $\gg \sigma$, nên nó vẫn là một chất dẫn kém. Vì vậy độ xuyên sâu và hệ số truyền công suất của tia hồng ngoại trong thịt bò sẽ giống như là ở trong các lò vi sóng. Do đó đối với việc nướng thịt bò, ảnh hưởng của hai loại sóng là gần như nhau cả về mức độ xuyên sâu của năng lượng và độ hấp thụ. Điều này nói lên rằng không có lợi gì hơn khi nướng bằng lò vi sóng so với khi nướng bằng lò hồng ngoại.

4029

(a) Các tia X đập vào bề mặt kim loại với góc tới lớn hơn góc tới hạn θ_0 thì chúng sẽ bị phản xạ toàn phần. Giả thiết rằng một kim loại chứa n êlectron tự do trong một đơn vị thể tích, hãy tính θ_0 như là hàm của tần số góc ω của các tia X.

(b) Nếu ω và θ có giá trị sao cho sự phản xạ toàn phần không xảy ra, hãy tính phần đã bị phản xạ của sóng tới? Để cho đơn giản hãy giả thiết vectơ phân cực của các tia X là vuông góc với mặt phẳng tới.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động của một êlectron trong trường của các tia X là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\,.$$

Nghiệm giải của nó có dạng $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$. Thay vào phương trình chuyển động ta được

$$m\omega^2 \mathbf{x} = e\mathbf{E}\,.$$

Như vậy mỗi êlectron có tác dụng như là một lưỡng cực Hertz, nên vectơ phân cực của kim loại là

$$\mathbf{P} = -ne\mathbf{x} = \chi\varepsilon_0 \mathbf{E}\,.$$

Nó cho độ phân cực là

$$\chi = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2}\,.$$

Nếu cho $\omega_P^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$, thì chiết suất của kim loại là

$$n = \sqrt{1+\chi} = \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)^{1/2},$$

và góc tới hạn là

$$\theta_0 = \arcsin\left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)^{1/2}.$$

b) Vì giả thiết rằng các tia X là bị phân cực với **E** vuông góc với mặt phẳng tới, nên **E** là tiếp tuyến với bề mặt kim loại. Nếu kí hiệu các đại lượng có một dấu phẩy và hai dấu phẩy là các tia phản xạ và khúc xạ một cách tương ứng, ta có

$$E + E' = E''\,, \tag{1}$$

$$H\cos\theta - H'\cos\theta' = H''\cos\theta''\,. \tag{2}$$

Lưu ý rằng **E**, **H** và hướng lan truyền tạo thành tam diện thuận. Vì

$$\theta = \theta'\,, \qquad \sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H\,, \qquad \mu \approx \mu_0\,,$$

có thể viết lại (2) như sau

$$E - E' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\,\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}\,E'' = \frac{n\cos\theta''}{\cos\theta}\,E''\,. \tag{3}$$

Từ (1) và (3) cho ta

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos\theta - n\cos\theta''}{\cos\theta + n\cos\theta''}\,.$$

Vì $\theta = \theta'$ và cường độ là $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2$, nên hệ số phản xạ là

$$R = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta - n\cos\theta''}{\cos\theta + n\cos\theta}\right)^2.$$

4030

Xét một không gian được choán một phần bởi một vật liệu có độ cảm χ liên tục nhưng phụ thuộc vào tọa độ và độ dẫn σ được cho bởi (χ_∞, λ, σ_∞ là các hằng số dương)

$$\chi(z) = \begin{cases} 0, & -\infty < z \leq 0, \\ \chi_\infty(1 - e^{-\lambda z}), & 0 < z < \infty; \end{cases}$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0, & -\infty < z \leq 0, \\ \sigma_\infty(1 - e^{-\lambda z}), & 0 < z < \infty. \end{cases}$$

Không gian này là vô hạn theo các hướng x, y. Và $\mu = 1$ trong toàn bộ không gian. Một sóng phẳng phân cực - s (tức là, $\mathbf{E}$ là vuông góc với mặt phẳng tới) đi từ âm vô cực đến dương vô cực tới bề mặt tại $z = 0$ với góc tới θ (góc giữa pháp tuyến và k_0), ($k_0 c = \omega$)

$$\mathbf{E}_y^{\mathrm{I}}(\mathbf{r}, t) = A \exp[i(xk_0 \sin\theta + zk_0 \cos\theta - \omega t)]\mathbf{e}_y .$$

Sóng phản xạ được cho bởi

$$\mathbf{E}_y^{\mathrm{R}}(\mathbf{r}, t) = R \exp[i(xk_0 \sin\theta - zk_0 \cos\theta - \omega t)]\mathbf{e}_y ,$$

và sóng đã truyền qua được cho bởi

$$\mathbf{E}_y^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}, t) = E(z) \exp[i(xk' \sin\gamma - \omega t)]\mathbf{e}_y .$$

A và R là các biên độ của sóng tới và sóng phản xạ. $E(z)$ là một hàm mà bạn phải xác định. γ là góc giữa pháp tuyến và k'.

(a) Hãy tìm các biểu thức cho từ trường của sóng tới, sóng phản xạ và sóng truyền qua theo các thông số trên.

(b) Hãy làm khớp các điều kiện biên tại $z = 0$ cho các thành phần của các trường này (Gợi ý: Hãy nhớ lại định luật Snell!)

(c) Hãy sử dụng các phương trình Maxwell và các hệ thức sau

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \qquad \varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + 4\pi\chi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma(\mathbf{r})$$

để tìm phương trình sóng cho $\mathbf{E}_y^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}, t)$.

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Các vectơ sóng tới và sóng phản xạ lần lượt là

$$\mathbf{k}^{\mathrm{I}} = (k_0 \sin\theta,\, 0,\, k_0\cos\theta)\,, \qquad \mathbf{k}^{\mathrm{R}} = (k_0 \sin\theta,\, 0,\, -k_0\cos\theta)\,.$$

Đối với các sóng điện từ phẳng hình sin, ta có (Bài toán **4004**) $\nabla \to i\mathbf{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$. Khi đó phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ cho

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}(-i\omega)\mathbf{B}\,,$$

hay

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}\,.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{\mathrm{I}} &= \frac{c}{\omega}\mathbf{k}^{\mathrm{I}} \times \mathbf{E} = (-\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_z\sin\theta)E_y(\mathbf{r},t)\\ &= (-\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_z\sin\theta)A\exp[i(xk_0\sin\theta + zk_0\cos\theta - \omega t)]\,,\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{R}} = (\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_z\sin\theta)R\exp\left[i(xk_0\sin\theta - zk_0\cos\theta - \omega t)\right].$$

Từ trường của sóng truyền qua là

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} &= \frac{c}{i\omega}\nabla \times \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\\ &= \frac{c}{i\omega}\left[e_z E(z)(ik'\sin\gamma) - e_x\frac{\partial E(z)}{\partial z}\right]\exp[i(k'x\sin\gamma - \omega t)]\,.\end{aligned}$$

(b) E_t và H_t là liên tục qua biên, nghĩa là, đối với $z = 0$

$$\mathbf{E}_y^{\mathrm{I}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_y^{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_y^{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t)\,,$$

$$[\mathbf{B}^{\mathrm{I}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t)]\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_x\,.$$

B_n cũng liên tục qua biên

$$[\mathbf{B}^{\mathrm{I}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t)]\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_z\,.$$

Cũng áp dụng, định luật Snell với $z = 0$; ta được

$$k_0\sin\theta = k'\sin\gamma\,.$$

Kết hợp những phương trình trên ta nhận được

$$A + R = E(0)\,,$$

$$k_0(R - A)\cos\theta = i\left(\frac{\partial E(z)}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

(c) Kết hợp các phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J},$$

trong đó

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E},$$

ta có

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}.$$

Vì

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E},$$

đối với môi trường dẫn không có điện tích, nên phương trình trên trở thành

$$\nabla^2\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E} = 0.$$

Đây là phương trình sóng đối với môi trường dẫn không có điện tích. Hãy áp dụng phương trình này cho sóng truyền qua. Vì

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{E}^{\mathrm{T}} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E(z)\exp[i(xk'\sin\gamma - \omega t)]\mathbf{e}_y \\
&= \left[-E(z)k'^2\sin^2\gamma + \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2}\right]\exp[i(xk'\sin\gamma - \omega t)]\mathbf{e}_y, \\
\varepsilon &= 1 + 4\pi\chi
\end{aligned}$$

theo định nghĩa của độ cảm điện

$$\chi = \chi_\infty(1 - e^{\lambda z}), \qquad \sigma = \sigma_\infty(1 - e^{-\lambda z}),$$

ta nhận được phương trình đối với $E(z)$ như sau

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + 4\pi\left(\chi_\infty + \frac{i\sigma_\infty}{\omega}\right)(1 - e^{-\lambda z})\right]E(z) - k'^2\sin^2\gamma\, E(z) = 0.$$

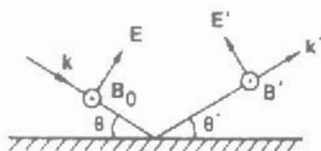
4031

Một sóng điện từ phẳng phân cực được chiếu tới một vật dẫn lý tưởng dưới một góc là θ. Điện trường cho bởi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \,\text{Re} \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right].$$

E nằm trong mặt phẳng tới như đã chỉ ra trong hình 4.11. Bắt đầu với các điều kiện biên được áp đặt lên trường điện từ bởi vật dẫn, hãy rút ra các tính chất sau đây của sóng phản xạ: hướng lan truyền, biên độ, độ phân cực và pha.

(MIT)



Hình 4.11

Lời giải:

Trong một vật dẫn lý tưởng, $\mathbf{E}'' = \mathbf{B}'' = 0$. Vì thành phần vuông góc của **B** là liên tục qua mặt phân cách, nên vectơ $\mathbf{B}'$ của sóng phản xạ chỉ có thành phần tiếp tuyến, như đã chỉ trong hình 4.11. Vì đối với một sóng điện từ phẳng, **E**, **B** và **k** tạo thành một tam diện thuận, khi đó $\mathbf{E}'$ và $\mathbf{k}'$ phải ở trong một mặt phẳng chứa **k** và vuông góc với biên (mặt phẳng tới). Cũng như vậy, vì tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của **E** qua mặt phân cách, vectơ điện E' của sóng phản xạ phải có hướng như đã chỉ trong hình 4.11 và như vậy ta được

$$E\sin\theta - E'\sin\theta' = 0.$$

Ngoài ra, để thỏa mãn các điều kiện biên, thì các số mũ trong các biểu thức của **E** và $\mathbf{E}'$ phải là bằng nhau ở tại biên. Điều này đòi hỏi

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r},$$

hay

$$k\cos\theta = k'\cos\theta',$$

lấy **r** trong mặt phân cách và trong mặt phẳng tới.

Vì $k = k' = \frac{\omega}{c}$, $\cos\theta = \cos\theta'$, hoặc $\theta = \theta'$, từ đó rút ra $E = E'$. Vì thế, hướng lan truyền của sóng phản xạ (được đặc trưng bởi vectơ $\mathbf{k}'$) tạo thành một góc với bề mặt của vật dẫn giống như góc của sóng tới (được đặc trưng bởi vectơ $\mathbf{k}$); cả hai góc đều nằm ở trong mặt phẳng tới. Độ lớn E' của điện trường sóng phản xạ giống như của sóng tới, và sóng phản xạ vẫn giữ nguyên phân cực thẳng. Nhưng, vì $\mathbf{E}_t = -\mathbf{E}'_t$, nên ở sóng phản xạ xảy ra sự thay đổi pha với một góc là π.

4032

(a) Hãy xét một dây hình trụ thẳng và dài, có độ dẫn điện σ, đường kính a mang một dòng điện đồng đều dọc theo trục với mật độ J. Hãy tĩnh độ lớn và hướng của vector Poyting ở bề mặt của dây này.

(b) Xét một tấm dẫn dày (độ dẫn σ) được đặt vào một sóng điện từ (EM) phẳng với các biên độ đỉnh E_0, B_0. Hãy tính vectơ Poynting bên trong tấm, đã lấy trung bình trong thời gian một chu kì sóng. Coi σ lớn, nghĩa là $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$.

(c) Trong phần (b), nếu σ là vô hạn thì giá trị của vectơ Poynting trung bình ở mọi nơi trong không gian là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Hãy sử dụng hệ trục tọa độ ($\mathbf{r}$, θ, z) với trục z dọc theo trục của dây dẫn và cho dòng điện chạy dọc theo hướng $+z$. Giả thiết vật dẫn là ohmic, nghĩa là $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Khi đó $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{J}{\sigma}\mathbf{e}_z$ ở bên trong dây. Do tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{E}$ qua mặt phân cách, ta cũng có $\mathbf{E} = \frac{J}{\sigma}\mathbf{e}_z$ ngay ở bên ngoài bề mặt của dây. Dùng định luật Ampe về lưu số $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ ta tìm thấy từ trường gần bề mặt của dây dẫn là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 J\pi a^2}{2\pi a}\mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 Ja}{2}\mathbf{e}_\theta .$$

Vì vậy vector Poynting ở bề mặt của dây dẫn là

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{J}{\sigma}\mathbf{e}_z \times \frac{Ja}{2}\mathbf{e}_\theta = -\frac{J^2 a}{2\sigma}\mathbf{e}_r .$$

(b) Để đơn giản hãy giả thiết rằng đường vuông góc (pháp tuyến) với mặt phẳng của tấm là song song với hướng truyền của sóng, nghĩa là, dọc theo hướng $+z$. Khi đó vectơ sóng trong vật dẫn là

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha} = (\beta + i\alpha)\mathbf{e}_z .$$

Vì σ là lớn, ta có (Bài toán **4027**)

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\,,$$

ở đây đã lấy $\mu \approx \mu_0$ (vì vật dẫn không phải là sắt từ).

Diện trường bên trong vật dẫn là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-\alpha z}e^{i(\beta z - \omega t)}$$

và từ trường là

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{\omega\mu_0}\mathbf{K}\times\mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu_0}(\beta + i\alpha)\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}\\ &\approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}}e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}\,,\end{aligned}$$

nên vectơ Poynting là

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}}e^{i\frac{\pi}{4}}E^2\mathbf{e}_z\,.$$

vì $\mathbf{E}\cdot\mathbf{K} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_z = 0$ đối với một sóng phẳng.

Lấy trung bình trên một chu kì, ta được (Bài toán **4042**)

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)E_0^2e^{-2\alpha z}\mathbf{e}_z\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}}\,E_0^2e^{-2\alpha z}\mathbf{e}_z\,.\end{aligned}$$

(c) Khi $\sigma \to \infty$, $\alpha \to \infty$ và $\sqrt{\sigma}\,e^{-2\alpha z} \to 0$. Tức là, $\overline{\mathbf{S}}$ bên trong tấm dẫn trở nên bằng không. Trong trường hợp này, sóng sẽ phản xạ toàn phần ở bề mặt của tấm. Hơn nữa ở bên ngoài của tấm các sóng tới và sóng phản xạ sẽ kết hợp để tạo ra các sóng dừng. Vì vậy $\overline{\mathbf{S}} = 0$ ở mọi nơi.

4033

Một từ trường biến thiên chậm, $B = B_0\cos\omega t$, theo hướng y gây ra các dòng xoáy (các dòng Fucô) trong một tấm vật liệu choán một nửa không gian $z > 0$. Tấm này có độ từ thẩm μ và độ dẫn σ. Xuất phát từ các phương trình Maxwell, hãy xác định sự suy giảm của các dòng xoáy theo độ sâu vào bên trong tấm đó và mối liên hệ về pha giữa các dòng và trường cảm ứng.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Từ các phương trình Maxwell cho một vật dẫn có các hằng số μ, ε, σ

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

ta tìm được

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2\mathbf{B} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Với hình học và từ trường đã cho, ta có biểu thức sau

$$\mathbf{B}' = B_0' \exp[i(kz - \omega t)]\mathbf{e}_y$$

trong vật liệu dẫn và phương trình trên rút gọn thành

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0,$$

Thay B' vào ta được

$$-k^2 + i\mu\sigma\omega + \mu\varepsilon\omega^2 = 0.$$

Do đó

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \alpha + i\beta.$$

Vì tần số đã cho là thấp ta có thể coi $\varepsilon\omega \ll \sigma$. Do đó ta có

$$\alpha + i\beta \approx \sqrt{i\mu\sigma\omega} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}(1 + i),$$

hay

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}.$$

Vì vậy trong vật liệu dẫn ta có

$$\mathbf{B}' = B_0' e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)}\mathbf{e}_y.$$

Như vậy, từ trường sẽ suy giảm theo độ sâu tăng lên với hệ số suy giảm là β. Phương trình Maxwell cuối cùng ở trên cho

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \mu\sigma\mathbf{E}' - i\mu\varepsilon\omega\mathbf{E}' \approx \mu\sigma\mathbf{E}'$$

vì $\sigma \gg \varepsilon\omega$. Do đó

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &\approx \frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times\mathbf{B}' = -\frac{1}{\mu\sigma}\frac{\partial B_y'}{\partial z}\mathbf{e}_x \\ &= \frac{-ik}{\mu\sigma}B_y'\mathbf{e}_x = \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{2}}B_y'\mathbf{e}_x \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}}B_0'e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t-\frac{\pi}{4})}\mathbf{e}_x .\end{aligned}$$

Vì vậy mật độ dòng cảm ứng là

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu}}B_0'e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t-\frac{\pi}{4})}\mathbf{e}_x .$$

Do đó có một độ lệch pha là $\frac{\pi}{4}$ giữa dòng và từ trường cảm ứng.

4034

Cho một hộp bằng đồng rỗng kích thước như trong hình 4.12

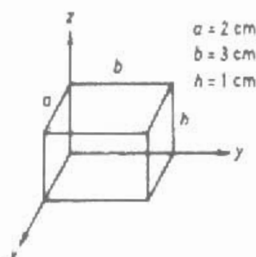
(a) Có bao nhiêu mode sóng điện từ với bước sóng λ nằm trong khoảng $(4/\sqrt{5}) \leq \lambda \leq (8/\sqrt{13})$ cm?

(b) Hãy tìm các bước sóng đó?

(c) Hãy nhận biết các mode sóng điện từ đó bằng các hình vẽ phác điện trường $\mathbf{E}$.

(d) Có xấp xỉ bao nhiêu mode sóng điện từ nằm trong khoảng $(0,01) \leq \lambda \leq (0,011)$ cm?

(UC, Berkeley)



Hình 4.12

Lời giải:

(a) Đối với hộp cộng hưởng này bước sóng của kiểu sóng dừng (m, n, p) được xác định bởi

$$\lambda_{m,n,p} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 + (\frac{p}{h})^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9} + p^2}} \text{ cm}.$$

Đối với $\frac{4}{\sqrt{5}} \leq \lambda \leq \frac{8}{\sqrt{13}}$, $\frac{13}{16} \leq \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9} + p^2 \leq \frac{5}{4}$.
Vì các số nguyên m, n, p phải hoặc bằng 0 hoặc dương với $mn + np + pm \neq 0$, nên ta có

$$m = 1,\ n = 3; \qquad m = 2,\ n = 1;\ \text{ với } p = 0;$$
$$m = 1,\ n = 0; \qquad m = 0,\ n = 1;\ \text{ với } p = 1.$$

Thế nhưng, mỗi một tập hợp của m, n, p sẽ tương ứng với một kiểu TE và TM. Vì vậy trong vùng bước sóng $\frac{4}{\sqrt{5}} \leq \lambda \leq \frac{8}{\sqrt{13}}$ cm sẽ có tám kiểu cộng hưởng: 2 cho mỗi tập hợp (1, 3, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 1) và (0, 1, 1).

(b) Các bước sóng của bốn kiểu kép lần lượt là $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{6}{\sqrt{10}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{6}{\sqrt{10}}$ cm. Nhưng chỉ có hai bước sóng cộng hưởng khác nhau.

(c) Trường E trong hộp có các thành phần

$$E_x = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z),$$
$$E_y = A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z),$$
$$E_z = A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z),$$

với

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{c}, \quad k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0.$$

Bốn mode điện có các trường E như sau

$$\text{mode } (1,3,0)\text{: } E_x = 0,\ E_y = 0,\ E_z = A_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(\pi y)\,;$$

$$\text{mode } (2,1,0)\text{: } E_x = 0,\ E_y = 0,\ E_z = A_3 \sin(\pi x)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\,;$$

$$\text{mode } (1,0,1)\text{: } E_x = 0,\ E_y = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(\pi z),\ E_z = 0\,;$$

$$\text{mode } (0,1,1)\text{: } E_x = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\sin(\pi z),\ E_y = 0,\ E_z = 0\,.$$

(d) Nếu

$$0{,}01 \text{ cm} \le \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{9}+p^2}} \le 0{,}011 \text{ cm}\,,$$

ta có

$$181{,}8^2 \le \frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{9}+p^2 \le 200^2\,.$$

Điều này tương đương với một vỏ elipxôit trong không gian mnp, ở đó mỗi ô đơn vị với m, n, p dương đại diện cho hai mode điện từ, một TE và một TM, với tần số nhỏ hơn hoặc bằng $2(\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{9}+p^2)^{-\frac{1}{2}}$, có thể tích là

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_2 - V_1\\ &= \frac{4}{3}\pi(2\times 200\times 3\times 200\times 200 - 2\times 181{,}8\times 3\times 181{,}8\times 181{,}8)\\ &= \frac{4}{3}\pi\times 2\times 3\times(200^3 - 181{,}8^3) \approx 5\times 10^7\,.\end{aligned}$$

Vì vậy trong vùng bước sóng đã cho có $2\cdot\frac{1}{8}\cdot\Delta V = 1{,}25\times 10^7$ mode, trong đó hệ số $\frac{1}{8}$ suất hiện là do đòi hỏi các số m, n, p đều phải là các số không âm.

4035

Hãy ước lượng số lượng các sóng ánh sáng đứng riêng biệt có thể tồn tại ở giữa các tần số $1{,}0\times 10^{15}$ Hz và $1{,}2\times 10^{15}$ Hz trong một hộp có thể tích 1 cm^3.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Hãy xét một hộp cộng hưởng hình lập phương có độ dài các cạnh là a. Tần số cộng hưởng f được cho bởi

$$4\pi^2 f^2 = \frac{\pi^2}{\mu\varepsilon a^2}(m^2 + n^2 + p^2),$$

trong đó m, n, p là các số nguyên dương.

Mỗi tập hợp của các số nguyên dương m, n, p thỏa mãn biểu thức

$$m^2 + n^2 + p^2 \le r^2 = \frac{4a^2 f^2}{v^2}$$

tương ứng với một tần số $\le f(r)$, trong đó $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Đối với các bước sóng ngắn so với a, ta có thể xét một không gian m, n, p mà trong đó mỗi ô đơn vị biểu thị một tập hợp của m, n, p. Vì vậy số (mode) N với tần số $\le f(r)$ bằng thể tích của $\frac{1}{8}$ hình cầu có bán kính r trong không gian này

$$N = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi f^3 V}{3v^3},$$

trong đó $V = a^3$ là thể tích của hộp.

Nhưng thực tế thì mỗi tập hợp của m, n, p tương ứng với 2 mode của cùng một tần số, một mode từ và một mode điện. Vì vậy

$$N = \frac{8\pi f^3 V}{3v^3}.$$

Trong điều kiện bước sóng ngắn, có thể áp dụng công thức này cho một hốc có hình dạng bất kì.

Đối với bài toán này, ta có $V = 1$ cm^3 và sẽ giả thiết chất điện môi của hốc là không khí. Khi đó

$$N = \frac{8\pi f^3}{3c^3}.$$

Vì vậy số mode giữa hai tần số đã cho là

$$\begin{aligned}\Delta N &= \frac{8\pi}{3\times(3\times 10^{10})^3}\left[(1,2\times 10^{15})^3 - (1,0\times 10^{15})^3\right]\\ &= 2,26\times 10^{14}.\end{aligned}$$

4036

Hãy xét một ống dẫn sóng hình chữ nhật, dài vô hạn theo chiều x, có chiều rộng (theo chiều y) 2 cm và chiều cao (theo chiều z) 1 cm. Các vách là vật dẫn lý tưởng như trong hình 4.13.

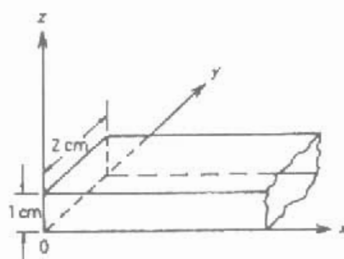
(a) Các điều kiện biên cho các thành phần của **B** và **E** ở các vách là như thế nào?

(b) Hãy viết phương trình sóng mô tả các trường **E** và **B** của mode thấp nhất. (Gợi ý: Mode thấp nhất có điện trường chỉ theo hướng z)

(c) Hãy tìm vận tốc pha và vận tốc nhóm đối với mode thấp nhất mà nó có thể lan truyền.

(d) Các mode lan truyền khả dĩ được tách một cách tự nhiên thành hai loại. Đó là hai loại nào và chúng khác nhau về mặt vật lý như thế nào?

(*Princeton*)



Hình 4.13

Lời giải:

(a) Các điều kiện biên là: thành phần tiếp tuyến của **E** và thành phần vuông góc của **B** là bằng không trên bề mặt của một vật dẫn lý tưởng. Trong trường hợp này

$$B_y = 0, \quad E_x = E_z = 0, \text{ đối với } y = 0, 2 \text{ cm};$$
$$B_z = 0, \quad E_x = E_y = 0, \text{ đối với } z = 0, 1 \text{ cm}.$$

Từ $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ suy ra $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ đối với $y = 0$, 2 cm và $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ đối với $z = 0$, 1 cm.

(b) Đối với các sóng hình sin có tần số góc ω, phương trình sóng này quy về phương trình Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

với

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

và phương trình Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

rút gọn thành

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{E}.$$

Đối với mode thấp nhất, $E_x = E_y = 0$, $E = E_z$. Vì vậy đó là sóng TE, được xác định bởi phương trình sóng $\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$. Khi đó vectơ từ được xác định bằng

$$B_x = \frac{-i}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad B_y = \frac{i}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad B_z = 0.$$

(c) Đối với mode thấp nhất sóng này sẽ được biểu thị bởi

$$E_z = Y(y)\,Z(z)e^{i(k'x-\omega t)}.$$

Khi đó phương trình Helmholtz sẽ được tách ra thành

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_1^2 Y = 0, \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_2^2 Z = 0,$$

với $k_1^2 + k_2^2 = k^2 - k'^2$. Các nghiệm sẽ là

$$Y = A_1\cos(k_1 y) + A_2\sin(k_1 y),$$
$$Z = B_1\cos(k_2 z) + B_2\sin(k_2 z).$$

Các điều kiện biên

$$E_z = 0 \text{ đối với } y = 0, 2,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \text{ đối với } z = 0, 1$$

cho $A_1 = B_2 = 0$, $k_1 = \frac{m}{2}\pi$, $k_2 = n\pi$, m, n là 0 hoặc các số nguyên dương. Do đó

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2\right]\pi^2,$$

$$E_z = C\sin\left(\frac{m}{2}\pi y\right)\cos(n\pi z)e^{i(k'x-\omega t)}.$$

Gọi vận tốc pha trong trong ống dẫn sóng là v. Khi đó $k' = \frac{\omega}{v}$, hay

$$\omega = v\left\{\frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n^2\right]\pi^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

n có thể nhận giá trị zero mà không cho E_z đồng nhất bằng 0. Vì vậy mode thấp nhất là TE_{10}, và vận tốc pha của nó là

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4}\right)}} > c\,.$$

Vận tốc nhóm là

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c^2}{\omega}k' = \frac{c^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{c^2}{v}\,.$$

(d) Có thể chia các sóng điện từ truyền trong ống dẫn sóng thành hai nhóm. Một nhóm với điện trường hoàn toàn là ngang nhưng từ trường có một thành phần dọc (TE hay mode M), còn nhóm kia với từ trường hoàn toàn là ngang nhưng điện trường có một thành phần dọc (TM hay mode E). Đối với loại hệ dẫn sóng đang xét, nó không thể truyền các sóng mà cả điện trường và từ trường của chúng đều là ngang (mode TEM).

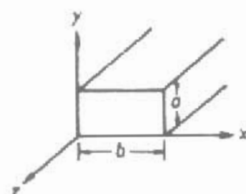
4037

Như trong hình 4.14, một sóng điện từ truyền trong ống dẫn sóng hình chữ nhật ở mode TE. Các vách của ống là dẫn điện và bên trong là chân không.

(a) Tần số cắt trong mode này là gì?

(b) Nếu bên trong ống choán đầy bởi một vật liệu với hằng số điện môi ε, thì tần số cắt trên sẽ thay đổi như thế nào?

(Columbia)



Hình 4.14

Lời giải:

Trong các mode TE thì $E_z = 0$, $H_z \neq 0$, khi sử dụng hệ tọa độ chỉ ra trong hình 4.14. Các sóng thành phần ngang, nghĩa là x và y, trong ống dẫn sóng là các sóng đứng, trong khi đó thành phần z là một sóng chạy. Kí hiệu m và n lần lượt là các số nguyên chỉ số lần của 1/2 sóng theo các chiều x và y. Khi đó các số sóng của các sóng đứng là

$$k_z = \frac{m\pi}{b}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{a},$$

còn số sóng của sóng chạy là

$$k_z^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2),$$

trong đó $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$.

(a) Nếu bên trong ống dẫn sóng là chân không, ta có

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2,$$

hay

$$k_z^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right].$$

Nếu $k_z^2 < 0$, k_z là thuần ảo và sóng chạy $\sim e^{ik_z z}$ trở thành sóng bị tắt dần theo hàm số mũ, nghĩa là không thể lan truyền. Vì vậy tần số cắt được xác định bởi

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_0\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2}.$$

(b) Nếu bên trong ống dẫn sóng được chứa đầy một chất điện môi, ta vẫn có thể sử dụng các kết quả cho chân không với sự thay thế $\varepsilon_0 \to \varepsilon$, $\mu_0 \to \mu$. Vì

thông thường $\mu \sim \mu_0$ nên bây giờ tần số cắt được xác định bởi

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}\sqrt{\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2}.$$

4038

(a) Hãy cho phương trình sóng và các điều kiện biên được thỏa mãn bởi một sóng điện từ lan truyền theo chiều z trong một ống dẫn sóng có các cạnh a và b. Giả thiết rằng ống dẫn sóng là vật dẫn lý tưởng với $\varepsilon = \mu = 1$ ở bên trong.

(b) Hãy xác định tần số góc ω thấp nhất để một sóng điện ngang (TE) phân cực theo chiều x (thẳng đứng) có thể truyền trong ống dẫn sóng này.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Xem Bài toán **4036**.

(b) Từ Bài toán **4037** ta thấy rằng mode TE_{10} có tần số thấp nhất đối với $a > b$ và tần số góc cắt của nó là $\omega_{10} = \frac{c\pi}{a}$.

4039

(a) Hãy viết các phương trình Maxwell cho một môi trường không dẫn với độ từ thẩm μ và hằng số điện môi ε, và hãy rút ra phương trình sóng mô tả sự truyền các sóng điện từ trong môi trường này. Tìm ra các nghiệm sóng phẳng cho **E** và **B**.

(b) Hãy xác định điện trường và từ trường cho mode TE thấp nhất của một ống dẫn sóng hình vuông (cạnh l) choán đầy môi trường mới ở trên. Hãy nói rõ các điều kiện biên mà bạn đã sử dụng.

(c) Đối với khoảng tần số ω nào thì mode trong phần (b) là mode TE duy nhất có thể bị kích thích? Điều gì xảy ra với các mode khác?

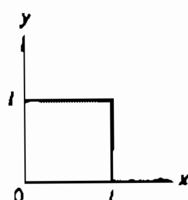
(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Xem Bài toán **4010**.

(b) Sử dụng hệ tọa độ trên hình 4.15. Các điều kiện biên được xác định bởi tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của **E** qua mặt phân cách và $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ như sau

$$E_y = E_z = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \text{ đối với } x = 0,\ l\,,$$
$$E_x = E_z = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \text{ đối với } y = 0,\ l\,.$$



Hình 4.15

Sóng điện từ truyền bên trong ống dẫn sóng là một sóng chạy dọc theo chiều z, và có thể được biểu thị như sau

$$E(x, y, z, t) = E(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}\,.$$

Khi đó phương trình sóng rút gọn thành

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E(x, y) + (k^2 - k_z^2)E(x, y) = 0\,,$$

trong đó $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$.

Giả sử $u(x, y)$ là một thành phần (x, hay y) của $E(x, y)$. Đặt $u(x, y) = X(x)Y(y)$, ta có

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0\,,$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0\,,$$

với

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2\,.$$

Vì vậy

$$u(x, y) = [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \sin(k_x x)][C_2 \cos(k_y y) + D_2(\sin k_y y)]\,.$$

Các điều kiện biên cần được thỏa mãn là

$$
\begin{aligned}
E_x &= A_1 \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)}\,,\\
E_y &= A_2 \sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)}\,,\\
E_z &= A_3 \sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)}\,,
\end{aligned}
$$

$$
k_x = \frac{m\pi}{l}\,, \qquad k_y = \frac{n\pi}{l}\,, \qquad m, n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .
$$

Vì vậy ta có $k_z = \left[\mu\varepsilon\omega^2 - (m^2+n^2)\frac{\pi^2}{l^2}\right]^{\frac{1}{2}}$. Để truyền được thì k_z phải là số thực. Vì vậy các mode TE thấp nhất là những mode có $m, n = 0,\ 1$ hoặc $1,\ 0$, tức là mode TE_{01} hay TE_{10}.

Đối với mode TE_{10} thì điện trường là

$$
E_x = 0\,, \qquad E_z = 0\,, \qquad E_y = A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{i(k_z z-\omega t)}\,.
$$

Sử dụng $\mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}$ ta nhận được

$$
\begin{aligned}
H_y &= 0\,,\\
H_x &= -\frac{ck_z}{\omega\mu} A_2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{i(k_z z-\omega t)}\,,\\
H_z &= -\frac{ic\pi}{\omega\mu l} A_2 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{i(k_z z-\omega t)}\,.
\end{aligned}
$$

Ta có thể nhận được các kết quả tương tự cho mode TE_{01}.

(c) Tần số (góc) cắt của mode TE_{10} hay TE_{01} là

$$
\omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{0}{l}\right)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon} l}\,,
$$

và tần số cắt của mode TE_{11} là

$$
\omega_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\, l}\,.
$$

Vì vậy, nếu các mode TE_{10} và TE_{01} là các sóng duy nhất truyền trong ống dẫn sóng này thì ta yêu cầu phải thỏa mãn

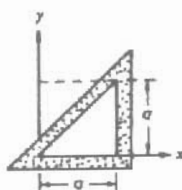
$$
\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\, l} \le \omega < \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\, l}\,.
$$

Đối với các mode khác, k_z sẽ trở thành ảo, $k_z = ik'_z$, và thừa số truyền sẽ trở thành $e^{-k'_z z}$. Các sóng này sẽ suy giảm nhanh và không thể truyền trong ống dẫn sóng này được.

4040

Một ống dẫn sóng được chế tạo sao cho tiết diện của ống dẫn tạo thành một tam giác với các cạch có độ dài a, a, và $\sqrt{2}a$ (xem hình 4.16). Các cạnh là các vật dẫn lý tưởng và bên trong ống dẫn $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Hãy xác định các mode được phép đối với các sóng điện từ truyền trong ống dẫn. Hãy tìm $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ và các tần số cắt cho các mode được phép. Nếu một số mode là không được phép, hãy giải thích tại sao không được.

(*Princeton*)



Hình 4.16

Lời giải:

Trước tiên chúng ta hãy xét một ống dẫn sóng hình vuông mà tiết diện của nó có các cạnh a. Vectơ điện của sóng điện từ truyền dọc theo chiều $+z$ là được xác định bởi

$$E_x = A_1 \cos(k_1 x)\sin(k_2 y)e^{i(k_3 z-\omega t)},$$
$$E_y = A_2 \sin(k_1 x)\cos(k_2 y)e^{i(k_3 z-\omega t)},$$
$$E_z = A_3 \sin(k_1 x)\sin(k_2 y)e^{i(k_3 z-\omega t)},$$

với

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$
$$k_1 A_1 + k_2 A_2 - ik_3 A_3 = 0,$$

$$k_1 = \frac{m\pi}{a},$$
$$k_2 = \frac{n\pi}{a}.$$

Các điều kiện biên đã được thỏa mãn là

$$E_x = E_z = 0 \text{ với } y = 0 \text{ và } E_y = E_z = 0 \text{ với } x = a.$$

Đối với ống dẫn sóng có tiết diện tam giác, ta phải chọn nghiệm ở trên thỏa mãn thêm các điều kiện biên trên mặt phẳng $y = x$ $E_z = 0$, $E_x \cos\frac{\pi}{4} + E_y \sin\frac{\pi}{4} = 0$ đối với $y = x$. Điều kiện đầu cho $A_3 = 0$, còn điều kiện sau này cho $A_1 = A_2$ và $\tan(k_1x) = -\tan(k_2x)$, hoặc $A_1 = -A_2$ và $\tan(k_1x) = \tan(k_2x)$, tức là $k_1 = -k_2$, $A_1 = A_2$, hoặc $k_1 = k_2$, $A_1 = -A_2$. Vì vậy đối với ống dẫn sóng đang xét ta có

$$E_x = -A\cos(k_1x)\sin(k_1y)e^{i(k_3z-\omega t)},$$
$$E_y = A\sin(k_1x)\cos(k_1y)e^{i(k_3z-\omega t)},$$
$$E_z = 0.$$

với

$$k_1 = \frac{n\pi}{a}, \qquad k_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - 2\frac{n^2\pi^2}{a^2}}.$$

Có thể tìm từ trường liên quan bằng cách sử dụng $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, hay $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$ như sau

$$B_x = -\frac{k_3}{\omega}E_y = -\frac{k_3}{\omega}A\sin(k_1x)\cos(k_1y)e^{i(k_3z-\omega t)},$$
$$B_y = \frac{k_3}{\omega}E_x = -\frac{k_3}{\omega}A\cos(k_1x)\sin(k_1y)e^{i(k_3z-\omega t)},$$
$$B_z = \frac{1}{\omega}(k_1E_y - k_2E_x) = \frac{k_1}{\omega}A[\sin(k_1x)\cos(k_1y) + \cos(k_1x)\sin(k_1y)]e^{i(k_3z-\omega t)}$$
$$= \frac{k_1}{\omega}A\sin[k_1(x+y)]e^{i(k_3z-\omega t)}.$$

Vì vậy các mode được phép là $TE_{n,-n}$ hay $TE_{n,n}$, nhưng không phải là TM. Tần số cắt là

$$\omega_n = \sqrt{2}\,\frac{n\pi c}{a}.$$

4041

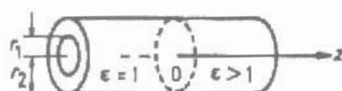
Trên hình 4.17, hai vật dẫn hình trụ đồng trục với bán kính r_1 và r_2 tạo ra một ống dẫn sóng. Vùng giữa hai vật dẫn là chân không đối với $z < 0$ và được lấp đầy bằng một môi trường điện môi với hằng số điện môi $\varepsilon \neq 1$ đối với $z > 0$.

(a) Hãy mô tả mode TEM đối với $z < 0$ và $z > 0$.

(b) Nếu một sóng điện từ trong một mode như thế tới từ bên trái đến mặt phân cách, hãy tính các sóng truyền qua và sóng phản xạ.

(c) Tỉ phần của năng lượng tới đã được truyền qua là bao nhiêu? Tỉ phần được phản xạ là bao nhiêu?

(*Columbia*)



Hình 4.17

Lời giải:

Hãy coi ε như là hằng số điện môi tương đối (hằng số điện môi $= \varepsilon\varepsilon_0$) và hãy sử dụng các đơn vị SI.

(a) Hãy xét vùng $z > 0$ trước. Giả thiết $\mu = \mu_0$. Đối với sóng hình sin thì $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$, và phương trình sóng trở thành

$$\left(\nabla^2 + \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}'\\ \mathbf{B}'\end{Bmatrix} = 0\,,$$

trong đó ε là hằng số điện môi tương đối của môi trường, tức là hằng số điện môi $= \varepsilon\varepsilon_0$. Vì tính đối xứng trụ, nên các nghiệm riêng của phương trình trên có dạng

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'(x, y)e^{i(k'z-\omega t)}\,,$$
$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}'(x, y)e^{i(k'z-\omega t)}\,,$$

với

$$k'^2 = \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\,.$$

Đặt

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

∇_t^2 là phần ngang của toán tử Laplace ∇^2. Hãy phân tách trường điện từ thành các thành phần ngang và dọc

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_t + E_z\mathbf{e}_z\,, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_t + B_z\mathbf{e}_z\,.$$

Đối với các sóng TEM thì $B'_z = E'_z = 0$. Khi đó phương trình Maxwell cho môi trường không có điện tích $\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0$ rút gọn thành

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}'_t = 0\,.$$

Cũng từ phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = i\omega\mathbf{B}'$ ta có

$$\nabla_t \times \mathbf{E}'_t = 0\,.$$

Các phương trình này cho phép đưa vào một hàm vô hướng ϕ sao cho

$$\mathbf{E}'_t = -\nabla\phi\,, \qquad \nabla^2\phi = 0\,.$$

Ngoài ra, sự đối xứng yêu cầu hàm ϕ là một hàm chỉ phụ thuộc vào r và phương trình cuối rút gọn thành

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0\,,$$

Nghiệm của phương trình này là

$$\phi = C\ln r + C'$$

C, C' là các hằng số.

Khi đó điện trường là

$$\mathbf{E}'_t(\mathbf{r},t) = \frac{C}{r}\,e^{i(k'z-\omega t)}\mathbf{e}_r\,,$$

và từ trường liên quan được xác định bởi $\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ với $\nabla \to ik'$, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ có dạng như sau

$$\mathbf{B}'_t(\mathbf{r},t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}'_t = \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{rc}\,e^{i(k'z-\omega t)}\mathbf{e}_\theta\,.$$

Cho nên, trong vùng $z > 0$ lấp đầy bởi môi trường có hằng số điện môi tương đối ε, có thể biểu diễn các sóng TEM như sau

$$\mathbf{E}'(x,t) = \frac{C}{r}\,e^{i(k'z-\omega t)}\mathbf{e}_r\,,$$

$$\mathbf{B}'(x,t) = \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{rc}\, e^{i(k'z-\omega t)}\mathbf{e}_\theta\,.$$

Tương tự, đối với vùng $z < 0$, $\varepsilon = 1$ và các sóng TEM được xác định bằng các hệ thức sau

$$\mathbf{E}(x,t) = \frac{A}{r}\, e^{i(kz-\omega t)}\mathbf{e}_r\,,$$

$$\mathbf{B}(x,t) = \frac{A}{rc}\, e^{i(kz-\omega t)}\mathbf{e}_\theta\,,$$

trong đó A và C là các hằng số, và $k = \frac{\omega}{c}$.

(b) Hãy xét một sóng TEM tới vuông góc với mặt phân cách từ phía chân không. Giả thiết cả hai sóng truyền qua và phản xạ đều duy trì ở mode TEM, các sóng tới và truyền qua lần lượt được xác định bởi $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ và $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$. Hãy biểu diễn sóng phản xạ như sau

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) = \frac{D}{r}\, e^{-i(kz+\omega t)}\mathbf{e}_r\,,$$

$$\mathbf{B}''(\mathbf{r},t) = -\frac{D}{rc}\, e^{-i(kz+\omega t)}\mathbf{e}_\theta\,.$$

Lưu ý rằng dấu âm đối với $\mathbf{B}''$ được đưa vào để $\mathbf{E}''$, $\mathbf{B}''$ và $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k}$ tạo thành một tam diện thuận.

Các điều kiện biên mà theo đó $\mathbf{E}_t$ và $\mathbf{H}_t$ là liên tục qua mặt phân cách cho

$$(E_r + E''_r - E'_r)|_{z=0} = 0\,,$$

$$(B_\theta + B''_\theta - B'_\theta)|_{z=0} = 0\,,$$

và vì vậy

$$C = \frac{2A}{1+\sqrt{\varepsilon}}\,, \qquad D = \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}A\,.$$

(c) Các hệ số phản xạ và truyền qua lần lượt là

$$R = \frac{|E''H''^*|}{|EH^*|} = \frac{|E''B''^*|}{|EB^*|} = \left(\frac{D}{A}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right)^2,$$

$$T = \frac{|E'H'^*|}{|EH^*|} = \frac{|E'B'^*|}{|EB^*|} = \left(\frac{C}{A}\right)^2\sqrt{\varepsilon} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2}\,.$$

Vì tất cả các sóng tới, sóng phản xạ và truyền qua đều trong cùng một phương, nên R và T lần lượt là tỉ phần của năng lượng tới bị phản xạ và

truyền qua. Chú ý rằng ở đây có sự bảo toàn năng lượng, nên cần thỏa mãn $R + T = 1$.

4042

Một ống dẫn sóng được làm từ hai hình trụ đồng trục dẫn điện lý tưởng, với bức xạ truyền trong không gian giữa chúng. Hãy chứng tỏ rằng có một mode trong đó cả điện trường và từ trường đều vuông góc với trục của các hình trụ. Có một tần số cắt cho mode này không? Hãy tính tốc độ truyền của mode này và công suất trung bình theo thời gian chạy dọc theo trục.

(*Columbia*)

Lời giải:

Lấy hệ trục tọa độ có trục z dọc theo trục của hình trụ và để đơn giản hãy coi vùng giữa các hình trụ như là không gian tự do. Như đã chỉ ra trong lời giải của Bài toán **4041**, để có thể nhận được các nghiệm của phương trình sóng có $E_z = B_z = 0$ còn các thành phần khác không đồng nhất bằng 0. Vì vậy có thể có các sóng TEM truyền trong không gian giữa các hình trụ. Hơn nữa, có thể biểu diễn các sóng TEM này như sau

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_r\,, \qquad \mathbf{B} = \frac{A}{rc} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_\theta\,,$$

trong đó A là một hằng số và k là một số thực bằng $\frac{\omega}{c}$. Vì vậy không có tần số cắt đối với các sóng TEM và tốc độ pha của các sóng này là c.

Vectơ Poynting lấy trung bình trên một chu kì là

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{N} \rangle &= \langle \operatorname{Re} \mathbf{E} \times \operatorname{Re} \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{4} \langle (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left(\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle + \langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^* \rangle + \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \rangle + \langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\,,
\end{aligned}$$

trong đó ta đã sử dụng một thực tế là $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ và $\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*$ sẽ bị biến mất khi được lấy trung bình trên một chu kì. Vì vậy

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{A^2}{r^2} \mathbf{e}_z\,.$$

Khi đó công suất trung bình được truyền đi là

$$\int_a^b \langle N \rangle 2\pi r dr = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \pi A^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

trong đó a và b ($b > a$) là bán kính của hai hình trụ.

4043

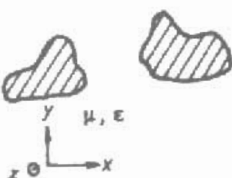
Một đường truyền gồm hai vật dẫn song song với nhau, có tiết diện bất kì nhưng không đổi. Dòng điện chạy trên một vật dẫn và quay lại trên vật dẫn kia. Các vật dẫn đã được nhúng trong một môi trường cách điện với hằng số điện môi ε và độ từ thẩm μ, như đã được chỉ ra trong hình 4.18.

(a) Hãy dẫn ra các phương trình sóng đối với các trường **E** và **B** trong môi trường này khi các sóng được truyền theo hướng z.

(b) Hãy tìm tốc độ truyền của các sóng đó.

(c) Trong những điều kiện nào người ta có thể xác định được hiệu điện thế giữa hai vật dẫn này? (Chú ý: Để xác định được hiệu điện thế thì tất cả các điểm trên một mặt phẳng đã cho ở z = hằng số trên một vật dẫn phải là đẳng thế. Còn những điểm trên vật dẫn khác phải có một giá trị đẳng thế khác).

(Princeton)



Hình 4.18

Lời giải:

(a) Từ các phương trình Maxwell cho một môi trường không có nguồn

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

ta được

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Vì

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E},$$

ta có

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Phương trình sóng giống như vậy áp dụng cho **B**. Đối với một đường truyền có thể coi các sóng hoàn toàn là ngang (TEM). Ta có thể viết

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(kz-\omega t)}\,.$$

Khi đó phương trình sóng trở thành

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{E}_0 + (\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)\mathbf{E}_0 = 0\,.$$

(b) Ta nhận được vận tốc pha v của các sóng từ phương trình sóng

$$\frac{1}{v^2} = \mu\varepsilon\,,$$

hay

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,.$$

(c) Điều kiện cần đòi hỏi là $\lambda \gg l$, l là kích thước tiết diện của các vật dẫn.

4044

Các vạch phổ phát ra từ một nguyên tử đặt trong từ trường là được tách ra. Theo hướng của trường này, ánh sáng với tần số cao hơn là

(a) không phân cực, (b) phân cực thẳng, (c) phân cực tròn.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

4045

Để đi qua được tầng điện ly một sóng điện từ cần phải có tần số tối thiểu là bao nhiêu? 10, 10^4, 10^7, 10^9 Hz.

(Columbia)

Lời giải:

Để đi qua được tầng điện ly, tần số góc ω của một sóng cần phải lớn hơn tần số plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$. Mật độ êlectron cực đại của một lớp điển hình là $N \sim 10^{13}$ m^{-3}. Đối với một êlectron, $\frac{e^2}{\varepsilon_0 m} = 3 \times 10^3$ m^{3}s^{-2}. Vì vậy

$$\omega_p \approx \sqrt{3 \times 10^{16}} \approx 1,7 \times 10^8 \text{ s}^{-1} .$$

Do đó câu trả lời là 10^7 Hz.

4. BỨC XẠ ĐIỆN TỪ VÀ CÁC HỆ BỨC XẠ (4046–4067)

4046

Một thiết bị đo bị nhiễu loạn bởi các ảnh hưởng sau đây. Bạn sẽ bảo vệ thiết bị đó đối với mỗi loại ảnh hưởng đó như thế nào?

(a) Các điện trường tần số cao.

(b) Các điện trường tần số thấp.

(c) Các từ trường tần số cao.

(d) Các từ trường tần số thấp.

(e) Các từ trường D.C (một chiều).

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a), (c) Các điện trường và từ trường tần số cao thường đi cùng nhau dưới dạng bức xạ điện từ. Để bảo vệ thiết bị đo khỏi ảnh hưởng của nó, cần đặt thiết bị trong một lồng nối đất được làm từ một vật dẫn tốt.

(b) Có thể sử dụng cách bảo vệ giống như ở phần (a). Vật dẫn cần phải dày hơn độ xuyên sâu của sóng ít nhất là vài lần.

(d), (e) Hãy đặt thiết bị trong một lồng làm bằng kim loại μ (hợp kim Ni-Fe chứa Mo, Cu, Si) hay tốt hơn cả là lồng làm bằng một chất siêu dẫn.

4047

(a) Tốc độ bức xạ năng lượng trên đơn vị diện tích từ mỗi mặt của một tấm mỏng đồng đều có dòng điện xoay chiều là bao nhiêu?

(b) Hãy cho biết điện trở bức xạ hiệu dụng tính bằng Ohm trên một diện tích hình vuông của tấm có dòng điện này là bao nhiêu?

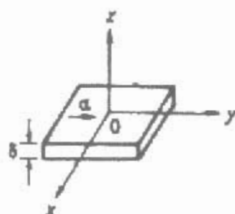
(c) Hãy tìm lực trên đơn vị diện tích ở mỗi mặt của tấm chứa dòng điện (do bức xạ) đối với một mật độ dòng điện mặt là 1000 A trên đơn vị chiều dài.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Hãy lấy trục y dọc theo dòng điện này và trục z vuông góc với tấm có dòng điện như trong hình 4.19. Giả sử dòng điện trên đơn vị độ rộng là $\alpha = \alpha e^{-i\omega t}\mathbf{e}_y$. Hãy xét một đơn vị diện tích hình vuông với các cạnh song song với các trục x và y. Ở những khoảng cách xa tấm có dòng điện, có thể coi dòng trong diện tích này như là một lưỡng cực (dipole) Hertz với mômen lưỡng cực $\mathbf{p}$ được cho bởi:

$$\dot{\mathbf{p}} = \alpha e^{-i\omega t}\mathbf{e}_y\,.$$



Hình 4.19

Vì vậy công suất phát xạ, lấy trung bình trong một chu kì, từ đơn vị diện tích của tấm này là

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2|\dot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} = \frac{\alpha^2\omega^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\,.$$

Vì độ dày δ là rất nhỏ, bức xạ được phát ra chủ yếu từ các mặt trên và mặt dưới của diện tích này, cho nên công suất bức xạ trên một đơn vị diện tích từ mỗi mặt của tấm mỏng này là

$$\frac{P}{2} = \frac{\alpha^2\omega^2}{24\pi\varepsilon_0 c^3}\,.$$

(b) Công suất trung bình liên quan tới biên độ của dòng xoay chiều I bởi hệ thức

$$P = \frac{1}{2} I^2 R ,$$

trong đó R là điện trở. Do đó điện trở bức xạ hiệu dụng trên một đơn vị diện tích là

$$R = \frac{2P}{\alpha^2} = \frac{\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} .$$

(c) Bức xạ điện từ có mật độ năng lượng U mang theo một xung lượng $\frac{U}{c}$. Vì vậy sự mất mát về xung lượng trên một đơn vị thời gian và một đơn vị diện tích của một bề mặt tấm này là $\frac{P}{2c}$. Sự bảo toàn xung lượng yêu cầu phải có một áp suất tác động lên mỗi mặt của tấm này có cùng một độ lớn

$$F = \frac{P}{2c} = \frac{\alpha^2\omega^2}{24\pi\varepsilon_0 c^4} .$$

Lấy tần số của dòng xoay chiều là $f = 50$ Hz và với $\alpha = 1000$ A, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m, ta được

$$F \approx 1,83 \times 10^{-14}\ \text{N} .$$

4048

Đài phát thanh WGBH-FM phát sóng với công suất 100 kW ở vùng 90 MHz từ anten của nó ở trên đồi Great Blue, cách M.I.T khoảng 20 km. Hãy đánh giá sơ bộ độ mạnh của điện trường ở M.I.T bằng V/m.

(MIT)

Lời giải:

Cường độ của bức xạ điện từ được xác định bằng $\langle N \rangle$, N là độ lớn của vectơ Poynting. Đối với các sóng điện từ phẳng, nó trở thành

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c .$$

Khi đó tổng công suất bức xạ là $P = 4\pi R^2 I = 2\pi\varepsilon_0 c R^2 E_0^2$ trong đó R là khoảng cách từ anten. Do đó biên độ của điện trường tại M.I.T là

$$E_0 = \left(\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 c R^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^5}{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8 \times (2 \times 10^4)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{V/m}$$
$$= 1,2 \times 10^{-3}\ \text{V/m} .$$

4049

Một lưỡng cực điện $\mathbf{P}(t)$ dao động tạo ra các trường bức xạ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\mathbf{e}_r \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -c\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t).$$

(a) Một điện tích q tại gốc được kích bởi một sóng điện từ phân cực thẳng có tần số góc ω và biên độ điện trường $\mathbf{E}_0$. Hãy tìm các trường điện từ được bức xạ dưới dạng vectơ.

(b) Hãy vẽ phác hướng của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ tại vị trí $\mathbf{r}$ của trường và mô tả trạng thái phân cực của các trường bức xạ.

(c) Tìm sự phụ thuộc góc của cường độ bức xạ qua các góc cầu θ và ϕ, trong đó trục z là hướng truyền của sóng tới và trục x là chiều phân cực của sóng tới.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đối với một điện tích dao động ở vận tốc thấp ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của từ trường của bức xạ tới. Khi đó phương trình chuyển động của điện tích q, với khối lượng m trong trường của sóng tới là

$$m\ddot{x} = qE_0e^{-i\omega t}.$$

Điện tích này sẽ giao động với cùng tần số $x = x_0e^{-i\omega t}$. Vì vậy độ dịch chuyển của điện tích là

$$x = -\frac{qE_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}.$$

Điều này làm xuất hiện một lưỡng cực điện có mômen bằng

$$P(t) = qx = -\frac{q^2E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}.$$

Vì

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P\left(t - \frac{r}{c}\right) = \left.\frac{\partial^2 P(t')}{\partial t'^2}\right|_{t'=t-\frac{r}{c}} = \frac{q^2E_0}{m}e^{i(kr-\omega t)},$$

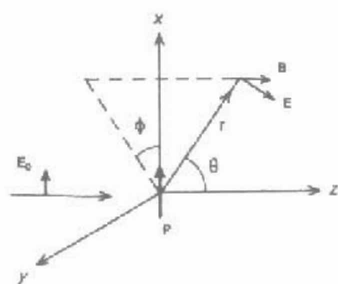
trong đó $k = \frac{\omega}{c}$, ta có

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 q^2}{4\pi mrc} e^{i(kr-\omega t)} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_0 .$$

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi mr} e^{i(kr-\omega t)} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_0)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2}{4\pi mr} e^{i(kr-\omega t)} [(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{E}_0] .$$

(b) Các hướng của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ như đã được chỉ trong hình 4.20, nghĩa là, $\mathbf{E}$ ở trong mặt phẳng của của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{r}$, và $\mathbf{B}$ là vuông góc với mặt phẳng đó. Do đó bức xạ phát ra là phân cực thẳng.



Hình 4.20

(c) Vì $\mathbf{e}_r = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$ trong tọa độ cầu, nên

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_x = \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\phi - \sin\phi\mathbf{e}_\theta .$$

Vectơ Poynting trung bình là

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\,[-c(\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^*) \times \mathbf{B}] .$$

Vì $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_0 = E_0(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_x)$, nên cường độ bức xạ trung bình là

$$I = \langle N \rangle = \frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{32\pi^2 cm^2 r^2}(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) .$$

4050

Một nguyên tử có khối lượng lớn với độ phân cực nguyên tử $\alpha(\omega)$ chịu tác dụng của một trường điện từ (nguyên tử này được đặt tại điểm gốc)

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{e}_z.$$

Hãy tìm điện trường và từ trường tiệm cận (asymptotic) mà nguyên tử này bức xạ ra và hãy tính năng lượng được phát ra trong một đơn vị góc khối. Hãy nói rõ đã sử dụng các phép gần đúng nào trong tính toán này, và cho biết khi nào (và tại sao) các phép gần đúng này sẽ không dùng được nữa khi ω tăng lên.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Nguyên tử này hoạt động như là một lưỡng cực Hertz tại điểm gốc với mômen lưỡng cực.

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} = \alpha E_0 e^{-i\omega t}\mathbf{e}_z .$$

Tại khoảng cách r rất xa điện trường và từ trường tiệm cận do nguyên tử này phát ra là

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\alpha E_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\theta e^{-i\omega t}\mathbf{e}_\phi ,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\alpha E_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta e^{-i\omega t}\mathbf{e}_\theta .$$

Năng lượng phát ra trong đơn vị góc khối là (Bài toán **4049**)

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\langle N\rangle}{r^{-2}} = \frac{c}{2\mu_0 r^{-2}}|\mathbf{B}|^2 = \frac{\alpha^2 E_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta .$$

Phép gần đúng đã được sử dụng là $r \gg \lambda \gg l$, trong đó l là kích thước dài của nguyên tử và $\lambda = 2\pi c/\omega$. Khi ω tăng, λ sẽ giảm và cuối cùng trở thành nhỏ hơn l, vì vậy phép gần đúng này là không còn hợp lệ nữa.

4051

Một hình cầu tích điện xung động theo bán kính sẽ:

(a) phát ra bức xạ điện từ.

(b) tạo ra một từ trường tĩnh.

(c) có thể làm chuyển động một hạt nhiễm điện ở bên cạnh.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

4052

Một điện tích sẽ bức xạ bất kì khi nào:

(a) nó đang chuyển động theo bất cách nào.

(b) nó đang được gia tốc.

(c) nó được liên kết trong một nguyên tử.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

4053

Bức xạ phát ra bởi một anten có đặc trưng phân bố góc của bức xạ lưỡng cực khi:

(a) bước sóng là dài so với anten.

(b) bước sóng là ngắn so với anten.

(c) anten dạng thích hợp.

(*CCT*)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

4054

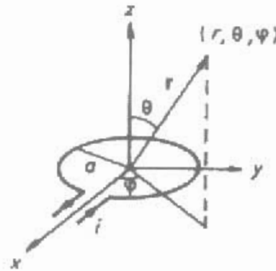
Tần số của máy phát truyền hình là 100 kHz, 1 MHz, 10 MHz, 100 MHz.

(*Columbia*)

Lời giải: Câu trả lời là 100 MHz.

4055

Một dòng điện $i = i_0 \cos\omega t$ chạy trong một vòng dây dẫn tròn nhỏ có bán kinh a (xem hình 4.21). Mạch này được đặt trong mặt phẳng xy.



Hình 4.21

(a) Hãy tính mômen đa cực khác không đầu tiên của hệ này.

(b) Hãy đưa ra dạng của thế vectơ cho hệ này với $r \to \infty$, hãy tính điện trường và từ trường tiệm cận, và hãy xác định sự phân bố góc của bức xạ phát ra.

(c) Hãy mô tả những nét đặc trưng chính của bức tranh bức xạ.

(d) Hãy tính năng lượng trung bình được phát ra.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Mômen đa cực khác không đầu tiên của mạch vòng nhỏ này là mômen lưỡng cực từ của nó

$$\mathbf{m} = \pi a^2 i_0 \cos(\omega t)\mathbf{e}_z = \pi a^2 i_0 \,\mathrm{Re}\,(e^{-i\omega t})\mathbf{e}_z\,.$$

(b) Hãy sử dụng các tọa độ cầu có gốc ở tâm của mạch vòng. Thế vectơ tại điểm $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ khi $r \to \infty$ là

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{ik\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\,\mathbf{e}_r \times \mathbf{m}\,.$$

trong đó $k = \frac{\omega}{c}$. Vì $\mathbf{e}_z = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ ta có

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -i\frac{\mu_0 \omega i_0 a^2 \sin\theta}{4cr}\,e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_\varphi\,,$$

Từ đó các vectơ trường bức xạ là

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - ik\mathbf{e}_r \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0\omega^2 i_0 a^2 \sin\theta}{4c^2 r} e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_\theta ,$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0\omega^2 i_0 a^2 \sin\theta}{4cr} e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_\varphi .$$

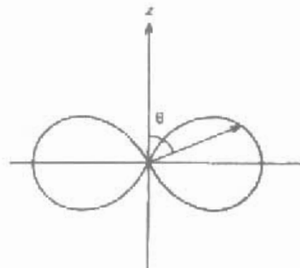
Vectơ Poynting trung bình tại r là (Bài toán **4042**)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) &= \frac{c}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\,\{(\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{B}\} \\ &= \frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2\mathbf{e}_r = \frac{\mu_0\omega^4 a^4 i_0^2}{32c^3 r^2}\sin^2\theta\mathbf{e}_r .\end{aligned}$$

Như vậy công suất trung bình được bức xạ trong một đơn vị góc khối là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\langle N \rangle}{r^{-2}} = \frac{\mu_0\omega^4 a^4 i_0^2}{32c^2}\sin^2\theta .$$

(c) Năng lượng bức xạ được phân bố theo $\sin^2\theta$. Trong mặt phẳng $\theta = 90^0$ sự bức xạ là mạnh nhất, và không có sự bức xạ nào dọc theo trục của mạch vòng ($\theta = 0^0$ tại 180^0), như minh họa trên hình 4.22 trong đó độ dài của vectơ tại θ tỉ lệ với độ bức xạ trong một đơn vị góc khối và trong một đơn vị thời gian theo hướng đó. Sự phân bố góc thực tế được xác định bởi bề mặt được tạo ra bằng cách quay đường cong này xung quanh trục z.



Hình 4.22

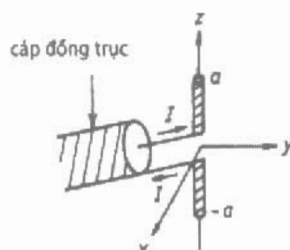
(d) Công suất bức xạ trung bình là

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega}d\Omega = \frac{\mu_0\omega^4 a^4 i_0^2}{32c^3} \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{\pi\mu_0\omega^4 a^4 i_0^2}{12c^3} .$$

4056

Trên hình 4.23, một anten được cấp dòng hoạt động trong mode $\lambda/4$ ($a = \lambda/4$). Hãy tìm cấu hình phân bố góc của công suất phát xạ.

(*Chicago*)



Hình 4.23

Lời giải:

Vì $l \sim \lambda$ nên không thể coi anten này như một lưỡng cực. Trong mode $\lambda/4$, $a = \frac{\lambda}{4}$ và dòng này có dạng một sóng dừng với các điểm nút ở các đầu của anten, nghĩa là

$$I(z, t') = I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{a}\right)e^{-i\omega t'} .$$

Thế vectơ tại một điểm $\mathbf{r}$ được xác định bởi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}dV'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\left(z', t - \frac{r}{c}\right)}{r}dz'\mathbf{e}_z .$$

Tại khoảng cách xa $\mathbf{r}$,

$$r \approx r_0 - z'\cos\theta ,$$

trong đó r_0 là khoảng cách tính từ tâm của anten. Khi đó

$$e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} = e^{i(kr-\omega t)} \approx e^{i(kr_0-\omega t)}e^{-ikz'\cos\theta} ,$$

với $k = \frac{\omega}{c}$, và

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{z'}{r_0}\cos\theta\right)^{-1} \approx \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{z'}{r_0}\cos\theta\right) \approx \frac{1}{r_0} ,$$

bỏ qua các số hạng có bậc độ lớn cỡ $\frac{z'}{r_0^2}$. Do đó

$$A(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 e^{i(kr_0-\omega t)}}{r_0}\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z'}{a}\right)e^{-ikz'\cos\theta}dz' .$$

Sử dụng

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cos(bx) + b\sin(bx)\right],$$

ta có

$$A(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 e^{i(kr_0-\omega t)}}{r_0}\frac{(\frac{\pi}{2a})}{(\frac{\pi}{2a})^2-(k\cos\theta)^2}\cdot 2\cos(ka\cos\theta).$$

Vì $ka = \frac{\omega}{c}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, nên

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0 e^{i(kr_0-\omega t)}}{r_0}\frac{c}{\omega}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_z.$$

Trong hệ tọa độ cầu ta có

$$\mathbf{e}_z = (\cos\theta, -\sin\theta, 0),$$

nên

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_z = A\cos\theta\mathbf{e}_r - A\sin\theta\mathbf{e}_\theta = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta,$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r_0}\left[\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi \approx \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0A_\theta)\mathbf{e}_\varphi,$$

bỏ qua số hạng thứ hai biến thiên như r_0^{-2} bởi vì chúng ta chỉ quan tâm đến trường bức xạ biến thiên như r_0^{-1}. Vì vậy

$$B = B_\varphi = i\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{I_0 e^{i(kr_0-\omega t)}}{r_0}.$$

Cường độ lấy trung bình trên một chu kì là (Bài toán 4049)

$$\langle N\rangle = \frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 = \frac{\mu_0 c}{8\pi^2}\cdot\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{r_0^2}.$$

Do đó công suất phát xạ trong một đơn vị góc khối là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\langle N\rangle}{r_0^{-2}},$$

Nó có phân bố góc được xác định bởi

$$\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}.$$

4057

(a) Công suất trung bình được bức xạ bởi một phần tử dòng điện có độ lớn Il là bao nhiêu với độ dài l của phần tử này là rất ngắn so với bước sóng của bức xạ và I thay đổi như $\cos(\omega t)$?

(b) Trong hình 4.24 nếu ta coi mặt phẳng xy như bề mặt của trái đất (nó được xem như một vật dẫn lý tưởng tại λ), thì công suất phát xạ trung bình là bao nhiêu?

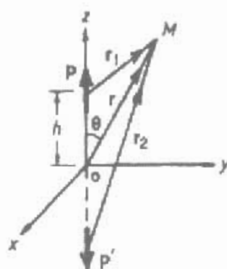
(c) Chiều cao tối ưu đối với năng lượng đã phát xạ cực đại là bao nhiêu? Và độ khuếch đại tương ứng trong công suất bức xạ do sự có mặt của mặt đất là bao nhiêu?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Có thể xét hệ này như là một lưỡng cực Hertzi có mômen $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t'}$ nên $\dot{\mathbf{p}} = -i\omega\mathbf{p} = I_0 e^{-i\omega t'}\mathbf{l}$. Công suất phát xạ trung bình là

$$\overline{P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{3c^3}|\dot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{\omega^4 I_0^2 l^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$



Hình 4.24

(b) Nếu coi Trái Đất như là một vật dẫn lý tưởng, thì ảnh hưởng của các điện tích cảm ứng trên bề mặt trái đất có thể được thay thế bằng các điện tích của một lưỡng cực ảnh $\mathbf{p}'$ như trên hình 4.24, với điều kiện ω là không quá lớn, ở đó $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$. Điện từ trường tại một khoảng cách $\mathbf{r}$ rất xa là một sự chồng chập các trường của hai lưỡng cực này, tức là

$$\mathbf{E}_{\text{tổng}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}', \qquad \mathbf{B}_{\text{tổng}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}'.$$

Vectơ Poynting trung bình tại **r**, một điểm M xa trong không gian, là (Bài toán **4042**):

$$\overline{\mathbf{S}}_{\text{tổng}} = \frac{1}{\mu_0}\langle \mathbf{E}_{\text{tổng}} \times \mathbf{B}_{\text{tổng}}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\,\text{Re}\,(\mathbf{E}^*_{\text{tổng}} \times \mathbf{B}_{\text{tổng}}),$$

hay

$$\overline{\mathbf{S}}_{\text{tổng}} = \overline{\mathbf{S}} + \overline{\mathbf{S}}' + \frac{1}{2\mu_0}\,\text{Re}\,|\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}' + \mathbf{E}'^* \times \mathbf{B}|,$$

trong đó **S**, **S**$'$ lần lượt là các vectơ Poynting tại điểm M ở xa do **p** và **p**$'$ tạo ra. Các vectơ trường bức xạ tại **r** do một lưỡng cực **p** tại gốc gây ra là

$$\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{k}}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\omega\mathbf{k} \times \mathbf{p}}{r},$$

trong đó **k** có độ lớn $\frac{\omega}{c}$ và hướng **r**, và

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t'} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} = \mathbf{p}_0 e^{i(kr-\omega t)}.$$

Vì $|\mathbf{r}| \gg h$, ta có thể lấy gần đúng $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| \approx |\mathbf{r}|$ và viết được các biểu thức sau

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\sin\theta}{r}\,p_0 e^{i(kr_1-\omega t)}\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\omega^2}{c}\,\frac{\sin\theta}{r}\,p_0 e^{i(kr_1-\omega t)}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\sin\theta}{r}\,p_0 e^{i(kr_2-\omega t)}\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\omega^2}{c}\,\frac{\sin\theta}{r}\,p_0 e^{i(kr_2-\omega t)}\mathbf{e}_\varphi.$$

Sử dụng các biểu thức này ta có

$$\overline{\mathbf{S}}_{\text{tổng}} = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\,\{2 + 2\cos[k(r_1 - r_2)]\}\mathbf{e}_r.$$

Sử dụng phép gần đúng giống như vậy, ta có $r_2 - r_1 \approx 2h\cos\theta$. Để tính công suất bức xạ $\overline{P}$ ta lấy tích phân theo nửa không gian bên trên mặt đất

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{\mathbf{S}}_{\text{tổng}} \cdot 2\pi r\sin\theta \cdot r d\theta \\
&= \frac{p_0^2\omega^4}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta[1 + \cos(2kh\cos\theta)]d\theta \\
&= \frac{p_0^2\omega^4}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{2}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos(2kh\cos\theta)d\theta\right].
\end{aligned}$$

Đặt $\beta = 2kh$, $x = \cos\theta$ vào số hạng thứ hai, ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos(2kh\cos\theta)d\theta = \int_0^1 (1-x^2)\cos(\beta x)dx$$
$$= \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta} - \cos\beta\right).$$

Vì vậy công suất bức xạ trung bình của hệ này là

$$\overline{P} = \frac{I_0^2 l^2\omega^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\left\{\frac{2}{3} + \frac{c^2}{2h^2\omega^2}\left[\frac{c\sin(\frac{2h\omega}{c})}{2h\omega} - \cos\left(\frac{2h\omega}{c}\right)\right]\right\}.$$

(c) Độ cao tối ưu h để được công suất bức xạ cực đại là $\frac{d\overline{P}}{dh} = 0$, hay

$$\frac{d}{d\beta}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta} - \cos\beta\right)\right] = 0,$$

suy ra

$$-3\frac{\sin\beta}{\beta} + 3\cos\beta + \beta\sin\beta = 0,$$

hay

$$\tan\beta = \frac{3\beta}{3-\beta^2}. \tag{1}$$

Có thể giải bằng số phương trình này để tìm β, và vì vậy độ cao tối ưu $h = \frac{\beta c}{2\omega}$. Tại độ cao tối ưu này ta có

$$\sin\beta = \frac{3\beta}{\sqrt{\beta^4 + 3\beta^2 + 9}}, \qquad \cos\beta = \frac{3-\beta^2}{\sqrt{\beta^4 + 3\beta^2 + 9}},$$

nên năng lượng bức xạ cực đại là

$$\overline{P}_{\max} = \frac{I_0^2 l^2\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{1}{3} + (\beta^4 + 3\beta^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

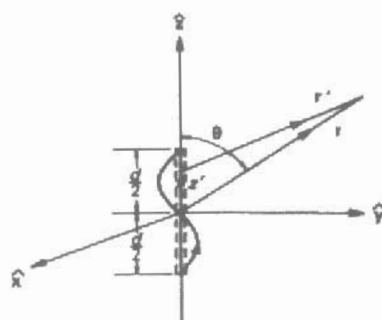
với β đã cho bởi phương trình (1).

Đối với các sóng megahéc $\lambda \sim \frac{3\times10^8}{10^6} = 300$ m. Nên ta thường giả thiết $h \ll \lambda$, hoặc $\beta = \frac{2h\omega}{c} = \frac{4\pi h}{\lambda} \ll 1$. Đối với các sóng này, (1) được thỏa mãn và công suất phát xạ trung bình là

$$\overline{P} = \frac{I_0^2 l^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

4058

Một anten tuyến tính mỏng có độ dài d được kích thích theo cách dòng điện hình sin thực hiện trọn một bước sóng dao động như được chỉ trong hình 4.25 (tần số $\omega = 2\pi c/d$).



Hình 4.25

(a) Hãy tính một cách chính xác công suất bức xạ trong một đơn vị góc khối và vẽ phân bố góc như một hàm của θ.

(b) Hãy so sánh kết quả ở phần (a) của bạn với kết quả nhận được từ phép khai triển đa cực.

(MIT)

Lời giải:

Thế vectơ trễ $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ được xác định bởi

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r'}{c})}{r'}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(\mathbf{r}', t - \frac{r'}{c})}{r'}d\mathbf{l}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I_0 e^{i\omega t}\mathbf{e}_z\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\frac{\sin(kz')}{r'}e^{-ikr}dz',$$

trong đó $r' = \sqrt{r^2 - 2rz'\cos\theta + z'^2}$, $k = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

Khi chúng ta chỉ quan tâm đến trường bức xạ, biến thiên như $\frac{1}{r}$, thì ta sẽ bỏ qua các số hạng có bậc cao hơn $\frac{1}{r}$. Vì vậy, ta sử dụng các gần đúng sau

$$r' = \sqrt{(r - z'\cos\theta)^2 + z'^2\sin^2\theta} \approx r - z'\cos\theta,$$

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r}$$

và viết

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 e^{i\omega t}}{4\pi}\mathbf{e}_z \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sin(kz')e^{-ik(r-z'\cos\theta)}dz'$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 e^{i(\omega t - kr)}}{r}\mathbf{e}_z \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sin(kz')e^{ikz'\cos\theta}dz' .$$

(a) Lấy tích phân ta thu được (xem Bài toán 4056)

$$\mathbf{A} = i\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0}{kr}\frac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin^2\theta}e^{i(\omega t - kr)}\mathbf{e}_z .$$

Định nghĩa $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$ và với $\mathbf{e}_z = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ trong hệ trục tọa độ cầu, ta có

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0}{r}\frac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}e^{i(\omega t - kr)}\mathbf{e}_\varphi .$$

Từ phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$, hay

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = i\mu_0\varepsilon_0\omega\mathbf{E}$$
$$= i\frac{k}{c}\mathbf{E} ,$$

ta tìm được

$$\mathbf{E} = -c\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r .$$

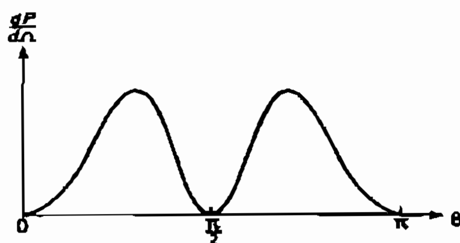
Vì vậy vectơ Poynting trung bình là (Bài toán 4042)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}R_e(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) = \frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2\mathbf{e}_r$$
$$= \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{cI_0^2}{r^2}\left[\frac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2\mathbf{e}_r$$

và công suất đã bức xạ trong một đơn vị góc khối là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\langle S \rangle}{r^{-2}} = \frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 .$$

Trong công thức trên thừa số $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ là trở kháng đặc trưng của các sóng điện từ trong chân không. Đường cong biểu diễn sự phụ thuộc của $\frac{dP}{d\Omega}$ vào θ được vẽ phác trên hình 4.26.



Hình 4.26

(b) Nếu dùng phép khai triển đa cực, ta sẽ được

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0}{r}e^{i(\omega t-kr)}\mathbf{e}_z\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\sin(kz')\left[1+\frac{ikz'\cos\theta}{1!}+\frac{(ikz'\cos\theta)^2}{2!}+\cdots\right]dz' \\ &\approx \frac{i\mu_0}{4\pi}\frac{I_0}{r}e^{i(\omega t-kr)}\lambda\cos\theta\,\mathbf{e}_z\,,\end{aligned}$$

ở đây ta đã bỏ qua các số hạng cỡ $(\frac{z'}{\lambda})^2$ và bậc cao hơn trong biểu thức khai triển của $\exp(ikz'\cos\theta)$.

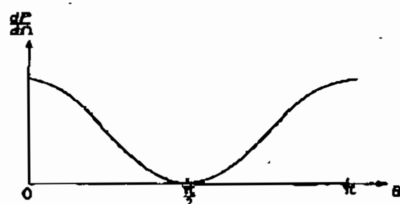
Khi đó

$$\mathbf{B} = -i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_0}{r}e^{i(\omega t-kr)}\cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi\,,$$

suy ra

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{8}cI_0^2\cos^2\theta = \frac{I_0^2}{8}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cos^2\theta\,.$$

Đường cong biểu diễn sự phụ thuộc của $\frac{dP}{d\Omega}$ vào θ được trình bày trên hình 4.27.



Hình 4.27

So sánh hai hình chúng ta thấy rằng phép khai triển đa cực chỉ cho sự gần đúng tốt ở xung quanh gốc $\frac{\pi}{2}$.

4059

Xét trường hợp được vẽ trên hình 4.28, trong đó một dây mảnh và dẫn điện lý tưởng nối hai quả cầu nhỏ. Giả thiết mật độ điện tích được cho bởi:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = [\delta(z-a) - \delta(z+a)]\delta(x)\delta(y)Q\cos(\omega_0 t)\,.$$

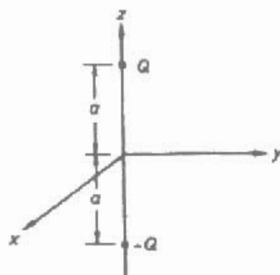
Dòng điện chạy qua dây dẫn mảnh nối hai quả cầu kim loại. a, Q và ω_0 là các hằng số.

(a) Tính công suất trung bình $\frac{d\overline{P}}{d\Omega}$, phát ra trong một đơn vị góc khối trong phép gần đúng lưỡng cực.

(b) Khi nào thì phép gần đúng lưỡng cực này là phù hợp?

(c) Hãy tính một cách chính xác $\frac{dP}{d\Omega}$.

(*Columbia*)



Hình 4.28

Lời giải:

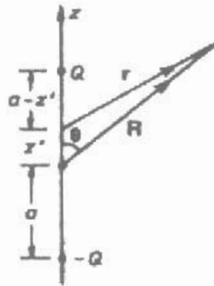
Mômen của lưỡng cực là $\mathbf{p} = 2Qa\cos(\omega_0 t)\mathbf{e}_z$, hoặc là phần thực của $2Qae^{-i\omega_0 t}\mathbf{e}_z$. Như đã chỉ ra trên hình 4.29, công suất trung bình trong một đơn vị góc khối tại R là

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\langle S\rangle}{R^{-2}} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta = \frac{Q^2a^2\omega_0^4\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\,.$$

(b) Phép gần đúng lưỡng cực là phù hợp nếu $R \gg \lambda \gg a$.

(c) Dòng điện chạy qua dây dẫn nối hai quả cầu kim loại có mật độ

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z\frac{d}{dt}\int \rho dz = -i\omega_0 Q\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega_0 t}\mathbf{e}_z\,, \qquad |z| \le a\,,$$



Hình 4.29

và nó tạo ra một thế vectơ

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}',t')}{r}dV',$$

trong đó $t' = t - \frac{r}{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, và V là vùng có sự phân bố dòng. Vì vậy

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{i\omega_0 Q\delta(x')\delta(y')e^{-i\omega_0(t-\frac{r}{c})}}{r}dx'dy'dz'\mathbf{e}_z \\ &= -i\frac{\mu_0\omega_0 Qe^{-i\omega_0 t}}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{ik_0 r}}{r}dz'\mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

trong đó $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. Đặt $R = |\mathbf{x}|$, khi đó $r^2 = R^2 - 2Rz'\cos\theta + z'^2$, như đã chỉ ra trong hình 4.29. Vì vậy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -i\frac{\mu_0\omega_0 Qe^{-i\omega_0 t}}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{ik_0\sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta}}}{\sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta}}dz'\mathbf{e}_z.$$

Đây là nghiệm chính xác. Để tính tích phân theo phương pháp giải tích, ta giả thiết $R \gg a$ và sử dụng gần đúng $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R}$, $\sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta} \approx R - z'\cos\theta$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{-i\mu_0\omega_0 Qe^{i(k_0R-\omega_0 t)}}{4\pi R}\int_{-a}^{a}e^{-ik_0 z'\cos\theta}dz'\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{iQe^{i(k_0R-\omega_0 t)}}{2\pi\varepsilon_0 cR}\frac{\sin(k_0 a\cos\theta)}{\cos\theta}\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ cầu, $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_R - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Khi đó ta có thể viết $\mathbf{A} = A_R\mathbf{e}_R + A_\theta\mathbf{e}_\theta$ với A_R, A_θ không phụ thuộc vào góc φ.

Từ trường được cho bởi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}A_R\right]\mathbf{e}_\varphi .$$

Vì ta chỉ quan tâm tới trường bức xạ biến thiên như $\frac{1}{R}$, nên ta có thể bỏ qua vi phân thứ hai ở vế phải. Vì vậy

$$B_\phi \approx \frac{1}{R}\frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R} = -\frac{k_0 Q e^{i(k_0 R - \omega t)}}{2\pi\varepsilon_0 c R}\cdot\frac{\sin(ka\cos\theta)\sin\theta}{\cos\theta},$$

cho nên

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2\mathbf{e}_R = \frac{\omega_0^2 Q^2}{8\pi\varepsilon_0 c R^2}\frac{\sin^2(ka\cos\theta)\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\mathbf{e}_R ,$$

và cuối cùng

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\overline{S}}{R^{-2}} = \frac{\omega_0^2 Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 c}\frac{\sin^2\theta\sin^2(ka\cos\theta)}{\cos^2\theta}.$$

Nếu điều kiện $\lambda \gg a$ cũng được thỏa mãn, thì $\sin(ka\cos\theta) \approx ka\cos\theta$ và biểu thức quy về biểu thức đối với phép gần đúng lưỡng cực.

4060

Hai điện tích điểm bằng nhau $+q$ dao động dọc theo trục z với các vị trí của chúng được xác định bởi

$$z_1 = z_0\sin(\omega t), \quad z_2 = -z_0\sin(\omega t), \quad x_i = y_i = 0, \qquad (i = 1, 2).$$

Trường bức xạ được quan sát tại ví trí $\mathbf{r}$ so với gốc (xem hình 4.30). Giả thiết rằng $|\mathbf{r}| \gg \lambda \gg z_0$, trong đó λ là bước sóng của bức xạ phát ra.

(a) Hãy tìm điện trường $\mathbf{E}$ và từ trường $\mathbf{B}$.

(b) Hãy tính công suất phát xạ trong một đơn vị góc khối theo hướng $\mathbf{r}$.

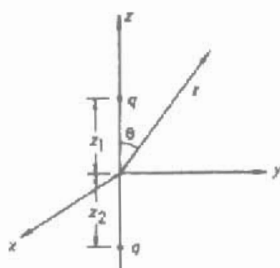
(c) Công suất bức xạ toàn phần là bao nhiêu? Sự phụ thuộc của công suất này vào ω so với bức xạ lưỡng cực như thế nào?

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Vì $|\mathbf{r}| \gg \lambda \gg z_0$, nên có thể sử dụng phép khai triển đa cực để tính điện từ trường. Đối với trường bức xạ ta chỉ cần xét các thành phần biến thiên như $\frac{1}{r}$. Mômen lưỡng cực điện đối với hệ này là

$$\mathbf{P} = (qz_1 + qz_2)\mathbf{e}_z = 0 .$$



Hình 4.30

Vì vậy trường lưỡng cực là bằng không (zero). Thế vectơ của trường bức xạ tứ cực điện cho bởi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega}{2r}e^{-i\omega t'}\int(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{r}'\rho dV',$$

trong đó

$$t' = t - \frac{r}{c}, \qquad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Vì vậy cảm ứng từ là

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega k^2}{2r^3}e^{i(kr-\omega t)}\int\mathbf{r}\times\mathbf{r}'(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\rho dV'$$

$$= -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^3}{2r^3c^2}e^{i(kr-\omega t)}\sum_n\mathbf{r}\times\mathbf{r}'(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')q_n.$$

Vì

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{r}' = \pm z_0(\mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta)$$

trong hệ tọa độ cầu, nên ta có

$$\mathbf{B} = i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^3}{2r^3c^2}e^{i(kr-\omega t)}2r^2z_0^2q\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\varphi$$

$$= i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^3z_0^2q}{rc^2}\sin\theta\cos\theta\, e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_\varphi.$$

Sau đó sử dụng phương trình Maxwell $\nabla\times\mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$ hay

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B}\times\mathbf{e}_r,$$

ta tìm được

$$\mathbf{E} = \frac{i\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^3z_0^2q}{rc}\sin\theta\cos\theta e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_\theta.$$

Thực tế thì $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ được cho bởi phần thực của các biểu thức trên.

(b) Vectơ Poynting trung bình là

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} \frac{\omega^6 z_0^4 q^2}{r^2 c^3} \sin^2\theta \cos^2\theta \mathbf{e}_r ,\end{aligned}$$

nên công suất bức xạ trung bình trong một đơn vị góc khối là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{r^{-2}} = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \frac{\omega^6 z_0^4 q^2}{c^3} \sin^2\theta \cos^2\theta .$$

(c) Năng lượng bức xạ toàn phần là

$$\begin{aligned}P &= \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \frac{\omega^6 z_0^4 q^2}{c^3} \int_0^\pi 2\pi \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{60\pi} \frac{\omega^6 z_0^4 q^2}{c^3} .\end{aligned}$$

Năng lượng bức xạ toàn phần biến thiên như ω^6 đối với bức xạ tứ cực điện và theo ω đối với bức xạ điện lưỡng cực.

4061

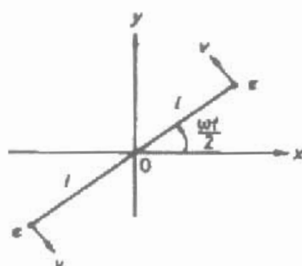
Hai điện tích điểm với điện tích e được đặt ở đầu mút của một đoạn thẳng có độ dài $2l$. Đoạn thẳng này quay với vận tốc góc không đổi $\omega/2$ quanh một trục vuông góc với đoạn thẳng và đi qua điểm giữa của nó như chỉ ra trong hình 4.31.

(a) Hãy tìm (1) mômen lưỡng cực điện, (2) mômen lưỡng cực từ, (3) mômen tứ cực điện.

(b) Hệ này phát ra loại bức xạ nào? Ở tần số nào?

(c) Giả thiết rằng bức xạ được quan sát ở xa các điện tích dưới một góc θ đối với trục quay. Xác định sự phân cực đối với $\theta = 0^0$, 90^0, $0 < \theta < 90^0$?

(Princeton)



Hình 4.31

Lời giải:

(a) (1) mômen lưỡng cực điện là

$$\mathbf{P} = e\mathbf{r}'_1 + e\mathbf{r}'_2 = 0\,.$$

(2) mômen lưỡng cực từ là

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{e}_z = \frac{2e}{T}\cdot(\pi l^2)\mathbf{e}_z = \frac{1}{2}e\omega l^2\mathbf{e}_z\,,$$

nó là không đổi

(3) Các vector vị trí của hai điện tích điểm này là

$$\mathbf{r}'_1 = -\mathbf{r}'_2 = l\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\mathbf{e}_x + l\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\mathbf{e}_y\,.$$

Tenxơ mômen tứ cực điện có các thành phần được cho bởi

$$Q_{ij} = \int(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\rho dV' = \sum_n(3x'_i x'_j - r'^2\cdot\delta_{ij})q_n\,,$$

trong đó $r'^2 = |\mathbf{r}'_1|^2 = |\mathbf{r}'_2|^2 = l^2$.
Như vậy các thành phần khác không là

$$Q_{11} = el^2[1 + 3\cos(\omega t')]\,,$$
$$Q_{12} = Q_{21} = 3el^2\sin(\omega t')\,,$$
$$Q_{22} = el^2[1 - 3\cos(\omega t')]\,.$$

(b) Vì $\mathbf{P} = 0$ và $\mathbf{m}$ là một vectơ không đổi, nên chúng sẽ không phát ra bức xạ. Do đó, bức xạ phát ra là bức xạ của tứ cực điện với tần số ω.

(c) Tại điểm $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$ ở xa các điện tích thì cảm ứng từ của trường bức xạ được cho bởi

$$\mathbf{B} = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega k}{6r}\mathbf{k} \times \mathbf{Q},$$

trong đó $k = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}_r$, $\mathbf{Q}$ có các thành phần $Q_i = \frac{1}{r}\sum_j Q_{ij}x_j$. Viết Q_{ij} như phần thực của

$$Q_{11} = el^2(1 + 3e^{-i\omega t'}),$$
$$Q_{12} = Q_{21} = 3el^2 ie^{-i\omega t'},$$
$$Q_{22} = el^2(1 - 3e^{-i\omega t'}),$$

vì $\mathbf{e}_r = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, ta có

$$Q_1 = el^2\sin\theta(\cos\varphi + 3e^{-i(\omega t' - \varphi)}),$$
$$Q_2 = el^2\sin\theta(\sin\varphi + 3ie^{-i(\omega t' - \varphi)}).$$

với $t' = t - \frac{r}{c}$, hay $-\omega t' = kr - \omega t$. Chú ý rằng trong khi tính $\mathbf{B}$, ta bỏ qua các số hạng Q_i là không đổi trong thời gian trễ t' vì chúng không đóng góp vào sự phát bức xạ.

(1) Đối với $\theta = 0^0$, $Q_1 = Q_2 = 0$ cho ta $B = 0$ nên không có bức xạ nào phát ra tại $\theta = 0^0$.

(2) Đối với $\theta = 90^0$,

$$Q_1 \sim 3el^2 e^{-i(\omega t' - \varphi)},$$
$$Q_2 \sim 3el^2 ie^{-i(\omega t' - \varphi)},$$
$$\mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),$$

nên trường bức xạ được cho bởi phần thực của các biểu thức sau

$$\mathbf{B} = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^3}{6rc^2}(Q_2\cos\varphi - Q_1\sin\varphi)\mathbf{e}_z$$
$$= \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\omega^3 el^2}{rc^2}e^{-i(\omega t' - 2\varphi)}\mathbf{e}_z,$$

và

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\omega^3 el^2}{rc}e^{-i(\omega t' - 2\varphi)}(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y).$$

Vì $E_x^2 + E_y^2 =$ hằng số, nên bức xạ là phân cực tròn.

(3) Đối với $0^0 < \theta < 90^0$,

$\mathbf{e}_r \times \mathbf{Q} = -\mathbf{e}_x Q_2 \cos\theta + \mathbf{e}_y Q_1 \cos\theta + \mathbf{e}_z(Q_2 \cos\varphi - Q_1 \sin\varphi)\sin\theta$, nên trường bức xạ được cho bởi phần thực của các biểu thức sau

$$B_x = -\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\omega^3 el^2}{rc^2}\sin\theta\cos\theta e^{-i(\omega t' - \varphi)},$$

$$B_y = -i\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\omega^3 el^2}{rc^2}\sin\theta\cos\theta e^{-i(\omega t' - \phi)},$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\omega^3 el^2}{rc^2}\sin^2\theta e^{-i(\omega t' - 2\varphi)}.$$

Vì tất cả ba thành phần của **E** và **B** đều phụ thuộc vào thời gian, nên bức xạ là không phân cực.

4062

(a) Hãy gọi tên đa cực điện thấp nhất trong trường bức xạ được phát ra bởi các phân bố điện tích thay đổi theo thời gian sau đây.

(1) Một vỏ quả cầu tích điện đồng đều mà bán kính của nó thay đổi như sau

$$R = R_0 + R_1\cos(\omega t).$$

(2) Hai hạt tích điện giống hệt nhau chuyển động chung quanh cùng một tâm với tốc độ không đổi, ở hai phía đối diện nhau của vòng tròn.

(b) Một vòng tròn với một điện tích dương và hai điện tích âm như trên hình 4.32 quay với vận tốc góc ω quanh một trục đi qua tâm và vuông góc với vòng tròn đó. Tần số của bức xạ tứ cực điện của nó là bao nhiêu?

(MIT)

Lời giải:

(a) (1) Đối với một vỏ quả cầu tích điện đều, do tính đến đối xứng cầu,

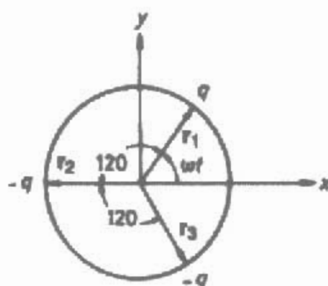
$$\mathbf{P} = \mathbf{D} = 0.$$

Nên tất cả các mômen đa cực điện đều bằng không.

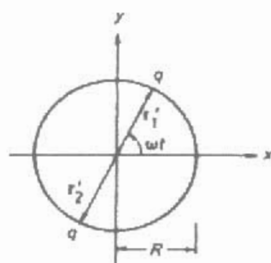
(2) Lấy trục tọa độ như trong hình 4.33 và cho đường thẳng nối các hạt quay quanh trục z với vận tốc góc ω. Khi đó các vectơ bán kính của hai hạt là

$$\mathbf{r}'_1 = R\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + R\sin(\omega t)\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{r}'_2 = -[R\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + R\sin(\omega t)\mathbf{e}_y].$$



Hình 4.32



Hình 4.33

trong đó $R = |\mathbf{r}'_1| = |\mathbf{r}'_2|$.

Mômen lưỡng cực điện của hệ này là

$$\mathbf{P} = q(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2) = 0\,.$$

Các thành phần của mômen tứ cực điện được cho bởi

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\rho dV' = \sum_n (3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})q_n\,,$$

trong đó $r'^2 = R^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3$. Vì vậy

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= 2qR^2[2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]\,,\\
Q_{22} &= 2qR^2[2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)]\,,\\
Q_{33} &= -2qR^2\,,\\
Q_{12} &= Q_{21} = 3qR^2\sin(2\omega t)\,,\\
Q_{13} &= Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0\,.
\end{aligned}$$

Do đó đa cực điện thấp nhất là tứ cực.

(b) Hãy lấy tọa độ cố định như trên hình 4.32. Khi đó các vectơ vị trí của ba điện tích điểm là

$$q_1 = q: \quad \mathbf{r}'_1 = R\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + R\sin(\omega t)\mathbf{e}_y\,,$$
$$q_2 = -q: \quad \mathbf{r}'_2 = R\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{e}_x + R\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{e}_y\,,$$
$$q_3 = -q: \quad \mathbf{r}'_3 = R\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)\mathbf{e}_x + R\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)\mathbf{e}_y\,.$$

Để xác định tần số của bức xạ tứ cực, ta chỉ phải tìm một thành phần của mômen tứ cực của hệ tích điện, ví dụ

$$\begin{aligned} Q_{12} &= 3R^2\left[q_1\cos(\omega t)\sin(\omega t) + q_2\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right.\\ &\quad\left. + q_3\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)\right]\\ &= \frac{3R^2q}{2}\left[\sin(2\omega t) - \sin\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(2\omega t + \frac{8\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Vì vậy tần số của bức xạ tứ cực là 2ω.

4063

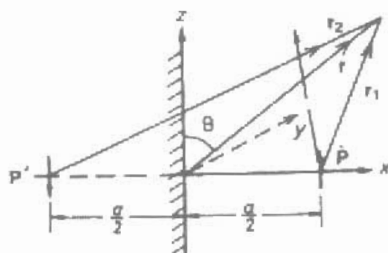
Một lưỡng cực điện dao động với tần số ω và biên độ P_0. Lưỡng cực được đặt cách một mặt phẳng dẫn lý tưởng vô hạn một khoảng bằng a/2 và song song với mặt phẳng đó. Hãy tìm trường điện từ và phân bố góc trung bình theo thời gian của bức xạ phát ra ở các khoảng cách $r \gg \lambda$.

(*Princeton*)

Lời giải:

Sử dụng các tọa độ Đềcác như trên hình 4.34. Sự ảnh hưởng của mặt phẳng dẫn lên không gian $x > 0$ tương đương với một lưỡng cực ảnh đặt tại $(-\frac{a}{2}, 0, 0)$ có mômen

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P} = -P_0 e^{-i\omega t}\mathbf{e}_z\,.$$



Hình 4.34

Thế vectơ tại điểm r là

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\dot{\mathbf{P}}}{r_1} + \frac{\dot{\mathbf{P}}}{r_2}\right)$$
$$= -i\frac{\mu_0}{4\pi}\omega P_0\left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2}\right)e^{-i\omega t}\mathbf{e}_z$$

Vì ta chỉ quan tâm đến trường bức xạ tại $r \gg a$, nên ta có thể sử dụng phép gần đúng

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2}\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r\,, \qquad r_2 \approx r + \frac{a}{2}\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r\,, \qquad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\,,$$

với $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ là các vectơ đơn vị trong hệ tọa độ cầu. Vì $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \sin\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi$, ta có

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi\,,$$
$$r_2 \approx r + \frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi\,,$$

và

$$\mathbf{A} \approx i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega P_0}{r}\left(e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi} - e^{-i\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\varphi}\right)e^{i(kr-\omega t)}\mathbf{e}_z$$
$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\omega P_0}{r}e^{i(kr-\omega t)}\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\mathbf{e}_z\,.$$

Trong hệ tọa độ cầu

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta$$

Để nhận được $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ta bỏ qua các số hạng có bậc cao hơn $\frac{1}{r}$ và nhận được

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \sin\theta A) \\ &= \frac{i\omega^2 P_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi\varepsilon_0 c^3 r} \sin\theta \sin\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi\right) \mathbf{e}_\varphi .\end{aligned}$$

Cường độ điện trường liên quan là

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r \\ &\approx \frac{i\omega^2 P_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\theta \sin\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi\right) \mathbf{e}_\theta .\end{aligned}$$

Vectơ Poynting trung bình là

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{e}_r = \frac{\omega^4 P_0^2 \sin^2\theta}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi\right) \mathbf{e}_r .$$

Do đó phân bố góc của bức xạ này được cho bởi

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\overline{S}}{r^{2}} = \frac{\omega^4 P_0^2 \sin^2\theta}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi\right) .$$

Nếu $\lambda \gg a$, thì $\sin(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi) \approx \frac{k}{2} a \sin\theta \cos\varphi$ và ta có biểu thức gần đúng sau

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} \approx \frac{\omega^6 P_0^2 a^2 \sin^4\theta \cos^2\varphi}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^5} .$$

4064

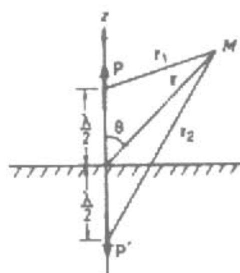
Một lưỡng cực điện nhỏ với mômen lưỡng cực P dao động với tần số ν. Lưỡng cực được đặt ở độ cao $\lambda/2$ bên trên một mặt phẳng dẫn lý tưởng vô hạn, như trên hình 4.35, trong đó λ là bước sóng ứng với tần số ν. Lưỡng cực này hướng theo chiều dương của z, còn mặt phẳng dẫn điện được coi là mặt phẳng xy. Giả thiết rằng kích thước của lưỡng cực này là rất nhỏ so với λ. Hãy tìm các biểu thức đối với điện trường và từ trường, và đối với năng thông ở khoảng cách r rất lớn so với λ như là một hàm của r và vectơ đơn vị **n** theo hướng từ điểm gốc đến điểm quan sát.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Ảnh hưởng của mặt phẳng dẫn này tương đương với một lưỡng cực ảnh đặt tại $z = -\frac{\lambda}{2}$ có mômen $\mathbf{P}' = -\mathbf{P} = -P_0e^{-i\omega t}\mathbf{e}_z$, trong đó $\omega = 2\pi\nu$. Xét một điểm quan sát M có vectơ vị trí $\mathbf{r}$ (r, θ, φ) và cho các khoảng cách từ P và P' tới điểm M lần lượt là r_1 và r_2. Đối với $r \gg \lambda$ ta có

$$r_1 \approx r - \frac{\lambda}{2}\cos\theta\,,$$
$$r_2 \approx r + \frac{\lambda}{2}\cos\theta\,.$$



Hình 4.35

Sử dụng lời giải của Bài toán **4063** với $\varphi = 0$, $a = \lambda$ và lưu ý rằng $k\lambda = 2\pi$, ta có

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{i\omega^2 P_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\theta\sin(\pi\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi\,,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{B}\times\mathbf{n}$$
$$\approx \frac{i\omega^2 P_0 e^{i(kr-\omega t)}}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\sin(\pi\cos\theta)\mathbf{e}_\theta\,,$$

và mật độ năng thông trung bình là (xem Bài toán **4011**)

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2\mathbf{n} = \frac{\omega^4 P_0^2\sin^2\theta}{8\varepsilon_0 c^3}\sin^2(\pi\cos\theta)\mathbf{n}\,,$$

trong đó $\omega = 2\pi\nu$.

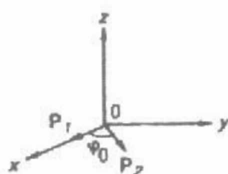
4065

Hai dao động tử lưỡng cực điện cùng dao động với tần số ω, nhưng lệch pha nhau là $\frac{\pi}{2}$. Biên độ của các mômen lưỡng cực đều bằng $\mathbf{P}_0$, nhưng hai vectơ hợp với nhau một góc ψ_0 (hãy cho $\mathbf{P}_1$ nằm dọc theo trục x và $\mathbf{P}_2$ nằm trong mặt phẳng xy) như trong hình 4.36. Đối với lưỡng cực $\mathbf{P}$ dao động tại gốc, thì trường $\mathbf{B}$ trong vùng bức xạ được cho bởi

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{1}{r} e^{ikr} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{P} \right).$$

Hãy tìm (a) phân bố góc trung bình, và (b) cường độ toàn phần trung bình của bức xạ được phát ra trong vùng bức xạ.

(SUNY, Buffalo)



Hình 4.36

Lời giải:

Mômen lưỡng cực điện của hai dao động tử này là

$$\mathbf{P}_1 = P_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_x$$
$$\mathbf{P}_2 = P_0 (\cos\psi_0 \mathbf{e}_x + \sin\psi_0 \mathbf{e}_y) e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

Mômen lưỡng cực của cả hệ này là

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$

và từ trường trong hệ đơn vị Gauss được cho bởi

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{1}{r} e^{ikr} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{P}).$$

Vì

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{e}_\theta \cos\theta \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi,$$
$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{e}_\theta \cos\theta \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi,$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i\,,$$

ta có

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{P}_1 = P_0 e^{-i\omega t}(\mathbf{e}_\varphi \cos\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_\theta \sin\varphi)\,,$$
$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{P}_2 = iP_0 e^{-i\omega t}\left[\mathbf{e}_\varphi \cos(\varphi - \psi_0)\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin(\varphi - \psi_0)\right]\,,$$

sao cho

$$\mathbf{B} = \frac{k^2 P_0}{r}\,\{[\sin\varphi + i\sin(\varphi - \psi_0)]\mathbf{e}_\theta$$
$$+[\cos\varphi + i\cos(\varphi - \psi_0)]\cos\theta\mathbf{e}_\varphi\}\,e^{i(kr-\omega t)}\,.$$

(a) Công suất trung bình trong một góc khối đơn vị là

$$\frac{d\overline{S}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^* r^2$$
$$= \frac{P_0^2 k^4 c}{8\pi}\left\{2 - \sin^2\theta[\cos^2\varphi + \cos^2(\varphi - \psi_0)]\right\}\,.$$

(b) Năng lượng toàn phần trung bình của bức xạ phát ra là

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\overline{S}}{d\Omega}\,\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}k^4 P_0^2 c\,.$$

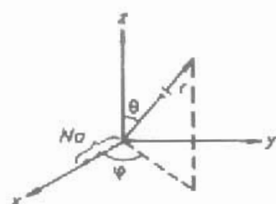
4066

Một hệ có N nguyên tử với độ phân cực điện α được đặt dọc theo trục x như trên hình 4.37. Khoảng cách giữa các nguyên tử là a. Hệ này được chiếu sáng bởi ánh sáng phân cực thẳng truyền theo hướng $+x$ với điện trường dọc theo trục z, nghĩa là

$$\mathbf{E} = (0,\,0,\,E_0 e^{i(kx-\omega t)})\,.$$

(a) Hãy tính phân bố góc của công suất bức xạ được đo bằng một đầu thu (detector) đặt ở xa các nguyên tử ($r \gg \lambda$ và $r \gg Na$). Hãy biểu diễn kết quả này như là một hàm của góc cực và góc phương vị θ và ϕ như được chỉ ra trong hình 4.37.

(b) Tính và vẽ phác sự phụ thuộc vào θ của công suất bức xạ trong mặt phẳng yz. Trừ trường hợp tầm thường $E = 0$, hãy tìm các điều kiện để công suất không được phát xạ trong mặt phẳng yz.



Hình 4.37

(c) Hãy tính biểu thức tổng quát đối với sự phụ thuộc vào ϕ của công suất bức xạ trong mặt phẳng xy và vẽ phác sự phụ thuộc này cho trường hợp $ka \gg 1$.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Vị trí của nguyên tử thứ m là

$$\mathbf{x}_m = (ma, 0, 0) .$$

Khi được chiếu bằng sóng phẳng, mômen lưỡng cực của nó là

$$\mathbf{P}_m = \alpha \mathbf{E}(\mathbf{x}_m, t) = \alpha E_0 e^{i(kma-\omega t)} \mathbf{e}_z .$$

Thế vectơ được sinh ra bởi N nguyên tử là

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\dot{\mathbf{P}}_m}{r_m}$$

$$= -i\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\alpha E_0 \mathbf{e}_z \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{r_m} \exp\left\{ i\left[kma - \omega\left(t - \frac{r_m}{c}\right)\right]\right\} .$$

Đối với $r \gg \lambda$, $r \gg Na$, ta lấy gần đúng

$$r_m \approx r - ma \sin\theta \cos\varphi ,$$

$$\frac{1}{r_m} \approx \frac{1}{r} .$$

Khi đó

$$\mathbf{A} = -i\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega\alpha E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{e}_z \sum_{m=0}^{N-1} \exp[ikma(1 - \sin\theta\cos\varphi)] .$$

Để tìm trường bức xạ ta chỉ cần giữ lại trong $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ các số hạng tỉ lệ với $\sim \frac{1}{r}$. Do đó, theo Bài toán **4063**, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA\sin\theta)\mathbf{e}_\varphi \\ &= -\frac{\omega^2 \alpha E_0 \sin\theta e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sum_{m=0}^{N-1} e^{ikma(1-\sin\theta\cos\varphi)}\mathbf{e}_\varphi .\end{aligned}$$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{imx}\right|^2 = \left|\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right|^2 = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}} ,$$

ta tìm được vectơ Poynting trung bình của bức xạ này

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}} &= \frac{\varepsilon_0 c^3}{2}|\mathbf{B}|^2\mathbf{e}_r \\ &= \frac{\omega^4\alpha^2E_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\cdot\frac{\sin^2[\frac{1}{2}Nka(1-\sin\theta\cos\varphi)]}{\sin^2[\frac{1}{2}ka(1-\sin\theta\cos\varphi)]}\mathbf{e}_r .\end{aligned}$$

Phân bố góc được cho bởi công suất trung bình được phát xạ trong một đơn vị góc khối

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\omega^4\alpha^2E_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\sin^2[\frac{1}{2}Nka(1-\sin\theta\cos\varphi)]}{\sin^2[\frac{1}{2}ka(1-\sin\theta\cos\varphi)]} .$$

(b) Trong mặt phẳng yz, $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$, phân bố góc của bức xạ này được cho bởi

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} \propto \sin^2\theta\frac{\sin^2[\frac{1}{2}Nka]}{\sin^2(\frac{1}{2}ka)} \sim \sin^2\theta ,$$

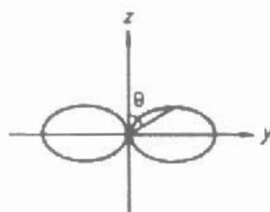
kết quả này được minh hoạ trên hình 4.38.

Để $\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = 0$, ta đòi hỏi $\sin(\frac{1}{2}Nka) = 0$, tức là điều kiện để không có bức xạ nào trong mặt phẳng yz là

$$\frac{1}{2}Nka = n\pi \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

(c) Trong mặt phẳng xy, $\theta = 90^0$, $\sin\theta = 1$, phân bố góc được cho bởi

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} \propto \frac{\sin^2[\frac{1}{2}Nka(1-\cos\varphi)]}{\sin^2[\frac{1}{2}ka(1-\cos\varphi)]} = \frac{\sin^2[Nka\sin^2\frac{\varphi}{2}]}{\sin^2[ka\sin^2\frac{\varphi}{2}]} .$$

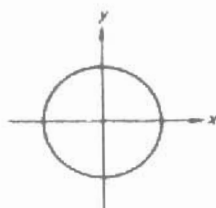


Hình 4.38

Vì $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin^2(kx)}{(kx)^2}=\pi\delta(x)$, ta có

$$\frac{\sin^2(Nkx)}{\sin^2(kx)}=\frac{N^2\sin^2(Nkx)/(Nkx)^2}{\sin^2(kx)/(kx)^2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{\pi N^2\delta(Nx)}{\pi\delta(x)}=N^2 .$$

Vì vậy, đối với $ka \gg 1$ phân bố góc của bức xạ trong mặt phẳng xy là đẳng hướng, nghĩa là phân bố này là một đường tròn như được minh họa trên hình 4.39.



Hình 4.39

4067

Một phân bố điện tích khá phức tạp quay quanh một trục cố định với vận tốc góc là ω_0. Không có điểm nào trong phân bố này ở xa hơn khoảng cách d từ trục đó. Chuyển động này là phi tương đối, nghĩa là $\omega_0 d \ll c$ (xem hình 4.40).

(a) Một người quan sát ở khoảng cách $r \gg d$ có thể thu được các tần số nào của bức xạ điện từ?

(b) Hãy đưa ra một ước lượng về bậc độ lớn của công suất bức xạ tại mỗi một tần số (lấy trung bình theo cả thời gian và góc quan sát).

(MIT)



Hình 4.40

Lời giải:

Như đã thấy trong hình 4.40, d là khoảng cách xa từ trục quay của hệ với $v = \omega_0 d \ll c$, nên bức xạ của hệ này có thể được coi như là một bức xạ đa cực.

Gọi $\sum(x, y, z)$ là hệ quy chiếu của người quan sát và $\sum'(x', y', z')$ là hệ quy chiếu gắn chặt với hệ. Có thể biểu thị vectơ bán kính của một điểm trong phân bố này như sau

$$\boldsymbol{\xi} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z \quad (1)$$

trong các hệ tọa độ $\sum$ và $\sum'$. Ta lấy trục quay là trục z chung cho cả hai hệ tọa độ và rằng tại $t = 0$ các trục x' và x, y và y' là trùng nhau. Khi đó ta có các phương trình biến đổi như sau

$$\begin{cases} x = x'\cos(\omega_0 t) - y'\sin(\omega_0 t)\,, \\ y = x'\sin(\omega_0 t) + y'\cos(\omega_0 t)\,, \\ z = z'\,. \end{cases} \quad (2)$$

Bây giờ ta có thể tìm mômen lưỡng điện $\mathbf{P}(t)$, mômen tứ cực điện $\mathbf{D}(t)$ và mômen lưỡng cực từ $\mathbf{m}(t)$ trong hệ tọa độ $\sum$. Mômen lưỡng cực điện là

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \int \rho\boldsymbol{\xi}dV = \int \rho(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)dV \\ &= \int \rho\{[x'\cos(\omega_0 t) - y'\sin(\omega_0 t)]\mathbf{e}_x + [x'\sin(\omega_0 t) \\ &\quad + y'\cos(\omega_0 t)]\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z\}dV \\ &= [P'_{x'}\cos(\omega_0 t) - P'_{y'}\sin(\omega_0 t)]\mathbf{e}_x + [P'_{x'}\sin(\omega_0 t) \\ &\quad + P'_{y'}\cos(\omega_0 t)]\mathbf{e}_y + P'_{z'}\mathbf{e}_z\,. \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó $P'_{x'}$, $P'_{y'}$ và $P'_{z'}$ là các thành phần x, y và z của mômen lưỡng cực điện trong hệ tọa độ $\sum'$ trong đó phân bố điện tích là đứng yên. Phương trình (3) cho thấy rằng $\mathbf{P}(t)$ dao động với tần số ω_0. Vì vậy bức xạ lưỡng cực điện là một bức xạ đơn sắc có tần số góc ω_0.

Vì vận tốc góc ω_0 là một hằng số, nên sự quay của hệ điện tích sẽ chỉ sinh ra một dòng điện ổn định. Vì vậy mômen từ m của hệ này là một vectơ không đổi, không phụ thuộc vào thời gian. Vì vậy không có bức xạ lưỡng cực từ (nó là $\propto \ddot{m}$) nào được phát xạ.

Đối với mômen tứ cực điện $\mathbf{D}(t)$, các thành phần được cho bởi

$$D_{ij}(t) = \int [3x_i x_j - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ij}]\rho dV .$$
$$(i, j = 1, 2, 3, \; x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z)$$

Ví dụ

$$\begin{aligned} D_{12} = D_{21} &= 3\int \rho xy dV \\ &= 3\int \rho[x'\cos(\omega_0 t) - y'\sin(\omega_0 t)]\,[x'\sin(\omega_0 t) + y'\cos(\omega_0 t)]dV \\ &= 3\int \rho\left[\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)\sin(2\omega_0 t) + x'y'\cos(2\omega_0 t)\right]dV . \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ $\sum'$ các thành phần của mômen tứ cực là

$$D'_{12} \equiv D'_{x'y'} = 3\int \rho x'y' dV ,$$

$$\begin{aligned} D'_{11} - D'_{22} &= D'_{x'x'} - D'_{y'y'} \\ &= \int \rho(2x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 - 2x_2'^2 - x_1'^2 - x_3'^2)dV \\ &= 3\int \rho(x_1'^2 - x_2'^2)dV . \end{aligned}$$

Lưu ý rằng khi quay các phần tử tích điện ρdV không thay đổi. Do đó

$$D_{12} = D_{21} = \frac{D'_{11} - D'_{22}}{2}\sin(2\omega_0 t) + D'_{12}\cos(2\omega_0 t) . \tag{4}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} D_{13} = D_{31} = 3\int \rho xz dV &= 3\int \rho\big[x'\cos(\omega_0 t) - y'\sin(\omega_0 t)\big]z' dV \\ &= D'_{13}\cos(\omega_0 t) - D'_{23}\sin(\omega_0 t) . \end{aligned} \tag{5}$$

Và có thể nhận được các thành phần khác của $\mathbf{D}(t)$ một cách tương tự. Từ các phương trình (4) và (5) ta thấy rằng bức xạ tứ cực điện là sự hỗn hợp của hai tần số góc đơn sắc ω_0 và $2\omega_0$.

Tóm lại, các phương trình (3), (4) và (5) cho thấy rằng các tần số của bức xạ điện từ của hệ này là ω_0 (bức xạ lưỡng cực điện, bức xạ này chiếm ưu thế) và $2\omega_0$ (bức xạ tứ cực điện).

Các trường của bức xạ đa cực tiếp theo bị suy giảm về độ lớn do thừa số $kd = \frac{\omega_0}{c}d$. Cho nên bức xạ tứ cực điện là yếu hơn bức xạ lưỡng cực điện bằng bởi thừa số $(\frac{\omega_0}{c}d)^2$.

PHẦN V

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI
TƯƠNG TÁC HẠT - TRƯỜNG

1. PHÉP BIẾN ĐỔI LORENTZ (5001–5017)

5001

Máy vô tuyến định vị (rađa) bắn tốc độ hoạt động ở tần số 10^9 Hz. Hãy xác định tần số phách giữa tín hiệu truyền đi và tín hiệu nhận lại sau khi phản xạ từ một ô tô đang chuyển động với vận tốc 30 m/s.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Giả thiết ô tô chuyển động về phía rađa với vận tốc v. Gọi tần số của rađa là ν_0 và tần số của tín hiệu mà ô tô nhận được là ν_1. Tình hình cũng hệt như vậy nếu ô tô đứng nguyên còn rađa chuyển động về phía nó với vận tốc v. Do đó hiệu ứng Doppler tương đối tính cho

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx \nu_0 \left(1+\frac{v}{c}\right) ,$$

ở đây đã lấy gần đúng đến lũy thừa bậc một của v/c. Bây giờ ô tô hoạt động như là một nguồn với tần số ν_1, do vậy tần số của tín hiệu phản xạ mà rađa nhận được (cũng lấy đến lũy thừa bậc một của v/c) là

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx \nu_1 \left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \nu_0 \left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx \nu_0 \left(1+\frac{2v}{c}\right) .$$

Vì vậy tần số phách là

$$\nu_2 - \nu_0 = \nu_0 \cdot \frac{2v}{c} = 10^9 \times \frac{2\times 30}{3\times 10^8} = 200 \text{ Hz} .$$

Kết quả cũng giống như vậy nếu ta giả thiết rằng ô tô đang chuyển động ở xa còn rađa thì đứng nguyên. Trong trường hợp này ta cần phải thay v bằng $-v$ trong biểu thức trên và nhận được $\nu_0 - \nu_2 \approx \nu_0 \frac{2v}{c}$.

5002

Một sóng điện từ phẳng đơn sắc truyền trong không gian tự do và đi tới vuông góc với bề mặt phẳng một môi trường có chiết suất n. Đối với người quan sát không chuyển động, thì điện trường của sóng với được xác định bởi phần thực của $E_x^0 e^{i(kz-\omega t)}$, trong đó z là trục tọa độ dọc theo đường vuông

góc tới bề mặt. Hãy tìm tần số của sóng phản xạ trong trường hợp môi trường và bề mặt của nó là chuyển động với vận tốc v dọc theo chiều dương của trục z đối với người quan sát.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Gọi hệ quy chiếu của người quan sát và hệ quy chiếu gắn cố định với môi trường chuyển động lần lượt là Σ và Σ'. Σ' chuyển động với vận tốc v so với Σ theo chiều z. Gọi các vectơ truyền bốn chiều của các sóng tới và sóng phản xạ trong các hệ Σ và Σ' lần lượt là

$$k_i = (0, 0, k, \frac{\omega}{c}), \quad k_r = (0, 0, -k_2, \frac{\omega_2}{c}) ,$$

$$k'_i = (0, 0, k', \frac{\omega'}{c}), \quad k'_r = (0, 0, -k'_2, \frac{\omega'_2}{c}) ,$$

trong đó $k = \frac{\omega}{c}$, $k_2 = \frac{\omega_2}{c}$, $k' = \frac{\omega'}{c}$, $k'_2 = \frac{\omega'_2}{c}$.

Phép biến đổi Lorentz đối với vectơ bốn chiều cho

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k\right) = \gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta) ,$$

$$\frac{\omega_2}{c} = \gamma\left[\frac{\omega'_2}{c} + \beta(-k'_2)\right] = \gamma\frac{\omega'_2}{c}(1-\beta) ,$$

với $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Trong hệ Σ', không có sự thay đổi về tần số nào xảy ra đối với sự phản xạ, nghĩa là, $\omega'_2 = \omega'$. Do đó

$$\omega_2 = \gamma\omega'(1-\beta) = \gamma^2\omega(1-\beta)^2 = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\omega ,$$

là tần số góc của sóng phản xạ mà người quan sát thu được.

5003

Trong hệ quy chiếu quán tính của các ngôi sao cố định, một tàu vũ trụ bay dọc theo trục x, và $x(t)$ là vị trí của nó tại thời gian t. Tất nhiên vận tốc v và gia tốc a trong hệ này là $v = \frac{dx}{dt}$ và $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Giả thiết chuyển động này diễn ra sao cho gia tốc này đối với các nhà du hành vũ trụ là không đổi theo thời gian. Tại một thời điểm nào đấy chúng ta đổi sang hệ quy chiếu quán tính, trong đó

tàu vũ trụ dừng lại tức thời. Cho g là gia tốc của tàu vũ trụ trong hệ tọa độ này và ở thời điểm này. Bây giờ hãy giả thiết rằng g được xác định theo từng thời điểm một, là không đổi. Cho g là hằng số. Trong hệ tọa độ gắn với ngôi sao cố định, tàu vũ trụ khởi động với tốc độ $v = 0$ khi $x = 0$. Nó sẽ đi được khoảng cách x là bao nhiêu khi nó đạt đến tốc độ v?

Cho phép động học tương đối tính, cho nên v không cần phải nhỏ so với tốc độ của ánh sáng c.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Hãy xét hai hệ quy chiếu quán tính Σ và Σ'. Hệ Σ' chuyển động đối với Σ với vận tốc v dọc theo chiều x . Gọi tốc độ và gia tốc của một vật chuyển động theo chiều x trong hai hệ này lần lượt là u, $a = \frac{du}{dt}$ và u', $a' = \frac{du'}{dt'}$. Phép biến đổi Lorentz cho ta

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad ct = \gamma(ct' + \beta x') ,$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Khi đó tốc độ của vật này thay đổi theo biểu thức sau

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} . \tag{1}$$

Lấy vi phân các biểu thức trên, ta được

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) = \gamma dt'\left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right) ,$$

$$du = \frac{du'}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)^2} ,$$

tỉ số của hai biểu thức trên cho ta sự biến đổi của gia tốc

$$a = \frac{a'}{\gamma^3\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)^3} . \tag{2}$$

Bây giờ hãy giả thiết rằng Σ là hệ quy chiếu quán tính gắn với các ngôi sao cố định và Σ' là hệ quy chiếu quán tính trong đó tàu vũ trụ đứng yên tức thời. Khi đó trong Σ'

$$u' = 0, \quad a' = g ,$$

và các phương trình (1) và (2) cho ta

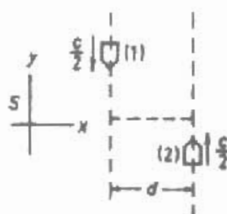
$$u = v, \quad a = \frac{g}{\gamma^3}$$

với $\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Vì trong hệ Σ tốc độ của tàu vũ trụ được tăng từ 0 đến v, nên khoảng cách đi được là

$$x = \int u dt = \int_0^v \frac{u du}{a} = \frac{1}{g} \int_0^v \frac{u du}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}} = \frac{c^2}{g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} .$$

5004

Khi được quan sát trong một hệ quy chiếu quán tính S, hai tàu vũ trụ đi theo hai đường thẳng song song cách nhau một khoảng là d nhưng ngược chiều nhau như trong hình 5.1. Tốc độ của mỗi tàu là $c/2$, trong đó c là tốc độ của ánh sáng.



Hình 5.1

(a) Ngay tại thời điểm (được nhìn từ S) khi các tàu ở khoảng cách gần nhau nhất (đường chấm trong hình 5.1) thì tàu (1) phóng ra một gói nhỏ với vận tốc $3c/4$ (cũng được nhìn từ S). Theo quan điểm của người quan sát trong tàu (1) thì gói này phải được ném với góc là bao nhiêu để tàu (2) nhận được? Giả thiết rằng người quan sát trong tàu (1) có hệ tọa độ với các trục song song với các trục của S và như đã vẽ trong hình 5.1, hướng của chuyển động là song song với trục y.

(b) Tốc độ của gói này là bao nhiêu theo quan điểm của người quan sát trong tàu (1)?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

Trong hệ quán tính S, thành phần y của tốc độ gói hàng cần phải bằng $c/2$ để gói hàng có cùng tọa độ y như tàu (2) khi gói hàng đi qua khoảng cách

$\Delta x = d$. Có thể biểu diễn tốc độ của gói hàng trong hệ S dưới dạng

$$\boldsymbol{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$$

với $u_y = c/2$. Vì $u = |\boldsymbol{u}| = \frac{3}{4}c$,

$$u_x = \sqrt{u^2 - u_y^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}c\ .$$

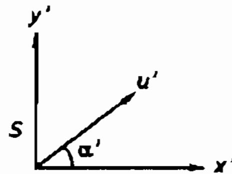
Gọi S' là hệ quy chiếu quán tính gắn cố định với tàu (1). Tốc độ của gói hàng trong S' là

$$\mathbf{u}' = u_x'\mathbf{e}_x' + u_y'\mathbf{e}_y'\ .$$

S' chuyển động với tốc độ $c/2$ so với S dọc theo hướng $-y$, nghĩa là, tốc độ của S' so với S là $\mathbf{v} = -c\mathbf{e}_y/2$. Khi đó, phép biến đổi tốc độ cho ta

$$u_y' = \frac{u_y - v}{1 - \frac{vu_y}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c\ ,$$

$$u_x' = \frac{u_x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_y}{c^2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}c\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{20}}c\ .$$



Hình 5.2

Gọi α' là góc giữa tốc độ u′ của gói hàng trong S' và trục x' như đã chỉ ra trong hình 5.2. Khi đó

$$\tan\alpha' = \frac{u_y'}{u_x'} = \frac{8}{\sqrt{15}}, \quad \text{hay} \quad \alpha' = \arctan\left(\frac{8}{\sqrt{15}}\right).$$

(b) Tốc độ của gói hàng trong S' là

$$u' = |\mathbf{u}'| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} = \frac{\sqrt{79}}{10}c\ .$$

5005

(a) Hãy viết các phương trình bảo toàn động lượng (xung lượng) và năng lượng cho hiệu ứng Compton (một photon đập vào một êlectron ở trạng thái đứng yên).

(b) Hãy tìm năng lượng của photon tán xạ đối với trường hợp tán xạ ngược lại 180 độ (Giả thiết êlectron bật lại chuyển động với tốc độ gần bằng tốc độ của ánh sáng).

(*Wisconsin*)

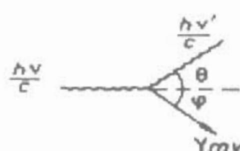
Lời giải:

(a) Sự bảo toàn động lượng được biểu diễn bằng các phương trình sau

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma mv\cos\varphi ,$$

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = \gamma mv\sin\varphi ,$$

trong đó θ là góc các giữa hướng chuyển động của photon tới và photon tán xạ, φ là góc giữa photon tới và êlectron giật lùi như trong hình 5.3, m là khối lượng nghỉ của êlectron, $\beta = \frac{v}{c}$, v là vận tốc của êlectron giật lùi và $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.



Hình 5.3

Sự bảo toàn năng lượng được biểu diễn bằng phương trình

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \gamma mc^2 .$$

(b) Đối với tán xạ ngược, $\theta = 180^0$, $\varphi = 0^0$. Các phương trình trên rút gọn thành

$$h\nu + h\nu' = \gamma\beta mc^2 , \quad (1)$$

$$h\nu - h\nu' = (\gamma - 1)mc^2 . \quad (2)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$(h\nu + h\nu')^2 = \gamma^2\beta^2 m^2 c^4 = (\gamma^2 - 1)m^2 c^4 . \quad (3)$$

Kết hợp các phương trình (2) và (3), ta có

$$4h^2\nu\nu' = 2mc^2 h(\nu - \nu') ,$$

hay

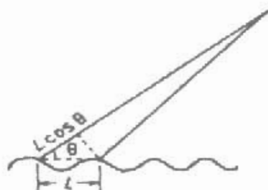
$$h\nu' = \frac{h\nu}{\frac{2h\nu}{mc^2} + 1} ,$$

Đó là năng lượng của photon tán xạ.

5006

Một hạt tích điện buộc phải chuyển động với vận tốc v không đổi theo hướng x (với $y = y_0$, $z = 0$ cố định). Hạt chuyển động bên trên một tấm kim loại dẫn lý tưởng và rộng vô hạn, có dạng lượn sóng với "bước sóng" L dọc theo trục x. Một người quan sát ở xa trong mặt phẳng $z = 0$ và thu bức xạ điện từ phát ra dưới góc θ (góc giữa vectơ vận tốc và một vectơ được vẽ từ điện tích đến người quan sát) như trong hình 5.4. Người quan sát ghi được bước sóng λ của bức xạ này là bao nhiêu?

(*Princeton*)



Hình 5.4

Lời giải:

Các điện tích cảm ứng trên tấm kim loại sẽ chuyển động trên bề mặt của tấm kim loại theo hướng chuyển động của hạt tích điện. Gia tốc của các điện tích cảm ứng chuyển động trên bề mặt gợn sóng sẽ dẫn đến bức xạ hãm. Bức xạ thu được của người quan sát từ xa theo hướng θ là kết quả của sự giao thoa tăng cường theo hướng đó. Vì vậy bước sóng của bức xạ này thỏa mãn điều kiện

$$\frac{L}{v} - \frac{L\cos\theta}{c} = m\frac{\lambda}{c} ,$$

trong đó m là một số nguyên, hay

$$\lambda_m = \frac{L}{m}\left(\frac{c}{v} - \cos\theta\right) .$$

đối với $m = 1$, $\lambda_1 = L\left(\frac{c}{v} - \cos\ \theta\right)$.

Chúng ta cũng có thể tiếp cận vấn đề này bằng cách coi ảnh hưởng của tấm kim loại như là của một điện tích ảo, nó cùng với điện tích thực tạo ra một lưỡng cực đang dao động với vận tốc $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ và tần số của giao động $f_0 = \frac{v}{L}$. Theo công thức về dịch chuyển Doppler, tần số ghi được của người quan sát là

$$f(\theta) = \frac{1 + \beta\ \cos\ \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} f_0 \approx \left(1 + \frac{v}{c} \cos\ \theta\right) f_0 ,$$

và bước sóng tương ứng là

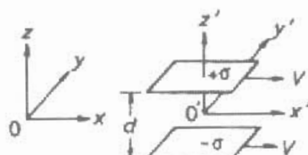
$$\lambda(\theta) = \frac{c}{f} = \frac{cL}{v}\left(1 - \frac{v}{c} \cos\ \theta\right) .$$

Kết quả này là giống như λ_1 tính được ở trên.

5007

Hai tấm lớn song song (không dẫn) đặt cách nhau một khoảng cách d và được định hướng như trong hình 5.5. Chúng cùng chuyển động dọc theo trục x với vận tốc v (không nhất thiết là phải nhỏ so với c). Các tấm trên và dưới có mật độ điện tích mặt đồng đều là $+\sigma$ và $-\sigma$ trong hệ đứng yên của các tấm đó. Hãy tìm độ lớn và hướng của điện trường và từ trường ở giữa các tấm đó (bỏ qua ảnh hưởng của mép).

(*Columbia*)



Hình 5.5

Lời giải:

Gọi các trường điện từ là $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ trong hệ quy chiếu S' $(0\ x'\ y'\ z')$ trong đó các tấm này là đứng yên và là $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm S $(0\ x\ y\ z)$. Các vectơ trường biến đổi theo

$$E_x = E'_x\,, \quad B_x = B'_x\,,$$

$$E_y = \gamma(E'_y + \beta c B'_z)\,, \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{\beta}{c}E'_z\right)\,,$$

$$E_z = \gamma(E'_z - \beta c B'_y)\,, \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{\beta}{c}E'_y\right)\,,$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.
Trong hệ có các tấm đứng yên S',

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0\,,$$

$$E'_x = E'_y = 0, \quad E'_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,,$$

do đó,

$$E_x = 0, \quad B_x = 0\,,$$

$$E_y = 0, \quad B_y = \frac{\gamma\beta}{\varepsilon_0 c}\sigma\,,$$

$$E_z = -\frac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0}\,, \quad B_z = 0\,.$$

Vì vậy trong hệ phòng thí nghiệm, cường độ điện trường theo hướng $-z$ và có độ lớn là $\frac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0}$, trong khi độ cảm ứng từ theo hướng $+y$ và có độ lớn $\frac{\gamma v}{\varepsilon_0 c^2}\sigma$, trong đó $\gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$.

5008

Hãy chứng minh rằng $E^2 - B^2$ và $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ là bất biến trong phép biến đổi Lorentz.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Hãy phân tích trường điện từ ra thành các thành phần nằm dọc và nằm ngang so với hướng của vận tốc tương đối giữa hai hệ quy chiếu Σ và Σ'. Trong Σ, ta có

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel .$$

Trong Σ', chuyển động với vận tốc v so với Σ, ta có (trong hệ đơn vị Gauss)

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel , \quad \mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel ,$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_\perp \right) ,$$

$$\mathbf{B}'_\perp = \gamma \left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}_\perp \right) ,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= \mathbf{E}'_\parallel \cdot \mathbf{B}'_\parallel + \mathbf{E}'_\perp \cdot \mathbf{B}'_\perp \\ &= \mathbf{E}_\parallel \cdot \mathbf{B}_\parallel + \gamma^2 \left[\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp)}{c^2} \right] . \end{aligned}$$

Vì $\mathbf{v}$ là vuông góc với cả $\mathbf{B}_\perp$ và $\mathbf{E}_\perp$, ta có

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp) = v^2 \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp ,$$

cho nên

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}_\parallel \cdot \mathbf{B}_\parallel + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = \mathbf{E}_\parallel \cdot \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} .$$

Từ biểu thức đối với $\mathbf{E}'_\perp$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'^2_\perp &= \gamma^2 \left[\mathbf{E}^2_\perp + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp)^2 + 2\mathbf{E}_\perp \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_\perp \right) \right] \\ &= \gamma^2 \left(\mathbf{E}^2_\perp + \frac{v^2}{c^2} \mathbf{B}^2_\perp + \frac{2\mathbf{E}_\perp \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp)}{c} \right) , \end{aligned}$$

và

$$\mathbf{B}'^2_\perp = \gamma^2 \left(\mathbf{B}^2_\perp + \frac{v^2}{c^2} \mathbf{E}^2_\perp - \frac{2\mathbf{B}_\perp \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp)}{c} \right) .$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 &= (\mathbf{E}'_\parallel + \mathbf{E}'_\perp)^2 - (\mathbf{B}'_\parallel + \mathbf{B}'_\perp)^2 \\
&= \mathbf{E}'^2_\parallel - \mathbf{B}'^2_\parallel + \mathbf{E}'^2_\perp - \mathbf{B}'^2_\perp \\
&= (\mathbf{E}^2_\parallel - \mathbf{B}^2_\parallel) + \gamma^2 \left(\mathbf{E}^2_\perp + \frac{v^2}{c^2}\mathbf{B}^2_\perp - \mathbf{B}^2_\perp - \frac{v^2}{c^2}\mathbf{E}^2_\perp \right) \\
&\quad + \frac{2\gamma^2}{c}[\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp] \\
&= (\mathbf{E}^2_\parallel - \mathbf{B}^2_\parallel) + (\mathbf{E}^2_\perp - \mathbf{B}^2_\perp) \\
&= \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 ,
\end{aligned}$$

vì $\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_\perp = -\mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp$.

Cho nên $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ và $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ là không thay đổi trong phép biến đổi Lorentz. Lưu ý rằng trong hệ đơn vị SI thì $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ là bất biến Lorentz.

5009

(a) Một sóng điện từ cổ điển thỏa mãn các hệ thức sau giữa điện trường và từ trường

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \mathbf{E}^2 = c^2\mathbf{B}^2$$

Hãy chứng tỏ rằng nếu các hệ thức này được thỏa mãn trong một hệ quy chiếu Lorentz nào thì chúng cũng sẽ thỏa mãn trong tất cả các hệ khác.

(b) Nếu K là một vectơ ba chiều theo hướng truyền của sóng, thì theo thuyết điện từ cổ điển, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = 0$. Hãy chứng tỏ rằng, khẳng định này cũng không thay đổi trong phép biến đổi Lorentz bằng cách chứng tỏ sự tương đương của nó với mệnh đề bất biến Lorentz một cách hiển nhiên $n^\mu F_{\mu\nu} = 0$, trong đó n^μ là vectơ bốn chiều theo hướng truyền sóng và $F_{\mu\nu}$ là tenxơ cường độ trường.

Các phần (a) và (b) cùng cho thấy rằng một sóng ánh sáng trông như thế nào trong một hệ quy chiếu thì nó cũng trông giống như thế trong bất kì hệ nào khác.

(c) Hãy xét một sóng điện từ mà trong một hệ quy chiếu nào đó có dạng

$$E_x = cB_y = f(ct - z) , ,$$

trong đó $\lim\limits_{z \to \pm\infty} f(z) \to 0$. Hãy xác định giá trị của các trường đó trong một hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc v theo hướng z đối với hệ quy chiếu mà

trong đó các trường có giá trị như đã cho ở trên? Hãy dẫn ra biểu thức của các mật độ năng lượng và xung lượng của sóng ở trong hệ ban đầu và trong hệ chuyển động với vận tốc v, hãy chứng minh rằng năng xung lượng toàn phần của sóng đó biến đổi như một vectơ bốn chiều trong phép biến đổi giữa hai hệ. (Giả thiết phạm vi lan truyền của sóng trong mặt phẳng $x-y$ là lớn nhưng hữu hạn, nên năng lượng và xung lượng toàn phần là hữu hạn).

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Như đã được chứng minh trong Bài toán **5008**, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ là các bất biến Lorentz. Vì vậy trong hệ Lorentz Σ' khác, ta có

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0\,, \quad \mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2 = 0\ ,$$

tức là

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = 0\,, \quad \mathbf{E}'^2 = c^2\mathbf{B}'^2\ .$$

(b) Có thể biểu diễn tenxơ điện trường bằng ma trận

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_3 & cB_2 & -E_1 \\ cB_3 & 0 & -cB_1 & -E_2 \\ -cB_2 & cB_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Sử dụng vectơ truyền sóng điện từ có bốn chiều $K^\mu = (K_1,\ K_2,\ K_3,\ \frac{\omega}{c})$ trong đó $K = \frac{\omega}{c}$, ta có thể biểu diễn $n^\mu \equiv \frac{1}{K}K^\mu$. Khi đó $n^\mu F_{\mu\nu} = 0$ sẽ tương đương với $K^\mu F_{\mu\nu} = 0$. Đối với $\nu = 1$, ta có

$$+K_2cB_3 - K_3cB_2 + \frac{\omega}{c}E_1 = 0\ ,$$

hay

$$E_1 = \frac{c}{K}(\mathbf{B}\times\mathbf{K})_1\ .$$

Ta cũng nhận được các biểu thức tương tự đối với E_2 và E_3. Vì vậy

$$\mathbf{E} = \frac{c}{K}(\mathbf{B}\times\mathbf{K})\ . \tag{1}$$

Đối với $\nu = 4$, ta có

$$-K_1E_1 - K_2E_2 - K_3E_3 = 0\ ,$$

hay

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{E} = 0\ . \tag{2}$$

Vì $n^\mu F_{\mu\nu} = 0$ là bất biến Lorentz, nên chúng có dạng giống nhau trong tất cả các hệ quy chiếu.

Bây giờ phương trình (1) cho

$$\mathbf{E}^2 = \frac{c^2}{K^2}(\mathbf{B}\times\mathbf{K})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{K}) = c^2\mathbf{B}^2 - c^2(\mathbf{B}\cdot\mathbf{K})^2 . \tag{3}$$

Từ (a) ta thấy rằng nếu $\mathbf{E}^2 = c^2\mathbf{B}^2$ là đúng trong một hệ quy chiếu thì nó cũng đúng trong tất cả các hệ quy chiếu. Vì hệ thức này được cho đối với một hệ quy chiếu quán tính, nên phương trình (3) có nghĩa rằng hệ thức $\mathbf{K}\cdot\mathbf{B} = 0$ là được thỏa mãn trong tất cả hệ quy chiếu.

(c) Trong hệ quy chiếu Σ ta có

$$E_x = f(ct - z), \quad E_y = E_z = 0 ,$$

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{1}{c}f(ct - z), \quad B_z = 0 .$$

Giả thiết một hệ Σ' chuyển động dọc theo trục z với tốc độ v đối với hệ Σ. Khi đó phép biến đổi Lorentz cho

$$E'_z = E_z = 0, \quad E'_y = \gamma(E_y + vB_x) = 0 ,$$
$$E'_x = \gamma(E_x - vB_y) = \gamma(1-\beta)f(ct - z) ,$$

$$B'_z = B_z = 0, \quad B'_x = \gamma\left(B_x + \frac{\beta}{c}E_y\right) = 0 ,$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y - \frac{\beta}{c}E_x\right) = \frac{\gamma}{c}(1-\beta)f(ct - z) ,$$

trong đó

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

Mật độ năng lượng trong các hệ Σ và Σ' được xác định bằng

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 f^2(ct - z) ,$$
$$w' = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E'^2 + \frac{B'^2}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0\gamma^2(1-\beta)^2 f^2(ct - z) .$$

Biến đổi Lorentz đảo $z = \gamma(z' + \beta ct')$, $ct = \gamma(ct' + \beta z')$ cho

$$ct - z = \gamma(1-\beta)(ct' - z') . \tag{4}$$

Vì vậy

$$w' = \varepsilon_0 \gamma^2 (1-\beta)^2 f^2[\gamma(1-\beta)(ct'-z')] .$$

Mật độ động lượng (xung lượng) là

$$g = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{c^2} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{c^2\mu_0} = \varepsilon_0 \mathbf{E}\times\mathbf{B} = \varepsilon_0 E_x B_y \mathbf{e}_z .$$

Vì vậy mật độ xung lượng trong Σ và Σ' có các thành phần

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = \frac{\varepsilon_0}{c} f^2(ct-z) ,$$

$$g'_x = g'_y = 0, \quad g'_z = \frac{\varepsilon_0}{c}\gamma^2(1-\beta)^2 f^2[\gamma(1-\beta)(ct'-z')] .$$

Năng lượng toàn phần và mômen toàn phần trong Σ là

$$W = \int_V w dV = \varepsilon_0 \int_V f^2(ct-z)dV ,$$

$$G_x = G_y = 0, \quad G_z = \frac{\varepsilon_0}{c}\int_V f^2(ct-z)dV = \frac{W}{c}$$

và trong Σ' là

$$W' = \int_{V'} w' dV' = \varepsilon_0 \gamma^2 (1-\beta)^2 \int_{V'} f^2\left[\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)(ct'-z')\right]dV' ,$$

$$G'_x = G'_y = 0 ,$$
$$G'_z = \frac{\varepsilon_0}{c}\gamma^2(1-\beta)^2 \int_{V'} f^2[\gamma(1-\beta)(ct'-z')]dV' = \frac{W'}{c}$$

Vì sóng lan truyền trong phạm vi hữu hạn, V và V' phải chứa một số hữu hạn các sóng như nhau theo hướng lan truyền, nghĩa là hướng z. Vì phương trình (4) yêu cầu

$$dV = \gamma(1-\beta)dV' ,$$

nên

$$W' = \gamma(1-\beta)W .$$

Tương tự

$$G'_z = \frac{W'}{c} = \gamma(1-\beta)G_z .$$

Do đó các phương trình biến đổi đối với năng - xung lượng toàn phần là

$$G'_x = G_x, \quad G'_y = G_y, \quad G'_z = \gamma\left(G_z - \beta\frac{W}{c}\right), \quad \frac{W'}{c} = \gamma\left(\frac{W}{c} - \beta G_z\right).$$

Nghĩa là, $(\mathbf{G}, \frac{W}{c})$ biến đổi giống như một vectơ bốn chiều.

5010

Một người quan sát cố định A nhìn thấy một dây thẳng, dẫn điện lý tưởng và dài vô hạn. Dây dẫn mang dòng không đổi i và mật độ điện tích bằng không. Dòng này là do một dòng êlectron có mật độ đồng nhất chuyển động với tốc độ cao (tương đối tính) U. Một người quan sát B chuyển động song song với dây đó với vận tốc cao (tương đối tính) v. Người quan sát B nhìn thấy

(a) Trường điện từ như thế nào?

(b) Mật độ điện tích trong dây đã gây ra trường này là bao nhiêu?

(c) Các dòng êlectron và ion chuyển động với vận tốc bao nhiêu?

(d) Bạn giải thích như thế nào đối với sự xuất hiện của một mật độ điện tích được người quan sát B nhìn thấy nhưng A lại không nhìn thấy.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Gọi Σ và Σ' lần lượt là các hệ quy chiếu trong đó A và B là đứng yên, trục chung x là dọc theo trục của dây dẫn, nó là cố định trong hệ Σ, như đã được chỉ ra trên hình 5.6. Trong hệ Σ, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = \frac{i}{\pi r_0^2}\mathbf{e}_x$, nên điện trường và từ trường trong hệ Σ lần lượt là

$$\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2}\mathbf{e}_\varphi, & (r < r_0) \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi, & (r > r_0) \end{cases}$$

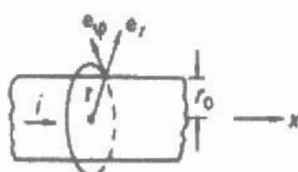
trong đó $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_r$, và $\mathbf{e}_\varphi$ tạo ra một hệ toạ độ vuông góc. Phép biến đổi Lorentz đối với trường điện từ trong Σ' là

$$E'_\parallel = E_\parallel = 0, \quad B'_\parallel = B_\parallel = 0,$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp) = \gamma v B \mathbf{e}_r = \begin{cases} -\frac{\mu_0\gamma i v r}{2\pi r_0^2}\,\mathbf{e}_r, & (r < r_0) \\ -\frac{\mu_0\gamma i v}{2\pi r}\,\mathbf{e}_r, & (r > r_0) \end{cases}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp}{c^2}\right) = \gamma B \mathbf{e}_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 i\gamma r}{2\pi r_0^2}\,\mathbf{e}_\varphi, & (r < r_0) \\ \frac{\mu_0 i\gamma}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\varphi, & (r > r_0) \end{cases}$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, và các độ dài r và r_0 là không thay đổi bởi phép biến đổi này.



Hình 5.6

(b) Gọi mật độ điện tích của dây trong hệ Σ' là ρ', khi đó điện trường sinh ra bởi ρ' đối với $r < r_0$ được xác định bằng định luật Gauss

$$2\pi r E'_r = \rho' \pi r^2/\varepsilon_0$$

tức là

$$\mathbf{E}' = \frac{\rho' r}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_r\,. \quad (r < r_0)$$

So sánh nó với biểu thức đối với $\mathbf{E}'$ ở trên, ta được

$$\rho' = -\frac{vi\gamma}{\pi r_0^2 c^2}\,,$$

ở đây ta đã dùng hệ thức $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

(c) Trong hệ Σ vận tốc của dòng êlectron là $\mathbf{v}_e = -U\mathbf{e}_x$, trong khi đó các ion là đứng yên, nghĩa là $v_i = 0$. Sử dụng phép biến đổi Lorentz về tốc độ ta có trong Σ'

$$\mathbf{v}'_e = -\frac{v + U}{1 + \frac{vU}{c^2}}\,\mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{v}'_i = -v\mathbf{e}_x\,. \tag{6}$$

(d) Mật độ điện tích trong hệ Σ. là bằng không. Nghĩa là, các điện tích dương của các ion dương bị trung hòa bởi các điện tích âm của các êlectron.

Vì vậy $\rho_e + \rho_i = 0$, trong đó ρ_e và ρ_i là mật độ điện tích của các êlectron và ion. Vì

$$\rho_e = \frac{j}{-U} = -\frac{i}{\pi r_0^2 U}$$

ta có

$$\rho_i = \frac{i}{\pi r_0^2 U}\,.$$

Nhưng các ion dương là đứng yên trong hệ Σ, nên nó không tạo ra dòng điện. Do đó

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j} = \frac{i}{\pi r_0^2}\mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{j}_i = 0\,.$$

Vì $(\frac{\mathbf{j}}{c}, \rho)$ tạo ra một vectơ bốn chiều, nên mật độ điện tích của êlectron và ion trong hệ Σ' lần lượt là

$$\rho'_e = \gamma\left(\rho_e - \frac{v}{c^2}j_e\right) = -\frac{i\gamma}{\pi r_0^2 U} - \frac{vi\gamma}{\pi r_0^2 c^2}\,,$$

$$\rho'_i = \gamma\rho_i = \frac{i\gamma}{\pi r_0^2 U}\,.$$

Rõ ràng, $\rho'_e + \rho'_i \neq 0$, nên tổng của ρ'_e và ρ'_i chính là mật độ điện tích ρ' được phát hiện bởi B.

5011

(a) Hãy tìm lực đẩy tác dụng lên một êlectron ở khoảng cách $r < a$ tính từ trục của một cột các êlectron hình trụ có mật độ điện tích đồng nhất ρ_0 và bán kính a.

(b) Một người quan sát ở trong phòng thí nghiệm nhìn thấy một chùm êlectron có tiết diện hình tròn và mật độ ρ chuyển động với vận tốc v. Xác định lực tác động lên một êlectron của chùm đó mà anh ta nhìn thấy ở khoảng cách $r < a$ tính từ trục?

(c) Nếu v gần bằng tốc độ của ánh sáng, thì lực ở phần (b) là gì khi nó được nhìn thấy bởi một người quan sát đang chuyển động cùng với chùm tia? Hãy so sánh lực này với kết quả ở phần (b) và bình luận.

(d) Nếu $n = 2 \times 10^{10}$ cm^{-3} và $v = 0,99c$ (c = tốc độ ánh sáng), tính gradient của từ trường ngang để có thể giữ cho chùm tia này không bị lan rộng theo một chiều nào đó của nó?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Hãy sử dụng hệ tọa độ trụ với trục z dọc theo trục của cột các êlectron hình trụ. Từ định lý thông lượng Gauss và sự đối xứng ta nhận được điện trường ở khoảng cách $r < a$ tính từ trục ra là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_r\,. \quad (r < a)$$

Vì vậy lực tác động lên một êlectron tại điểm đó là

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = -\frac{e\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_r\,.$$

Chú ý rằng đó là lực đẩy vì ρ_0 bản thân nó là âm.

(b) Gọi hệ trong đó cột các êlectron là đứng yên và hệ phòng thí nghiệm lần lượt là Σ' và Σ trong đó Σ' chuyển động dọc theo trục z với vận tốc v so với Σ. Bằng phép biến đổi vectơ bốn chiều dòng điện tích ta tìm được $\rho = \gamma\rho_0$, trong đó $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. Trong Σ' điện trường và từ trường là $\mathbf{E}' = \frac{\rho_0 r'}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_r$, $\mathbf{B}' = 0$. Trong hệ Σ, ta có

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v}\times\mathbf{B}'_\perp) = \gamma\mathbf{E}'\,, \quad \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E}'_\parallel = 0\,,$$

$$\mathbf{B}_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}'_\perp\right) = \gamma\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}'\,, \quad \mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B}'_\parallel = 0\,.$$

Vì vậy lực tác dụng lên một êlectron của chùm tại $r < a$ là

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -e\gamma\mathbf{E}' - e\mathbf{v}\times\left(\gamma\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}'\right)$$
$$= -e\gamma\mathbf{E}' + e\gamma\frac{v^2}{c^2}\mathbf{E}'\,,$$

vì $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ vuông góc với $\mathbf{E}'$.

Vì không có sự co Lorentz ngang, nên $r = r'$. Vì vậy

$$\mathbf{F} = -\frac{e\mathbf{E}'}{\gamma} = -\frac{e\rho r}{2\varepsilon_0\gamma^2}\,\mathbf{e}_r\,.$$

(c) Trong Σ' lực tác dụng lên một êlectron là

$$\mathbf{F}' = -e\mathbf{E}' = -\frac{e\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{e}_r = -\frac{e\rho r}{2\varepsilon_0\gamma}\,\mathbf{e}_r\,.$$

Vì $\gamma > 1$, nên $F' > F$. Thực ra, trong hệ cột êlectron đứng yên Σ' chỉ có điện trường tác dụng một lực lên êlectron, còn trong hệ phòng thí nghiệm Σ, mặc

dù lực điện là lớn hơn, cũng còn có một lực từ tác dụng ngược chiều với lực điện. Kết quả là trong Σ lực tổng hợp tác dụng lên êlectron là nhỏ hơn.

(d) Trong Σ lực tác dụng lên êlectron là

$$\mathbf{F} = -\frac{e\rho r}{2\varepsilon_0\gamma^2}\,\mathbf{e}_r\,.$$

Từ trường $\mathbf{B}_0$ cần thiết để giữ cho nó đứng yên là

$$-e\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{F} = 0\,,$$

nghĩa là

$$e\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0 + \frac{e\rho r}{2\varepsilon_0\gamma^2}\,\mathbf{e}_r = 0\,.$$

Vì $v = v\mathbf{e}_z$, phương trình trên đòi hỏi

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0\gamma^2 v}\,\mathbf{e}_\theta\,.$$

Vì vậy, gradient của từ trường là

$$\frac{dB_0}{dr} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0\gamma^2 v} = -\frac{ne}{2\varepsilon_0\gamma^2 v}\,.$$

Với $n = 2\times10^{10}\times10^6$ m^{-3}, $v = 0,99c$, $\varepsilon_0 = 8,84\times10^{-12}$ C/Vm, ta được

$$\left|\frac{dB_0}{dr}\right| = \left|-\frac{2\times10^{16}\times1,6\times10^{-19}}{2\times8,84\times10^{-12}\times\frac{1}{1-0,99^2}\times0,99\times3\times10^8}\right|$$
$$= 0,0121 \text{ T/m} = 1,21 \text{ Gs/cm}\,.$$

5012

Điện tích được phân bố một cách đồng đều trên một đơn vị độ dài trong một chùm ion dài vô tận và có tiết diện hình tròn không đổi là q. Hãy tính lực tác dụng lên một ion của chùm đó tại vị trí có bán kính r, với giả thiết rằng bán kính R của chùm là lớn hơn r và rằng tất cả các ion đều có cùng vận tốc v.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Hãy sử dụng hệ tọa độ trụ với trục z dọc theo trục của chùm ion sao cho dòng ion chạy theo hướng $+z$. Gọi Σ' và Σ lần lượt là hệ đứng yên của các ion

và hệ phòng thí nghiệm, hệ đầu chuyển động theo hướng $+z$ với vận tốc v đối với hệ sau. Trong Σ điện tích trên một đơn vị dài là q. Trong Σ' nó được xác định bởi $q = \gamma(q' + \frac{\beta j'}{c}) = \gamma q'$, hay $q' = q/\gamma$, trong đó $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$. Trong Σ' trường điện từ được xác định bằng định luật Gauss $2\pi E'_r = \frac{r^2}{R^2}\frac{q'}{\varepsilon_0}$, tức là

$$\mathbf{E}' = \frac{rq'}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_r . \quad (r < R)$$

Vì các ion là đứng yên, nên

$$\mathbf{B}' = 0 .$$

Chuyển sang hệ Σ chúng ta có $\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v}\times\mathbf{B}'_\perp) = \gamma\mathbf{E}'_\perp$, $E_\parallel = E'_\parallel = 0$, hay

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' = \frac{r\gamma q'}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_r = \frac{rq}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_r ,$$

và $\mathbf{B}_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_\perp}{c^2}\right) = \gamma\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_\perp}{c^2}$, $\mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B}'_\parallel = 0$, hay

$$\mathbf{B} = \gamma\frac{v}{c^2}\cdot\frac{rq'}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_\theta = \frac{v}{c}\cdot\frac{rq}{2\pi\varepsilon_0 cR^2}\mathbf{e}_\theta .$$

Chú ý rằng, vì r là ngang (tức vuông góc) đối với $\mathbf{v}$ nên $r' = r$. Vì vậy lực tổng hợp tác dụng lên một ion có điện tích Q ở khoảng cách $r < R$ tính từ trục trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\\ &= \left(Q\cdot\frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 R^2} - Q\frac{v^2}{c^2}\frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\mathbf{e}_r\\ &= \frac{Qqr}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_r = \frac{Qqr}{2\pi\varepsilon_0 R^2\gamma^2}\mathbf{e}_r .\end{aligned}$$

Nếu $v \ll c$, thì $\mathbf{F} = \frac{Qqr}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_r$, đó chính là kết quả sẽ nhận được nếu cả điện tích lẫn chùm ion là đứng yên.

5013

Cho một chùm các hạt tích điện đồng nhất với điện tích trên một đơn vị độ dài là q/l. Chùm các hạt tích điện này chuyển động với vận tốc v, và được phân bố đồng nhất trong hình trụ tròn bán kính R. Hỏi

(a) Điện trường $\mathbf{E}$?

(b) Từ trường **B**?

(c) Mật độ năng lượng?

(d) Mật độ xung lượng của trường trong toàn bộ không gian?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a), (b) Theo Bài toán **5011** và **5012**, ta có

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 R^2 l}\,\mathbf{e}_r\,, & (r < R) \\ \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,\mathbf{e}_r\,. & (r > R) \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{vqr}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R^2 l}\,\mathbf{e}_\theta\,, & (r < R) \\ \frac{vq}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r l}\,\mathbf{e}_\theta\,. & (r > R) \end{cases}$$

(c) Mật độ năng lượng là

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \\ &= \begin{cases} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{q^2 r^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 R^4 l^2}\,, & (r < R) \\ \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 r^2 l^2}\,. & (r > R) \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Mật độ xung lượng là

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \begin{cases} \frac{vq^2 r^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 R^4 l^2}\,\mathbf{e}_z\,, & (r < R) \\ \frac{vq^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 r^2 l^2}\,\mathbf{e}_z\,. & (r > R) \end{cases} \end{aligned}$$

5014

Hãy tính lực xuyên tâm toàn phần tác dụng lên một êlectron biệt ở trong một chùm hình trụ dài vô hạn gồm các êlectron tương đối tính với mật độ không đổi n chuyển động với vận tốc **v** không đổi. Hãy xét cả lực điện lẫn lực từ.

(Wisconsin)

Lời giải:

Mật độ điện tích của chùm êlectron là $\rho = -en$. Như đã chỉ ra trong Bài toán **5011**, lực xuyên tâm toàn phần tác dụng lên một êlectron riêng biệt là

$$\mathbf{F} = -\frac{e\rho r}{2\varepsilon_0\gamma^2}\mathbf{e}_r = \frac{e^2nr}{2\pi\varepsilon_0\gamma^2}\mathbf{e}_r ,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} .$$

5015

Một quả cầu dẫn điện lý tưởng có bán kính R chuyển động với vận tốc không đổi $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ ($v \ll c$) qua từ trường đều $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$. Hãy tính mật độ điện tích bề mặt được sinh ra do cảm ứng trên mặt quả cầu đến bậc thấp nhất của tỉ số v/c.

(*MIT*)

Lời giải:

Gọi Σ' và Σ lần lượt là hệ quy chiếu trong đó quả cầu dẫn điện đứng yên và hệ phòng thí nghiệm. Trong hệ Σ ta có $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$, $\mathbf{E} = 0$. Biến đổi sang hệ Σ' ta có

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0 , \quad E'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp}) = \gamma vB\mathbf{e}_z ,$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0 , \quad B'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}_{\perp}}{c^2}\right) = \gamma B\mathbf{e}_y .$$

Do đó

$$\mathbf{E}' = \gamma vB\mathbf{e}_z , \quad \mathbf{B}' = \gamma B\mathbf{e}_y .$$

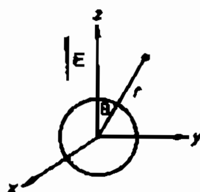
Trong phép gần đúng bậc thấp nhất, $\gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1$, ta có

$$\mathbf{E}' \approx vB\mathbf{e}_z , \quad \mathbf{B}' = B\mathbf{e}_y .$$

Trong hệ Σ' điện trường $\mathbf{E}'$ bên ngoài quả cầu là đều nên điện thế bên ngoài quả cầu là (xem Bài toán **1065**)

$$\varphi' = -E'r\cos\theta + \frac{E'R^3}{r^2}\cos\theta ,$$

với θ như được chỉ ra trên hình 5.7. Mật độ điện tích bề mặt trên vật dẫn được



Hình 5.7

xác định bởi điều kiện biên đối với **D**:

$$\sigma' = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 3\varepsilon_0 vB \cos\theta .$$

Khi biến đổi trở về hệ Σ, vì vận tốc tương đối của Σ' là dọc theo trục x nên góc θ giữ nguyên không thay đổi. Vì vậy mật độ điện tích mặt được sinh ra trên quả cầu này tính đến bậc thấp nhất theo v/c là

$$\sigma = \gamma\sigma' \approx \sigma' = 3\varepsilon_0 vB \cos\theta .$$

5016

Cho một hạt có điện tích q và khối lượng nghỉ m được thả vào một vùng không gian có điện trường **E** theo hướng y và từ trường **B** theo hướng z với vận tốc ban đầu bằng không.

(a) Hãy mô tả các điều kiện cần thiết để tồn tại một hệ Lorentz trong đó (1) $\mathbf{E} = 0$ và (2) $\mathbf{B} = 0$.

(b) Hãy mô tả chuyển động của hạt xảy ra trong hệ toạ độ ban đầu nếu thoả mãn điều kiện (1) ở câu (a).

(c) Hãy tính xung lượng của hạt như một hàm của thời gian trong hệ với $\mathbf{B} = 0$ đối với trường hợp ở câu (a).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi Σ là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và Σ' là hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc tương đối v dọc theo hướng x. Trong Σ ta có

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y , \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z .$$

Phép biến đổi Lorentz cho trường điện từ trong Σ' là

$$E'_x = E_x = 0, \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = \gamma(E - vB), \quad E'_z = \gamma(E_x + vB_y) = 0,$$

$$B'_x = B_x = 0, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = 0,$$
$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = \gamma\left(B - \frac{v}{c^2}E\right).$$

(1) Để $E' = 0$ trong hệ Σ' ta đòi hỏi phải thỏa mãn

$$E - vB = 0,$$

hay $v = \frac{E}{B}$. Thế nhưng, vì $v \leq c$, nên để tồn tại hệ Σ' ta cần phải thỏa mãn $E \leq cB$.
(2) Để $\mathbf{B}' = 0$ trong Σ', ta cần phải thỏa mãn $B - \frac{v}{c^2}E = 0$, hay $v = \frac{c^2B}{E}$. Vì vậy để tồn tại hệ Σ' ta cần phải thỏa mãn

$$cB \leq E.$$

(b) Nếu $\mathbf{E}' = 0$, chuyển động của điện tích q trong Σ' được mô tả bằng phương trình

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{m\boldsymbol{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}\right) = q\boldsymbol{u}' \times \mathbf{B}', \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}\right) = q(\boldsymbol{u}' \times \mathbf{B}') \cdot \mathbf{u}' = 0, \tag{2}$$

trong đó $\boldsymbol{u}'$ là vận tốc của hạt trong Σ'. Phương trình (2) có nghĩa là

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \text{hằng số}.$$

Do đó $u' =$ hằng số. Điều đó có nghĩa độ lớn của vận tốc hạt không thay đổi, trong khi hướng của nó thay đổi. Vì vận tốc ban đầu của hạt trong Σ là bằng không, dùng phép biến đổi vận tốc ta xác định được vận tốc của hạt trong Σ' tại thời điểm ban đầu $t' = 0$ là

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = -v, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} = 0, \quad u'_z = 0$$

hay

$$\boldsymbol{u}'_0 = -v\mathbf{e}_x = -\frac{E}{B}\mathbf{e}_x .$$

Vì vậy độ lớn vận tốc của hạt sẽ luôn luôn là $u' = \frac{E}{B}$, và ta có

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} = \frac{\sqrt{B^2c^2 - E^2}}{Bc} = \text{ hằng số} .$$

Khi đó phương trình (1) rút gọn thành

$$\dot{\boldsymbol{u}}' = \frac{q}{m}\sqrt{1 - u'^2/c^2}\,\boldsymbol{u}' \times \mathbf{B}' . \quad (3)$$

Từ các phương trình biến đổi đối với $\mathbf{B}$, ta có $\mathbf{B}' = \frac{1}{c}\sqrt{B^2c^2 - E^2}\,\mathbf{e}_z$. Do đó phương trình (3) cho

$$\dot{u}'_x = \omega u'_y , \quad (4)$$
$$\dot{u}'_y = -\omega u'_x , \quad (5)$$
$$\dot{u}'_z = 0 , \quad (6)$$

trong đó

$$\omega = \frac{qB'\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{m} = \frac{q(c^2B^2 - E^2)}{c^2mB} .$$

Phương trình (6) cho thấy rằng u'_z = hằng số. Vì $u'_z = 0$ tại $t' = 0$, nên $u'_z = 0$ đối với mọi thời điểm.

(4) + (5)$\times i$ cho

$$\dot{u}'_x + i\dot{u}'_y = -i\omega(u'_x + iu'_y) ,$$

hay

$$\dot{\xi} = -i\omega\xi .$$

trong đó

$$\xi = u'_x + iu'_y .$$

Nghiệm của phương trình trên là

$$\xi = -u'_0 e^{-i\omega t'} ,$$

hay

$$u'_x = u'_0 \cos(\omega t'), \quad u'_y = -u'_0 \sin(\omega t') ,$$

trong đó u'_0 là một hằng số. Vì $u'_0 = \frac{E}{B}$ tại $t' = 0$ ta tìm được

$$u'_x = \frac{E}{B}\cos(\omega t'), \quad u'_y = -\frac{E}{B}\sin(\omega t') .$$

Các phương trình này cho thấy hạt này sẽ phải chuyển động tròn trong mặt phẳng xy với bán kính

$$R = \frac{u'}{\omega} = \frac{E}{B\omega} = \frac{c^2 mE}{q(c^2B^2 - E^2)} .$$

Trong hệ quy chiếu Σ, do có sự co Lorentz theo hướng x, nên quỹ đạo sẽ là một hình elip với trục nhỏ dọc theo trục x.

(c) Hãy xét hệ Σ' trong đó $\mathbf{B}' = 0$. Gọi $\mathbf{p}'$ là xung lượng của hạt. Khi đó phương trình chuyển động là

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = q\mathbf{E}' .$$

Vì $E^2 - c^2B^2$ là bất biến Lorentz, như đã chỉ ra trong Bài toán **5008**, do đó $\mathbf{E}' = \sqrt{E^2 - c^2B^2}\,\mathbf{e}_y$, ở đây cũng sử dụng kết quả của (a). Vì vậy phương trình chuyển động có các phương trình thành phần là

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_z}{dt'} = 0 , \tag{7}$$

$$\frac{dp'_y}{dt'} = q\sqrt{E^2 - c^2B^2} . \tag{8}$$

Phương trình (7) cho thấy cả p'_x và p'_z đều là hằng số, nó không phụ thuộc vào thời gian. Trong hệ Σ, ban đầu hạt đứng yên, nên vận tốc ban đầu của nó là ngược với vận tốc của Σ', tức là, $\boldsymbol{u}'_0 = -\frac{c^2B}{E}\mathbf{e}_x$, như đã chỉ ra trong phần (a) (2). Vì vậy

$$p'_x = \frac{mu'_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{c^2mB}{\sqrt{E^2 - c^2B^2}} ,$$

$$p'_z = 0 .$$

Phương trình (8) cho

$$p_y(t') = q\sqrt{E^2 - c^2B^2}\,t' ,$$

ở đây ta đã sử dụng điều kiện ban đầu là $u'_{0y} = 0$ tại $t' = 0$.

5017

Xét một sóng điện từ phẳng bất kì truyền trong chân không theo chiều x. Giả sử $A(x - ct)$) là thế vectơ của sóng; ở đây không có nguồn nào do vậy có

thể chọn chuẩn thích hợp để thế vô hướng đồng nhất bằng không. Giả thiết rằng sóng này không lan tỏa trong toàn bộ không gian, nói cụ thể $A = 0$ đối với những giá trị $x - ct$ đủ lớn. Sóng này đập vào một hạt có điện tích e mà ban đầu nó đứng yên và làm gia tốc nó tới một vận tốc rất lớn, gần bằng vận tốc ánh sáng.

(a) Hãy chứng minh rằng $A_x = 0$.

(b) Hãy chứng minh rằng $\mathbf{p}_\perp = -e\mathbf{A}$, trong đó $\mathbf{p}_\perp$ là xung lượng của hạt trong mặt phẳng yz. (Chú ý: Vì đây là một bài toán tương đối tính, nên không thể giải nó bằng cơ học phi tương đối).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vì $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x - ct)$, nên

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial(x - ct)}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -c\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial(x - ct)}.$$

Với điều kiện chuẩn $\varphi = 0$, ta có

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vì các sóng điện từ phẳng là sóng ngang, nên $E_x = 0$. Do đó

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{c\partial A_x}{\partial(x - ct)} = 0,$$

điều này chứng tỏ rằng $A_x(x - ct) =$ hằng số.

Vì sóng này không lan tỏa trong toàn bộ không gian, nên thế vectơ triệt tiêu đối với các giá trị $x - ct$ đủ lớn. Do đó hằng số trên bằng không, nghĩa là $A_x = 0$ tại mọi điểm trong không gian.

(b) Giả sử $\mathbf{r}$ là độ dịch chuyển của hạt tích điện tại thời điểm t và viết thế vectơ là $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Ta có

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}. \tag{1}$$

Phương trình chuyển động của hạt có điện tích e và xung lượng $\mathbf{p}$ trong điện từ trường là

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{2}$$

nếu coi r và v là những biến số độc lập, ta có

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (3)$$

Phương trình (1) - (3) cho

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - e\frac{d\mathbf{A}}{dt}.$$

Xét thành phần ngang của xung lượng của hạt đó, $\mathbf{p}_\perp = p_y\mathbf{e}_y + p_z\mathbf{e}_z$.

Thế vectơ $\mathbf{A}(x - ct)$ của sóng điện từ phẳng không phụ thuộc vào các tọa độ y và z, không có thành phần dọc (xem (a)). Vì r và v cũng được xem như các biến số độc lập, ta có

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = v_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0,$$

và tương tự $\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = 0$. Do đó

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = -e\frac{d\mathbf{A}_\perp}{dt}.$$

Lấy tích phân ta được

$$\mathbf{p}_\perp = -e\mathbf{A}_\perp + \mathbf{C}.$$

Vì vận tốc lúc đầu của hạt là bằng không, nên hằng số C là bằng không. Hơn nữa với $A_x = 0$, $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A}$. Do đó ta có thể viết biểu thức trên như

$$\mathbf{p}_\perp = -v\mathbf{A}.$$

2. ĐIỆN TỪ TRƯỜNG CỦA MỘT HẠT TÍCH ĐIỆN (5018–5025)

5018

Hãy chứng minh rằng trường điện từ của một hạt mang điện q chuyển động với vận tốc v không đổi được cho bởi

$$E_x = \frac{q}{\chi}\gamma(x - vt), \qquad B_x = 0,$$

$$E_y = \frac{q}{\chi}\gamma y, \qquad B_y = -\frac{q}{\chi}\beta\gamma z,$$

$$E_z = \frac{q}{\chi}\gamma z, \qquad B_z = \frac{q}{\chi}\beta\gamma y,$$

trong đó

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\chi = \{\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}.$$

và ta đã chọn trục x dọc theo **v** (lưu ý rằng ta đã sử dụng hệ đơn vị sao cho hằng số tỉ lệ trong định luật Coulomb là $K = 1$).

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

Gọi Σ là hệ quy chiếu của người quan sát và Σ' là hệ quy chiếu trong đó hạt đứng yên. Trong hệ Σ' ta có

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}') = \frac{q\mathbf{x}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}'(\mathbf{x}') = 0,$$

trong đó

$$r' = |\mathbf{x}'|.$$

Phép biến đổi Lorentz đối với không - thời gian giữa các hệ Σ và Σ' được cho bởi

$$x' = \gamma(x - vt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$

nên

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2.$$

Phép biến đổi Lorentz ngược đối với trường điện từ cho

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q}{\chi}\gamma(x - vt),$$
$$E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z) = \frac{qy}{\chi}\gamma,$$
$$E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y) = \frac{qz}{\chi}\gamma.$$

$$B_x = B'_x = 0,$$
$$B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z) = -\frac{q}{\chi}\beta\gamma z,$$
$$B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y) = \frac{q}{\chi}\beta\gamma y.$$

5019

(a) Xét hai hạt positron trong một chùm tia tại SLAC. Chùm tia này có năng lượng vào khoảng 50 GeV ($\gamma \approx 10^5$). Trong hệ quy chiếu ở đó chùm đứng yên hai hạt được cách nhau một khoảng là d, và positron e_2^+ chuyển động ngay trước e_1^+, như minh hoạ trên hình 5.8. Hãy viết các biểu thức mô tả tác dụng của e_2^+ lên e_1^+. Đặc biệt, hãy viết biểu thức của các vectơ sau: **E**, **B**, lực Lorentz **F**, và gia tốc $\boldsymbol{a}$. Hãy thực hiện điều đó với hai hệ quy chiếu

1. Hệ nghỉ 2. Hệ phòng thí nghiệm

Những kết quả này sẽ khác nhau bởi các thừa số tương đối tính khác nhau. Hãy cho những giải thích trực giác về các thừa số này.

(b) Vấn đề cũng giống như trong phần (a) nhưng lần này hai pozitron chuyển động song hành như trên hình 5.9.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi các hệ Σ' và Σ lần lượt là hệ trong đó chùm đứng yên và hệ phòng thí nghiệm. Trong Σ' những tác động của e_2^+ lên e_1^+ là

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{d^2}\mathbf{e}_z\,,$$

$$\mathbf{B}' = 0\,,$$

$$\mathbf{F}' = e\mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2}\mathbf{e}_z\,,$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathbf{F}'}{m} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{e^2}{d^2}\mathbf{e}_z\,.$$

Do đó trong Σ', e_1^+ là hạt phi tương đối, nên dưới tác động của trường tĩnh điện $\mathbf{E}'$ được tạo ra bởi e_2^+ nó sẽ chuyển động thẳng nhanh dần.

Phép biến đổi Lorentz đối với trường điện từ $E_\parallel = E'_\parallel$, $B_\parallel = B'_\parallel$, cho

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{d^2}\mathbf{e}_z\,, \quad \mathbf{B} = 0\,.$$

Do đó lực tác dụng lên e_1^+ là

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2}\mathbf{e}_z = \mathbf{F}'\,.$$

Với $\gamma = 10^5$, e_1^+ là một hạt tương đối tính trong hệ Σ và nó phải thỏa mãn các phương trình chuyển động của thuyết tương đối

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}, \quad \text{hay} \quad mc\frac{d}{dt}(\gamma\beta) = F\,.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \quad \text{hay} \quad mc\frac{d\gamma}{dt} = F\beta$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, vì $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$, $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$. Do đó ta có

$$a = c\frac{d\beta}{dt} = \frac{c}{\gamma}\left[\frac{d}{dt}(\gamma\beta) - \beta\frac{d\gamma}{dt}\right] = \frac{1}{m\gamma}(F - F\beta^2) = \frac{F}{m\gamma^3},$$

hay

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m\gamma^3} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\gamma^3 md^2}\mathbf{e}_z = \frac{\boldsymbol{a}'}{\gamma^3}.$$

Từ đây suy ra rằng, khi chuyển động của hai positron như được chỉ ra trong hình 5.8, thì trường điện từ và lực Lorent là như nhau trong hai hệ Σ và Σ'. Tuy nhiên, do hiệu ứng tương đối nên gia tốc của e_1^+ trong hệ phòng thí nghiệm chỉ bằng $\frac{1}{\gamma^3}$ lần so với trong hệ nghỉ. Vì $\frac{1}{\gamma^3} \approx 10^{-15}$, nên a là rất nhỏ. Nói cách khác, ảnh hưởng của lực gây ra bởi một lân cận lên một điện tích chuyển động trên cùng một đường thẳng với vận tốc cao sẽ là nhỏ. Toàn bộ chùm hạt cùng di chuyển trong trạng thái với vận tốc cao và năng lượng cao.



Hình 5.8

(b) Trong trường hợp vẽ trên hình 5.9, trong hệ Σ' ta có các vectơ khác nhau tại e_1^+

$$\mathbf{E}' = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B}' = 0,$$

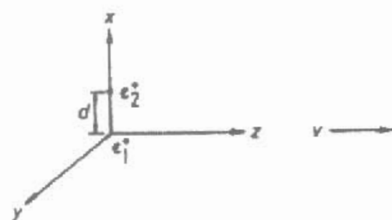
$$\mathbf{F}' = e\mathbf{E}' = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 md^2}\mathbf{e}_z.$$

Trong hệ phòng thí nghiệm Σ, vì

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v}\times\mathbf{B}'_\perp),$$

$$\mathbf{B}_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_\perp}{c^2}\right),$$



Hình 5.9

nên ta có

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' = -\frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\,\mathbf{e}_x\,,$$
$$\mathbf{B} = \gamma\,\frac{v}{c^2}\,E'\mathbf{e}_y = -\frac{\gamma v e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2}\,\mathbf{e}_y\,,$$
$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2\gamma}\,\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{F}'}{\gamma}\,.$$

Trong trường hợp này $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0$, do đó $\gamma =$ hằng số và

$$a = \frac{mc}{m\gamma}\,\frac{d}{dt}\,(\gamma\beta) = \frac{F}{m\gamma}\,,$$

hay

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{F}}{m\gamma} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 m\gamma^2}\,\mathbf{e}_x = \frac{\boldsymbol{a}'}{\gamma^2}\,.$$

Những kết quả trên chỉ ra rằng khi hai positron đang chuyển động song hành bên cạnh nhau, thì tất cả các vectơ trong Σ, khi được so sánh với những vectơ tương ứng trong Σ', sẽ có thêm thừa số Lorentz γ mà nó là hằng số chuyển động. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, cả trường điện và từ đều tồn tại, nhưng điện trường được tăng lên bởi thừa số γ so với trong hệ nghỉ. Về những ảnh hưởng của E và B lên e_1^+, chúng có xu hướng triệt tiêu lẫn nhau, điều này làm giảm lực tác dụng và gia tốc của e_1^+ lần lượt bởi các thừa số $\frac{1}{\gamma}$ và $\frac{1}{\gamma^2}$, khi được so sánh với chúng trong hệ nghỉ.

5020

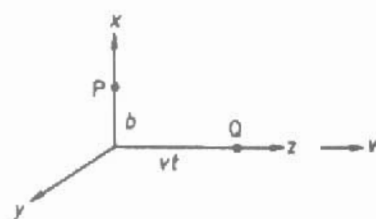
Trong hình 5.10, một điện tích điểm e chuyển động với vận tốc v không đổi theo phương z, nên tại thời điểm t nó ở điểm Q với tọa độ $x = 0$, $y = 0$, $z = vt$. Tại thời điểm t và tại điểm P với tọa độ $x = b$, $y = 0$, $z = 0$ hãy tìm (xem hình 5.10)

(a) thế vô hướng ϕ,

(b) thế vectơ $\mathbf{A}$,

(c) điện trường E_x.

(*Wisconsin*)



Hình 5.10

Lời giải:

(a) Các thế Liénard-Wiechert tại P do điện tích này tạo ra được cho bởi

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 [r - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r}]}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 [r - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r}]}$$

trong đó r là vectơ bán kính từ vị trí trễ của điện tích tới điểm P của trường, tức là

$$\mathbf{r} = b\mathbf{e}_x - v\left(t - \frac{r}{c}\right)\mathbf{e}_z = b\mathbf{e}_x - vt'\mathbf{e}_z ,$$

với

$$t' = t - \frac{r}{c} .$$

Do đó

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = b^2 + v^2\left(t - \frac{r}{c}\right)^2 = b^2 + v^2\left(t^2 - \frac{2rt}{c} + \frac{r^2}{c^2}\right) ,$$

hay

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r^2 + 2\frac{v^2 t}{c} r - b^2 - v^2 t^2 = 0 .$$

Đây là điều kiện trễ, với các nghiệm

$$r = \frac{-\beta vt \pm \sqrt{(1-\beta^2)b^2 + v^2t^2}}{1-\beta^2},$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$.
Trong biểu thức trên ta sẽ chọn dấu + vì $r \geq 0$. Khi $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$,

$$r - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{c} = r + \frac{v^2t'}{c} = r + v\beta\left(t - \frac{r}{c}\right) = (1-\beta^2)r + v\beta t$$
$$= \sqrt{(1-\beta^2)\,b^2 + v^2t^2}\,.$$

Do đó thế vô hướng ϕ là

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(1-\beta^2)\,b^2 + v^2t^2}}\,.$$

(b) Thế vectơ $\mathbf{A}$ là

$$\mathbf{A} = \frac{ev}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{(1-\beta^2)\,b^2 + v^2t^2}}\,\mathbf{e}_z\,.$$

(c) Lấy vi phân các thế Liénard-Wiechert ta nhận được điện trường tại P

$$\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,.$$

Đối với phép vi phân không gian, trước hết b phải được thay bằng x. Do đó ta có

$$(\nabla\phi)_b = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_b \mathbf{e}_x = -\frac{e(1-\beta^2)\,b}{4\pi\varepsilon_0\left[(1-\beta^2)\,b^2 + v^2t^2\right]^{3/2}}\,\mathbf{e}_x\,.$$

Vì $\mathbf{A}$ theo hướng z, nên nó không đóng góp vào E_x. Vì vậy

$$E_x = \frac{e(1-\beta^2)b}{4\pi\varepsilon_0\left[(1-\beta^2)\,b^2 + v^2t^2\right]^{3/2}}\,.$$

5021

Cho một hạt có điện tích e chuyển động phi tương đối, hãy tìm:

(a) Công suất trung bình theo thời gian đã phát xạ từ điện tích đó về phía người quan sát, trong một đơn vị góc khối, $\frac{dP}{d\Omega}$, theo vận tốc $\dot{\beta}c$, và vectơ đơn vị $\mathbf{n}'$ từ điện tích đến người người quan sát.

(b) $dP/d\Omega$, nếu hạt chuyển động theo quy luật $z(t) = a\cos(\omega_0 t)$;

(c) $dP/d\Omega$ đối với chuyển động tròn có bán kính R trong mặt phẳng xy với tần số góc ω_0.

(d) Hãy vẽ phân bố góc của bức xạ trong từng trường hợp.

(e) Hãy nêu một cách định tính, $dP/d\Omega$ sẽ thay đổi thế nào nếu chuyển động đó là tương đối tính.

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Đối với một hạt phi tương đối có điện tích e, trường bức xạ là

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \dot{\beta}c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 cr}\,\mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \dot{\beta})\,,$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\,\mathbf{n}' \times \mathbf{E}\,,$$

trong đó r là khoảng cách từ người quan sát đến điện tích. Khi đó, tại chỗ người quan sát vectơ Poynting là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c}\,E^2\mathbf{n}' = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 cr^2}\,|\mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \dot{\beta})|^2\mathbf{n}'\,.$$

Gọi θ là góc giữa $\mathbf{n}'$ và $\dot{\beta}$, khi đó

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}'}{r^{-2}} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\,|\dot{\beta}|^2\,\sin^2\theta\,.$$

Kết quả này không thay đổi nếu lấy trung bình theo thời gian, trừ khi chuyển động của điện tích là tuần hoàn.

(b) Nếu $z = a\cos(\omega_0 t)$, thì $\dot{\beta}c = \ddot{z} = -a\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$ và vì $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}$, trong đó T là chu kì, ta có

$$\langle(\dot{\beta}c)^2\rangle = \frac{1}{2}\,a^2\omega_0^4\,.$$

Vì vậy

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2\theta .$$

(c) Có thể coi chuyển động tròn của hạt trong mặt phẳng xy như sự chồng chập của hai dao động điều hòa vuông góc với nhau

$$\mathbf{R}(t') = R\cos(\omega_0 t')\,\mathbf{e}_x + R\sin(\omega_0 t')\,\mathbf{e}_y .$$

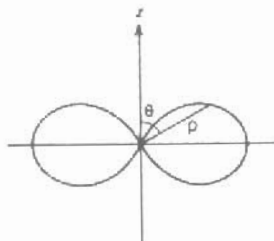
Trong hệ tọa độ cầu hãy coi người quan sát có vectơ bán kính $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$ tính từ tâm của đường tròn, nó cũng là gốc của hệ tọa độ này. Các góc giữa r hay $\mathbf{n}'$ và β đối với hai dao động này được xác định bởi

$$\cos\theta_1 = \sin\theta \cos\varphi ,$$
$$\cos\theta_2 = \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\theta \sin\varphi .$$

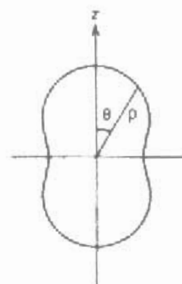
Sử dụng kết quả của (b) ta có

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 R^2 \omega_0^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3}(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)$$
$$= \frac{e^2 R^2 \omega_0^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3}(1 + \cos^2\theta) .$$

(d) Đối với các trường hợp (a) và (b), các đường cong $\rho = \frac{dP}{d\Omega}$ theo θ lần lượt được vẽ phác trên hình 5.11 và 5.12, trong đó z là hướng của β.



Hình 5.11



Hình 5.12

(e) Đối với $\beta \approx 0$, hướng của cường độ cực đại là dọc theo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Khi $\beta \to 1$, hướng của cường độ cực đại có xu thế hướng nhiều hơn về hướng

$\theta = 0$, nghĩa là hướng của $\dot{\beta}$. Trong thực tế bức xạ sẽ được tập trung chủ yếu trong một hình nón với $\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$ chung quanh hướng của $\dot{\beta}$. Nhưng không có bức xạ nào là chạy dọc theo hướng này một cách chính xác.

5022

Bức xạ Cerenkov được phát bởi một hạt tích điện có năng lượng cao chuyển động xuyên qua một môi trường với vận tốc lớn hơn vận tốc truyền sóng điện từ trong môi trường này.

(a) Hãy rút ra mối quan hệ giữa vận tốc $v = \beta c$ của hạt chiết suất n của môi trường, và góc θ mà hidrô tại đó bức xạ Cerenkov được phát ra đối với đường bay của hạt.

(b) Khí hiđrô ở áp suất 1 at và nhiệt độ 20^0C có chiết suất $n = 1 + 1,35 \times 10^{-4}$. Một êlectron (có khối lượng nghỉ là 0,5 MeV/c^2) cần có động năng tối thiểu tính bằng MeV là bao nhiêu để phát ra bức xạ Cerenkov khi nó bay qua môi trường khí hiđrô ở 20^0 và 1 at?

(c) Một thiết bị thu hạt bức xạ Cerenkov được làm bằng cách lắp ráp một ống dài chứa khí hiđrô ở áp suất 1 at và ở nhiệt độ 20^0 với một hệ quang học có khả năng thu ánh sáng phát ra và đo góc phát xạ θ với độ chính xác $\delta\theta = 10^{-3}$ radian. Một chùm các hạt tích điện có xung lượng 100 GeV/c đi qua máy đếm này. Vì ta biết xung lượng, nên việc đo góc Cerenkov thực chất là đo khối lượng nghỉ m_0 của hạt. Đối với các hạt có m_0 gần bằng 1 GeV/c^2, và đến bậc nhất trong các đại lượng nhỏ, thì sai số tỉ đối (tức là $\delta m_0/m_0$) là bao nhiêu trong việc xác định m_0 bằng thiết bị phát hiện hạt bức xạ Cerenkov?

(*CUSPEA*)

Lời giải:

a) Như đã chỉ ra trên hình 5.13, bức xạ được phát ra bởi điện tích tại Q′ ở thời điểm t' sẽ đến P vào thời gian t khi điện tích đã đến điểm Q. Vì bức xạ này truyền với vận tốc c/n và hạt này có tốc độ v với $v > c/n$, nên ta có

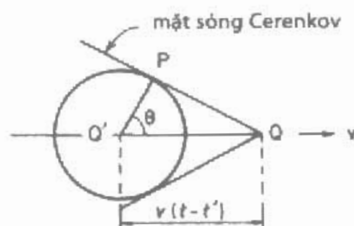
$$Q'P = \frac{c}{n}(t - t'), \quad Q'Q = v(t - t'),$$

hay

$$\frac{Q'P}{Q'Q} = \cos\,\theta = \frac{c}{vn} = \frac{1}{\beta n},$$

trong đó $\beta = \frac{v}{c}$. Tại tất cả các điểm nằm giữa Q′ và Q bức xạ đã phát xạ sẽ đến

được đường QP vào thời gian t. Vì vậy QP tạo thành mặt đầu sóng của tất cả bức xạ đã phát ra trước thời điểm t.



Hình 5.13

(b) Vì $|\cos\theta| < 1$, nên ta đòi hỏi $\beta > \frac{1}{n}$ để phát ra bức xạ Cerenkov. Vì vậy cần thỏa mãn

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\,.$$

Do đó hạt này phải có động năng lớn hơn

$$\begin{aligned} T &= (\gamma - 1)\, m_0 c^2 \\ &= \left[\frac{n}{\sqrt{(n+1)\,(n-1)}} - 1\right] m_0 c^2 \\ &\approx \left(\frac{1}{\sqrt{2 \times 1,35 \times 10^{-4}}} - 1\right) \times 0.5 \\ &\approx 29,93 \text{ MeV}\,. \end{aligned}$$

(c) Đối với hạt tương đối tính có xung lượng $P \gg m_0 c$,

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{\sqrt{P^2c^2 + m_0^2 c^4}}{m_0 c^2} \approx \frac{P}{m_0 c}\,.$$

Với P cố định ta có

$$d\gamma = -\frac{P}{c} \cdot \frac{dm_0}{m_0^2}\,.$$

Vì $\beta = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ đối với $\gamma \gg 1$, nên

$$d\beta = \frac{d\gamma}{\gamma^3}\,.$$

Đối với bức xạ Cerenkov do hạt này phát ra, ta có

$$\cos\ \theta = \frac{1}{\beta n}\,,$$

hay

$$d\beta = n\beta^2 \sin\theta d\theta\,.$$

Kết hợp những phương trình trên, ta có

$$\left|\frac{dm_0}{m_0}\right| = \frac{m_0 c}{P}\,d\gamma \approx \frac{d\gamma}{\gamma} = \gamma^2\beta = n\beta^2\gamma^2\sin\theta d\theta = \beta\gamma^2\ \tan\,\theta\, d\theta\,.$$

Với $\gamma = \frac{Pc}{m_0c^2} = \frac{100}{1} = 100$, $n = 1 + 1,35 \times 10^{-4}$, ta có

$$\beta \approx 1 - \frac{1}{2\times 10^4} = 1 - 5\times 10^{-5}\,,$$

$$\cos\ \theta = \frac{1}{\beta n} = (1 - 5\times 10^{-5})^{-1}\,(1 + 1,35\times 10^{-4})^{-1} \approx 1 - 8,5\times 10^{-5}\,,$$

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \sqrt{(1 - 8,5\times 10^{-5})^{-2} - 1}$$
$$\approx \sqrt{1,7\times 10^{-4}} \approx 1,3\times 10^{-2}\,,$$

và vì vậy

$$\left|\frac{dm_0}{m_0}\right| = (1 - 5\times 10^{-5})\times 10^4 \times 1,3\times 10^{-2}\times 10^{-3} = 0,13\,.$$

5023

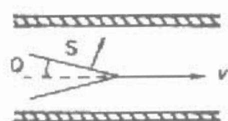
Một ống dẫn sóng được tạo bởi hai mặt phẳng dẫn lý tưởng song song vô hạn. Hai mặt phẳng này đặt nhau một khoảng bằng a. Khe giữa hai mặt phẳng chứa đầy một loại khí có chiết suất là n (được coi là không phụ thuộc vào tần số).

(a) Hãy xét các mode sóng phẳng được dẫn, trong đó các cường độ trường là không phụ thuộc vào biến y (trên hình 5.14, trục y có hướng đi vào phía trong tờ giấy). Đối với một bước sóng đã cho λ hãy tìm tần số ω được phép. Hãy tìm vận tốc pha v_p và vận tốc nhóm v_g.



Hình 5.14

(b) Một sợi dây tích điện đều, dài vô hạn đặt dọc theo chiều y (hình 5.15), chuyển động trong mặt phẳng giữa của khe với vận tốc $v > c/n$. Nó phát ra bức xạ Cerenkov. Tại bất kì điểm cố định nào trong khe được thể hiện như các điện trường và từ trường thay đổi theo thời gian. Độ lớn của điện trường thay đổi thế nào theo thời gian tại một điểm trong mặt phẳng ở giữa khe? Hãy vẽ phác phổ tần số và cho biết tần số chính.



Hình 5.15

(c) Có thể biểu diễn bất kì một nhiễu loạn điện từ nào (không phụ thuộc vào y) như là sự chồng chập của các kiểu dẫn sóng được xét trong phần (a). Kiểu (mode) ứng với tần số chính của phổ Cerenkov đã xét trong phần (b) là gì?

(*Princeton*)

Lời giải:

(a) Lấy mặt phẳng giữa của khe như mặt phẳng xy. Vì cường độ trường không phụ thuộc vào y và sóng được dẫn dọc theo trục x, nên ta có thể viết

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)\, e^{i(k_x x - \omega t)}$$

với $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$. E thỏa mãn phương trình sóng

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\,, \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k'^2 \mathbf{E} = 0\,,$$

trong đó

$$k'^2 = \frac{n^2}{c^2}\omega^2 - k_x^2\,,$$

tuân theo các điều kiện biên

$$E_x = E_y = 0\,, \quad \text{đối với} \quad z = 0,\, a\,.$$

E cũng phải tuân theo điều kiện $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, nghĩa là $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_x E_x$. Điều này dẫn đến điều kiện biên khác như sau

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{với} \quad z = 0,\, a\,.$$

Xét phương trình đối với E_x

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k'^2 E_x = 0\,.$$

Nghiệm của phương trình đó là

$$E_x = E_{x0}\left[\sin\left(k'z\right) + A\ \cos\left(k'z\right)\right] e^{i(k_x x - \omega t)}\,.$$

Các điều kiện biên cho ta

$$A = 0\,, \quad k'a = m\pi\,. \quad (m = 0,\, 1,\, 2,\, 3\, \ldots)$$

Vì vậy

$$E_x = E_{x0}\ \sin\left(\frac{m\pi}{a}\, z\right) e^{i(k_x x - \omega t)}\,.$$

Tương tự

$$E_y = E_{y0}\ \sin\left(\frac{m\pi}{a}\, z\right) e^{i(k_x x - \omega t)}\,,$$

$$E_z = E_{z0}\ \cos\left(\frac{m\pi}{a}\, z\right) e^{i(k_x x - \omega t)}\,.$$

Ta cũng có

$$\frac{n^2\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k'^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2.$$

Vì vậy đối với một bước sóng λ nhất định đã cho các tần số góc được phép là dãy của các giá trị rời rạc

$$\omega_m = \frac{c}{n}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\,.$$

Vận tốc pha là

$$v_p = \frac{\omega_m}{k_x} = \frac{c}{n}\left[1 + \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

và vận tốc nhóm là

$$v_g = \frac{d\omega_m}{dk_x} = \frac{c}{n}\left[1 + \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

(b) Trong chân không điện trường tại một điểm, ở thời gian t được tạo ra bởi một điện tích q chuyển động với vận tốc $\mathbf{v}$ được tính như sau

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha\mathbf{R}}{s^3},$$

trong đó $\mathbf{R}$ là vectơ bán kính từ vị trí của điện tích tại thời gian t đến điểm trường

$$\alpha = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad s = \left[\alpha R^2 + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nếu điện tích đó chuyển động trong một môi trường có hằng số điện môi ε và chiết suất n, thì biểu thức trên sẽ được thay đổi thành

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\alpha\mathbf{R}}{s^3},$$

trong đó

$$\alpha = 1 - \left(\frac{vn}{c}\right)^2; \quad s = \left[\alpha R^2 + \left(\frac{n}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

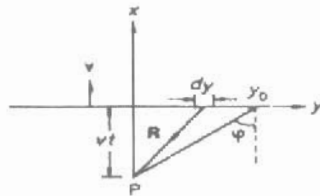
Gọi φ là góc giữa $\mathbf{v}$ và $\mathbf{R}$, khi đó

$$s = \left[1 - \left(\frac{vn}{c}\right)^2 \sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} R.$$

Nếu $v > \frac{c}{n}$, s sẽ trở thành ảo trừ vùng không gian với $\sin\varphi \leq \frac{c}{vn}$. Vì tốc độ hạt là lớn hơn tốc độ truyền của các sóng điện từ trong môi trường, nên điểm trường là phải ở phía sau của hạt tại thời gian t (Bài toán **5022**). Vì vậy trường sẽ chỉ tồn tại bên trong một hình nón phía sau với nửa góc ở đỉnh $\varphi = \arcsin\left(\frac{c}{vn}\right)$ và đỉnh của nó là ở vị trí của hạt tại thời gian t. Trên bề mặt của hình nón này $\mathbf{E} \to \infty$. Bề mặt này là bề mặt của sóng Cerenkov và nó chứa trường bức xạ Cerenkov. Có thể coi sợi dây tích điện dài vô hạn này là một tập hợp của vô số các điện tích điểm, nên vùng của bức xạ Cerenkov sẽ là một hình nêm phía sau với dây tạo thành cạnh mảnh của nó và các mặt nghiêng bên cạnh tạo thành một góc 2φ. Cường độ $\mathbf{E}$ của trường bức xạ tại

bất kì điểm nào trong hình nêm này là sự chồng chập các cường độ trường bức xạ Cerenkov tại điểm đó do tất cả các điện tích điểm gây ra.

Hãy xét một điểm P trong mặt phẳng giữa như đã chỉ ra trong hình 5.16. Rõ ràng P phải ở phía đằng sau của đường có các điện tích được biểu diễn bằng trục y. Hãy cho đường điện tích này đi qua P tại $t = 0$, thì tại thời gian t đường này là ở khoảng cách vt so với P.



Hình 5.16

Vectơ bán kính từ một yếu tố điện tích λdy đến điểm P là

$$\mathbf{R} = -vt\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y\,.$$

Vì $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, nên $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = -v^2 t$. Cường độ của trường tại P được gây ra bởi λdy là

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dy\,(1 - n^2\frac{v^2}{c^2})\,(-vt\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)}{n^2\,[(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2})\,(y^2 + v^2 t^2) + \frac{v^4 n^2 t^2}{c^2}]^{3/2}}\,.$$

Cường độ trường Cerenkov tổng cộng tại P ở thời gian t là tổng vectơ của các cường độ do tất cả các yếu tố trên đường đó đóng góp vào. Do sự đối xứng nên các đóng góp của hai yếu tố điện tích đặt tại y và $-y$ vào E_y sẽ bị triệt tiêu và sự đóng góp tổng cộng là tổng các thành phần x của chúng. Vì vậy điện trường tổng cộng tại P là theo hướng x và nó có độ lớn là

$$E(t) = 2\int_0^{y_0} dE_x\,,$$

trong đó, cận trên của tích phân này được xác định bởi đòi hỏi rằng P phải ở trong hình nón Cerenkov có thành phần điện tích λdy tại y_0. Vì vậy

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2\lambda}{n^2}\left(n^2\frac{v^2}{c^2} - 1\right) vt \int_0^{vt\tan\varphi} \frac{dy}{[v^2 t^2 - (\frac{n^2 v^2}{c^2} - 1) y^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2\lambda(\frac{n^2 v^2}{c^2} - 1)\tan\varphi}{n^2 vt\sqrt{1 - (\frac{n^2 v^2}{c^2} - 1)\tan\varphi}} \propto \frac{1}{t}\,. \end{aligned}$$

Có thể viết biểu thức này như sau

$$E(t) = \frac{A}{t},$$

trong đó A là hằng số.

Bằng phép biến đổi Fourier

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$$

với

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t}\, dt .$$

Vì

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i ,$$

$$E(\omega) = \frac{Ai}{2} ,$$

Nghĩa là $|E(\omega)|$ là hằng số, không phụ thuộc vào tần số. Điều này có nghĩa là bức xạ Cerenkov có một "phổ trắng", nghĩa là mỗi thành phần đơn sắc của nó đều có cường độ như nhau và không có tần số cơ bản.

(c) Như đã chỉ ra trong hình 5.15, giả sử vectơ đơn vị **S** là vuông góc với mặt phẳng trên của hình nêm, tạo thành bề mặt của bức xạ Cerenkov. **S** là dọc theo hướng **k** ($|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} n$) của bức xạ Cerenkov. Khi đó

$$k_x = \frac{\omega}{c} n \sin\varphi = \frac{\omega}{c} n \left(\frac{c}{nv}\right) = \frac{\omega}{v} .$$

Thế nhưng không phải tất cả các tần số trong "phổ trắng" của bức xạ Cerenkov đều có thể truyền trong đường dẫn sóng này, mà chỉ những tần số thỏa mãn hệ thức

$$\omega = \frac{c}{n} \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \frac{c}{n} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} ,$$

hay

$$\omega = \frac{m\pi}{a} \left(\frac{n^2}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)^{-1/2} = \omega_m . \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Có thể coi những tần số ω_m mà đường dẫn sóng cho phép là những mode chính của bức xạ Cerenkov trong đường dẫn sóng đó.

5024

Một hạt có khối lượng m và điện tích q được liên kết với một hạt khối lượng rất lớn có điện tích $-q$ bằng tương tác Coulomb. Tại $t = 0$ quỹ đạo của nó là một đường tròn (gần đúng) có bán kính R. Tại thời gian nào nó sẽ bị xoắn lại thành $R/2$? (Giả thiết rằng R là đủ lớn để bạn có thể dùng lý thuyết bức xạ cổ điển chứ không phải cơ lượng tử).

(*Columbia*)

Lời giải:

Có thể coi hạt rất nặng đó ở trạng thái đứng yên trong thời gian chuyển động. Năng lượng toàn phần của hạt có khối lượng m là

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V ,$$

Trong đó thế năng của hạt do tương tác Coulomb là

$$V = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} ,$$

r là khoảng cách từ hạt đó tới hạt có khối lượng lớn.

Vì hạt nhỏ chuyển động theo một đường tròn bán kính r, ta có

$$m|\dot{\mathbf{v}}| = \frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ,$$

hay

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} ; \quad |\dot{\mathbf{v}}| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2} .$$

Do đó

$$E = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} .$$

Vì hạt chịu gia tốc hướng tâm $\dot{\mathbf{v}}$ nên nó sẽ mất năng lượng do bức xạ

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{q^2|\dot{\mathbf{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} .$$

Mặt khác, dùng biểu thức ở trên của E ta có

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} .$$

Do đó

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{r^2}{c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 = -\frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2r^2}.$$

Vì $r = R$ tại $t = 0$, nên thời gian mà tại đó $r = \frac{R}{2}$ là

$$\tau = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2}{q^4}\int_R^{\frac{R}{2}} r^2dr = \frac{7\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2R^3}{2q^4}.$$

5025

Một nguyên tử hidrô cổ điển có êlectron ở bán kính bằng bán kính Bohr thứ nhất tại thời điểm $t = 0$. Tính thời gian cần thiết để bán kính Bohr giảm xuống đến không do bức xạ. Hãy giả thiết rằng sự mất mát năng lượng trong một vòng là nhỏ so với năng lượng toàn phần còn lại của nguyên tử.

(*Princeton*)

Lời giải:

Vì sự mất mát trong một vòng là nhỏ nên chúng ta có thể giả thiết chuyển động này là phi tương đối. Khi đó trong hệ đơn vị Gauss tốc độ mất mát bức xạ của êlectron là

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}a^2,$$

trong đó a là độ lớn của gia tốc. Trong trường Coulomb của hạt nhân hidrô, năng lượng toàn phần và gia tốc của êlectron lần lượt là

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}, \quad a = \frac{e^2}{mr^2},$$

trong đó chúng ta đã sử dụng biểu thức của gia tốc hướng tâm $a = \frac{v^2}{r}$.
Vì vậy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e^2}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2,$$

hay

$$dt = -\frac{3m^2c^3}{4e^4}r^2dr.$$

Do đó thời gian để quỹ đạo Bohr bị mất đi hoàn toàn là

$$\tau = \int_0^t dt = -\frac{3m^2c^3}{4e^4}\int_{a_0}^0 r^2dr = \frac{m^2c^3a_0^3}{4e^4},$$

trong đó $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ là bán kính Bohr thứ nhất.

3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT HẠT TÍCH ĐIỆN TRONG TRƯỜNG ĐIỆN TỪ (5026–5039)

5026

Một hạt có khối lượng m và điện tích e được gia tốc trong một thời gian bởi một điện trường đều tới một vận tốc không nhất thiết phải nhỏ so với c.

(a) Tính xung lượng của hạt ở cuối thời gian gia tốc.

(b) Tốc độ của hạt ở cuối thời gian đó là bao nhiêu?

(c) Hạt này là không bền và phân rã với thời gian sống τ trong hệ quy chiếu mà nó đứng yên. Một người đứng yên, quan sát sự phân rã của hạt này khi nó đang chuyển động đều với tốc độ trên sẽ đo được thời gian sống của nó là bao nhiêu?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a) Vì

$$\frac{d(m\gamma v)}{dt} = eE, \quad m\gamma v = \int_0^t eEdt = eEt\,,$$

trong đó E là cường độ của điện trường đều,

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{với} \quad \beta = \frac{v}{c}\,.$$

(b) Vì

$$m\gamma\beta c = eEt\,,$$

hay

$$\gamma\beta = (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{eEt}{mc}\,,$$

ta có

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \left(\frac{eEt}{mc}\right)^2 + 1\,,$$

hay

$$\beta^2 = \frac{(eEt)^2}{(eEt)^2 + (mc)^2}\,,$$

suy ra

$$v = \beta c = \frac{eEct}{\sqrt{(eEt)^2 + (mc)^2}}\,.$$

(c) Tính đến sự dãn nở của thời gian, thì thời gian co dãn, thời gian sống của hạt trong hệ quy chiếu của người quan sát là

$$T = \gamma\tau = \tau\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}\,.$$

5027

Biểu thức Lagrangian của một hạt tích điện tương đối tính có khối lượng m, điện tích e và vận tốc **v** chuyển động trong một trường điện từ với thế vectơ **A** là

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,.$$

Trường của một lưỡng cực có mômen từ μ dọc theo trục cực được mô tả bằng thế vectơ $\mathbf{A} = \frac{\mu \sin\theta}{\gamma^2}\mathbf{e}_\phi$ trong đó θ là góc cực và ϕ là góc phương vị.

(a) Hãy biểu thị xung lượng chính tắc p_ϕ liên hợp với ϕ qua các tọa độ và các đạo hàm của chúng.

(b) Hãy chứng minh rằng xung lượng p_ϕ là một hằng số chuyển động.

(c) Nếu thế vectơ **A** đã cho ở trên được thay thế bằng

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(r, \theta, \phi)\,,$$

trong đó χ là một hàm bất kì của tọa độ, thì biểu thức của xung lượng chính tắc p_ϕ được thay đổi thế nào? Biểu thức đã nhận được trong phần (a) có còn là một hằng số chuyển động nữa không? Giải thích.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Trước tiên chúng ta sử dụng tọa độ Đềcác để tìm biểu thức của Hamiltonian.

Đặt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Xung lượng chuẩn tắc là

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m\gamma v_i + \frac{e}{c}A_i\,,$$

hay, dưới dạng vectơ

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}.$$

Khi đó Hamiltonian là

$$H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = \frac{mc^2}{\gamma}(\gamma^2\beta^2 + 1) = m\gamma c^2,$$

vì

$$\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1.$$

(a) Trong hệ tọa độ cầu, vận tốc là

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi.$$

Do đó, biểu thức Lagrangian của lưỡng cực từ trong trường của thế vectơ **A** là

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{c}\frac{\mu\sin^2\theta}{r}\dot{\phi}.$$

Xung lượng liên hợp với ϕ là

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = -mc^2\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\dot{\phi}} + \frac{e}{c}\frac{\mu\sin^2\theta}{r}.$$

Vì

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\dot{\phi}} = \frac{r^2}{\beta c^2}\sin^2\theta\dot{\phi},$$

và vì $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \gamma^3\beta.$$

Do đó

$$p_\phi = m\gamma r^2\sin^2\theta\dot{\phi} + \frac{e}{c}\frac{\mu\sin^2\theta}{r}.$$

(b) Vì Hamiltonian này không phụ thuộc vào ϕ,

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial\phi} = 0.$$

nên p_ϕ là một hằng số chuyển động.

(c) Nếu thế vectơ này được thay thế bằng $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(r, \theta, \phi)$, thì Lagrangian mới là

$$L' = \frac{-mc^2}{\gamma} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \frac{e}{c}\nabla\chi\cdot\mathbf{v}\,.$$

Bây giờ xung lượng chuẩn tắc là

$$\mathbf{p}' = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} + \frac{e}{c}\nabla\chi\,.$$

Nhưng Hamiltonian

$$H' = \mathbf{p}'\cdot\mathbf{v} - L = m\gamma c^2$$

vẫn giống như trước.

Đối với một hàm vô hướng χ bất kì,

$$\nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi\,,$$

cho nên

$$\nabla\chi\cdot\mathbf{v} = \dot{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \dot{\phi}\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\,.$$

Vì vậy bây giờ xung lượng liên hợp với ϕ là

$$p'_\phi = \frac{\partial L'}{\partial\dot{\phi}} = m\gamma r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} + \frac{e}{c}\left(\frac{\mu\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial\chi}{\partial\phi}\right),$$

Nghĩa là, p'_ϕ bị thay đổi do có thêm số hạng $\frac{e}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\phi}$. Vì H' vẫn không phụ thuộc vào ϕ, nên xung lượng p'_ϕ cũng là một hằng số chuyển động. Nhưng, vì

$$p_\phi = p'_\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\phi}$$

và χ là một hàm số vô hướng bất kì, nên phần p_ϕ không phải là một hằng số của chuyển động này.

5028

Một êlectron (khối lượng m, điện tích e) chuyển động trong một mặt phẳng vuông góc với một từ trường đều. Nếu bỏ qua sự mất mát năng lượng do bức xạ thì quỹ đạo của êlectron sẽ là một đường tròn bán kính R nào đấy. Gọi E là năng lượng toàn phần của êlectron, được phép đối với chuyển động tương đối tính cho nên $E \gg mc^2$.

(a) Hãy biểu diễn cảm ứng từ B cần thiết qua các thông số trên. Hãy tính bằng số, trong hệ đơn vị Gauss, cho trường hợp $R = 30m$, $E = 2,5 \times 10^9 eV$. Để giải phần này bạn sẽ phải dùng một số hằng số vũ trụ.

(b) Trên thực tế, êlectron này phát xạ năng lượng điện từ vì nó được gia tốc bởi trường **B**. Nhưng hãy giả thiết rằng sự mất mát năng lượng trong một vòng ΔE là nhỏ so với E. Hãy biểu diễn tỉ số $\Delta E/E$ một cách giải tích qua các thông số đó. Sau đó hãy tính tỉ số này bằng số theo các giá trị cụ thể đã cho ở trên.

(*CUSPEA*)

Lời giải:

(a) Trong từ trường đều B, chuyển động của một êlectron được mô tả trong hệ đơn vị Gauss bằng

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

trong đó **p** là xung lượng của êlectron,

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

với $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$. Vì $\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$, nên lực từ không sinh công và độ lớn của vận tốc không thay đổi, nghĩa là v, và do đó γ, là không thay đổi. Đối với chuyển động tròn

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \frac{v^2}{R}.$$

Khi đó

$$m\gamma\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{e}{c}|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|.$$

Vì **v** là vuông góc với **B**, ta có

$$m\gamma\frac{v^2}{R} = \frac{e}{c}vB$$

hay

$$B = \frac{pc}{eR}.$$

Với $E \gg mc^2$, $pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4} \approx E$ và do đó

$$B \approx \frac{E}{eR} \approx 0,28 \times 10^4 \text{ Gs}.$$

(b) Tốc độ bức xạ của êlectron được gia tốc phi tương đối là

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right),$$

trong đó $\mathbf{v}$ và $\mathbf{p}$ lần lượt là vận tốc và xung lượng của êlectron.

Đối với một êlectron tương đối tính, công thức đó được đổi thành

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^5}\left(\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau}\right),$$

trong đó $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, p_μ và p^μ lần lượt là vectơ bốn chiều năng - xung lượng hiệp biến và phản biến của êlectrơn

$$p_\mu = (\mathbf{p}c, -E)\,, \quad p^\mu = (\mathbf{p}c, E)\,.$$

Do đó

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)c^2 - \left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2.$$

Vì sự mất mát năng lượng của êlectron trong một vòng là rất nhỏ, nên ta có thể lấy gần đúng $\frac{dE}{d\tau} \approx 0$ và $\gamma \approx$ hằng số. Khi đó

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma^2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,.$$

Thay thế vào biểu thức cho τ ta có

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^5}m^2\gamma^4c^2\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^4\gamma^4\,.$$

Sự mất mát năng lượng trong một vòng là

$$\Delta E = \frac{2\pi R}{v}P = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{R}\left(\frac{v}{c}\right)^3\gamma^4\,.$$

Vì $\gamma = \frac{E}{mc^2}$, nên

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3\left(\frac{e^2}{mc^2R}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \approx 5\times 10^{-4}\,.$$

5029

Xét từ trường tĩnh trong một hệ tọa độ vuông góc đã cho bằng

$$\mathbf{B} = B_0(x\,\hat{x} - y\,\hat{y})/a\,.$$

(a) Hãy chứng minh rằng trường này tuân theo các phương trình Maxwell trong không gian tự do.

(b) Hãy vẽ phác các đường sức và chỉ ra cần phải đặt các dòng dạng sợi dây ở đâu để tạo ra một trường như thế.

(c) Hãy tính từ thông trên đơn vị chiều dài theo hướng $\hat{z}$ giữa gốc tọa độ và đường sức mà khoảng cách nhỏ nhất của nó tính từ gốc là R.

(d) Nếu một người quan sát chuyển động với vận tốc phi tương đối $\mathbf{v} = v\hat{z}$ tại vị trí $(x,\ y)$ nào đó thì người đó sẽ đo được điện thế so với gốc là bao nhiêu?

(e) Nếu từ trường $B_0(t)$ thay đổi chậm theo thời gian, thì một người quan sát đứng yên sẽ đo được điện trường là bao nhiêu tại vị trí $(x,\ y)$?

(*Wisconsin*)

Lời giải:

(a)

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \left(\hat{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left[\frac{B_0}{a}\,(x\hat{x} - y\hat{y})\right]$$
$$= \frac{B_0}{a}\,(\hat{x}\cdot\hat{x} - \hat{y}\cdot\hat{y}) = 0\,.$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \left(\hat{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left[\frac{B_0}{a}\,(x\hat{x} - y\hat{y})\right]$$
$$= \frac{B_0}{a}\,(\hat{x}\times\hat{x} - \hat{y}\times\hat{y}) = 0\,.$$

(b) Các đường sức từ trường được xác định bởi phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = -\frac{y}{x}\,,$$

nghĩa là

$$xdy + ydx = 0\,,$$

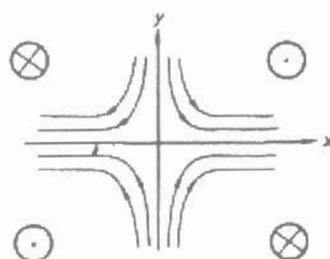
hay

$$d(xy) = 0\,.$$

Do đó

$$xy = \text{ hằng số.}$$

Các đường sức được minh hoạ trên hình 5.17. Để tạo ra một trường như thế này cần phải đặt bốn dòng điện thẳng dài vô hạn song song với hướng z một cách đối xứng trong bốn góc với các chiều dòng điện như đã được chỉ ra trên hình 5.17 .



Hình 5.17

(c) Xét một hình chữ nhật có chiều cao $z = 1$ và chiều dài R dọc theo đường phân giác của góc vuông giữa trục x và trục y trong cung phần tư thứ nhất (nghĩa là dọc theo đường thẳng $x = y$). Khi đó vectơ đơn vị vuông góc với hình chữ nhật này là $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$. Dọc theo chiều dài R, $\mathbf{B}(x, y) = \frac{B_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y}) = \frac{B_0}{a}x(\hat{x} - \hat{y})$. Lấy phần tử diện tích của hình chữ nhật là $d\sigma = \sqrt{2}\,dx$, ta có thông lượng từ qua hình chữ nhật này là

$$\phi_B = \int \mathbf{B}(x, y) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{2B_0}{a} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} x dx = \frac{B_0 R^2}{2a} .$$

(d) Chuyển sang hệ quy chiếu của người quan sát ta nhận được

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad E'_\parallel = E_\parallel = 0 ,$$

hay

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} ,$$

vì đối với các tốc độ nhỏ, $\beta = \frac{v}{c} \approx 0$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1$.

Do đó

$$\mathbf{E}' = v\hat{z} \times \left[\frac{B_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y}) \right] = \frac{B_0}{a} v(x\hat{y} + y\hat{x}) .$$

Điện thế $\phi(x, y))$ đối với gốc toạ độ (0, 0) được đo bởi người quan sát là

$$\phi(x, y) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r},$$

trong đó $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$.
Do đó

$$\phi(x, y) = \frac{B_0 v}{a} \int_0^{\mathbf{r}} (xdy + ydx)$$
$$= -\frac{B_0 v}{a} \int_0^{\mathbf{r}} d(xy) = -\frac{B_0}{a} vxy.$$

(e) Phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ cho

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\dot{B}_0(t)\frac{x}{a},$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \dot{B}_0(t)\frac{y}{a},$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Vì $\mathbf{B}$ chỉ thay đổi chậm với thời gian, nên $\dot{\mathbf{B}}$ có thể coi nó là độc lập với các toạ độ không gian. Nghiệm của hệ phương trình này là E_x = hằng số, E_y = hằng số, và

$$E_z = -\frac{\dot{B}_0(t)x}{a}\int dy = -\frac{\dot{B}_0(t)xy}{a} + f_1(x)$$

hay

$$E_z = -\frac{\dot{B}_0(t)xy}{a} + f_2(y).$$

Do đó $f_1(x) = f_2(y)$ = hằng số, nó cũng như các hằng số khác có thể lấy bằng 0 khi ta không quan tâm đến bất cứ trường đều nào. Do đó

$$\mathbf{E} = -\dot{B}_0(t)\frac{xy}{a}\mathbf{e}_z.$$

5030

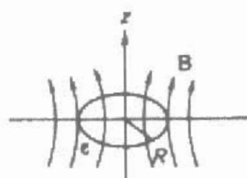
Xét chuyển động của các êlectron trong một từ trường đối xứng trục. Giả thiết rằng tại $z = 0$ ("mặt phẳng giữa") thành phần bán kính của từ trường

bằng 0 tức là $\mathbf{B}(z = 0) = B(r)\,\mathbf{e}_z$. Các êlectron tại $z = 0$ khi đó chuyển động theo một đường vòng tròn bán kính R như thấy trên hình 5.18.

(a) Xác định mối quan hệ giữa động lượng p, êlectron và bán kính quỹ đạo R. Trong một bêtatron, các êlectron được gia tốc bởi một từ trường thay đổi theo thời gian. Lấy B_{av} là giá trị trung bình của từ trường trên mặt phẳng của quỹ đạo (bên trong quỹ đạo), nghĩa là

$$B_{\text{av}} = \frac{\psi_B}{\pi R^2}\,.$$

trong đó ψ_B là từ thông qua quỹ đạo. Lấy $\mathbf{B}_0$ bằng $\mathbf{B}(r = R,\ z = 0)$.



Hình 5.18

(b) Giả thiết B_{av} thay đổi một lượng ΔB_{av} và B_0 thay đổi một lượng ΔB_0. ΔB_{av} cần phải liên hệ với ΔB_0 như thế nào nếu các êlectron vẫn còn tại bán kính R khi động lượng của chúng tăng?

(c) Giả thiết thành phần z cuả từ trường ở gần vị trí $r = R$ và $z = 0$ thay đổi theo r như $B_z(r) = B_0(R)\,(\frac{R}{r})^n$. Hãy tìm các phương trình chuyển động đối với những độ lệch đi nhỏ ra khỏi quỹ đạo cân bằng ở mặt phẳng giữa. Có hai phương trình, một cho sự thay đổi nhỏ theo hướng thẳng đứng và một cho những thay đổi nhỏ theo hướng bán kính. Bỏ qua mọi sự liên kết giữa chuyển động theo hướng thẳng đứng và theo hướng bán kính.

(d) Đối với khoảng giá trị nào của n thì quỹ đạo là ổn định với những nhiễu loạn cả theo chiều thẳng đứng và chiều bán kính?

(Princeton)

Lời giải:

Để đơn giản, ta sẽ giả thiết các chuyển động phi tương đối.

(a) Phương trình chuyển động là $m\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = -e\,|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|$, hay $\frac{mv^2}{R} = -evB$. Do đó $p = mv = -eBR$, trong đó $-e$ là điện tích êlectron.

(b) Điều đó đòi hỏi R giữ nguyên không thay đổi khi B_0 tăng một lượng ΔB_0 và v thay đổi một lượng Δv. Như vậy

$$m\,\frac{(v+\Delta v)^2}{R} = -e(v+\Delta v)\,(B_0+\Delta B_0)\,,$$

hay

$$\Delta B_0 \approx -\frac{m\Delta v}{eR}\,,$$

vì

$$\frac{mv^2}{R} = -evB_0\,.$$

Sự thay đổi của v bắt nguồn từ sự thay đổi của $\mathbf{B}$ theo thời gian. Định luật Faraday dưới đây

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_S \dot{\mathbf{B}}\cdot d\mathbf{S}$$

chỉ ra rằng điện trường tiếp tuyến

$$E = \frac{1}{2\pi R}\,\frac{d\phi}{dt}$$

được cảm ứng trên quỹ đạo. Kết quả, sự thay đổi của động lượng là

$$m\Delta v = \int_0^{\Delta t} \frac{-e}{2\pi R}\,\frac{d\phi}{dt}\,dt = \frac{-e\Delta\phi}{2\pi R} = \frac{-eR\Delta\, B_{\text{av}}}{2}\,,$$

vì $\Delta\phi = \Delta B_{\text{av}}\pi R^2$. Do đó

$$\Delta B_0 = \frac{1}{2}\,\Delta B_{\text{av}}\,.$$

(c) Giả thiết êlectron chịu một nhiễu loạn theo hướng bán kính sao cho bán kính cân bằng và tốc độ góc thay đổi bởi những đại lượng nhỏ

$$r = R + r_1\,,\quad \omega = \omega_0 + \omega_1\,,$$

trong đó $\omega_0 = \frac{v}{R} = -\frac{eB_0}{m}$.

Trong hệ toạ độ trụ r, θ, z, êlectron có tốc độ

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\,.$$

Vì

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\,,\quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r\,,$$

gia tốc là

$$\boldsymbol{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta\,.$$

Định luật Newton thứ hai

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{a} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

khi đó cho các phương trình sau

$$-er\dot{\theta}B_z = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,,$$

$$e\dot{r}B_z = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,.$$

Khi $\mathbf{B} = B_z\,\mathbf{e}_z$,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = r\dot{\theta}B_z\mathbf{e}_r - \dot{r}B_z\mathbf{e}_\theta\,.$$

Biểu diễn qua các nhiễu loạn, ta có thể viết

$$\dot{r} = \dot{r}_1\,, \quad \dot{\theta} = \omega_0 + \omega_1\,, \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega}_1$$

giới hạn ở phép gần đúng bậc nhất, các phương trình trên lần lượt trở thành

$$m(\ddot{r}_1 - R\omega_0^2 - r_1\omega_0^2 - 2R\omega_0\omega_1) \approx -e(R\omega_0 + R\omega_1 + r_1\omega_0)B_z\,,$$

$$e\dot{r}_1B_z \approx mR\dot{\omega}_1 + 2m\dot{r}_1\omega_0\,.$$

Sử dụng $B_z(R + r_1) \approx B_z(R) + \left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)_R r_1$, $eB_z(R) = m\omega_0$, một lần nữa vẫn giới hạn ở phép gần đúng bậc nhất, ta có

$$-eR\omega_0B_z'(R)r_1 - eB_z(R\omega_1 + r_1\omega_0) = m(\ddot{r}_1 - 2R\omega_0\omega_1 - r_1\omega_0^2)\,,$$

và

$$R\dot{\omega}_1 + \dot{r}_1\omega_0 = 0\,,$$

trong đó $B_z'(R) = \left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)_R$. Lấy tích phân phương trình thứ hai và sử dụng nó vào phương trình thư nhất, ta được

$$-eR\omega_0B_z'(R)r_1 = m\ddot{r}_1 + m\omega_0^2r_1\,.$$

Bây giờ vì

$$B_z'(R) = B_0(R)n\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{R}{r^2}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{n}{R}\,B_z(R)\,,$$

và một lần nữa lại sử dụng hệ thức $eB_z(R) = m\omega_0$, ta sẽ nhận được phương trình chuyển động theo bán kính

$$\ddot{r}_1 + (1 - n)\omega_0^2r_1 = 0\,. \tag{1}$$

Chuyển động thẳng đứng được mô tả bởi định luật Newton thứ hai $F_z = m\ddot{z}$. Bây giờ

$$\begin{aligned} F_z &= -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z = -e(\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) \\ &= -e\dot{r}_1 B_\theta + e(R + r_1)(\omega_0 + \omega_1)B_r \approx eR\omega_0 B_r \,, \end{aligned}$$

vì B_θ và B_r là các đại lượng nhỏ bậc nhất. Do đó

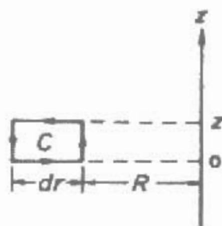
$$m\ddot{z} = e\omega_0 R B_r \,.$$

Để tìm B_r, xét một vòng nhỏ C trong một mặt phẳng chứa trục z như trên hình 5.19. Sử dụng định luật Ampe về lưu số $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ và lưu ý rằng không có thành phần bán kính của $\mathbf{B}$ trong mặt phẳng $z = 0$, ta tìm được

$$B_z(R)z + B_r(z)dr - B_z(R + dr)z = 0 \,,$$

hay

$$B_r(z) = \frac{B_z(R + dr) - B_z(R)}{dr} z = B_z'(R)z \,.$$



Hình 5.19

Vì $B_z'(R) = -\frac{n}{R} B_z(R)$, $eB_z(R) = m\omega_0$, ta có

$$m\ddot{z} + m\omega_0^2 n z = 0 \,. \tag{2}$$

Các phương trình (1) và (2) mô tả các sự lệch nhỏ ra quỹ đạo cân bằng.

(d) Để cho quỹ đạo ổn định cả hai nhiễu loạn theo hướng thẳng đứng và theo hướng bán kính đều phải là dạng hình sin. Khi đó phương trình (1) đòi hỏi $n < 1$ và phương trình (2) đòi hỏi $n > 0$. Do đó ta phải có $0 < n < 1$.

5031

Một êlectron chuyển động trong một giếng thế một chiều có dao động điều hoà với tần số $\omega = 10^5$ rad/s, và biên độ $x_0 = 10^{-8}$ cm.

(a) Hãy tính năng lượng bức xạ trong một vòng.

(b) Tỉ số của năng lượng mất mát trong một vòng và cơ năng trung bình là bao nhiêu?

(c) Phải mất bao nhiêu thời gian để năng lượng của nó bị mất mát một nửa?

(*Columbia*)

Lời giải:

(a) Phản lực bức xạ có tác dụng như một lực tắt dần đối với chuyển động của một êlectron phi tương đối, trong hệ đơn vị Gauss là (xem bài tập **5032**(a))

$$f = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}\,.$$

Như vậy phương trình chuyển động của êlectron là

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}\,,$$

hay

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{x}\,,$$

trong đó $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Coi sự tắt dần do bức xạ là nhỏ và đầu tiên ta hãy bỏ qua thành phần phát xạ sao cho $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, hay $x = x_0 e^{-i\omega_0 t}$. Khi đó

$$\frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{x} = \frac{i2e^2\omega_0^3}{3mc^3}x = i2\omega_0\alpha x$$

với $\alpha = \frac{e^2\omega_0^2}{3mc^3}$.

Bây giờ phương trình chuyển động trở thành

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2 - i2\omega_0\alpha)\,x\,.$$

Nghiệm của phương trình trên là

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - i2\omega_0\alpha}\,t} \\ &\approx x_0 e^{-\alpha t} e^{-i\omega_0 t}\,. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng vì $\frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{2}{3} r_0 \frac{\omega_0}{c}$, với $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \times 10^{-13}$ cm là bán kính ban đầu của êlectron, nhỏ hơn nhiều so với đơn vị nên phép gần đúng dùng ở trên là chấp nhận được. Thêm nữa, ta có thể lấy

$$\ddot{x} \approx -\omega_0^2 x\,.$$

Cơ năng trung bình của êlectron là

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \frac{1}{2} m\langle \dot{x}^2\rangle + \frac{1}{2} k\langle x^2\rangle \\ &= \frac{1}{4} m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\alpha t} + \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\alpha t} \\ &= \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\alpha t}\,.\end{aligned}$$

Tốc độ mất mát năng lượng trung bình do phát xạ là

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dE}{dt}\right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T f\dot{x}dt = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{x}\dot{x}dt = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{1}{T}[\ddot{x}\dot{x}]_0^T - \frac{2e^2}{3c^3}\frac{1}{T}[\ddot{x}^2]_0^T \\ &= -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\omega_0^4 x_0^2}{2}\,,\end{aligned}$$

như vậy năng lượng mất mát trong một chu kì (vòng) là

$$\Delta E = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\omega_0^4 x_0^2}{2}\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2\omega_0^3 x_0^2}{c^3} = 1,8\times 10^{-51}\ \text{erg} = 1,1\times 10^{-39}\ \text{eV}\,.$$

(b) Tỉ số của năng lượng mất mát trong một chu kì (vòng) với cơ năng toàn phần là

$$\frac{\Delta E}{\langle E\rangle} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{e^2\omega_0}{mc^3} = \frac{4\pi}{3} r_0 \frac{\omega_0}{c} = 3.9\times 10^{-18}\,.$$

(c)

$$E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\alpha t}\,.$$

Giả sử $E(t+\tau) = \frac{1}{2}E(t)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\tau = \frac{\ln 2}{2\alpha} &= \frac{3mc^3}{2e^2\omega_0^2}\ln 2 \\ &= \frac{3c}{2r_0\omega_0^2}\ln 2 \\ &= 1,1\times 10^{13}\ \text{s}\,.\end{aligned}$$

5032

Một êlectron có điện tích e và khối lượng m được liên kết bởi một lực phục hồi tuyến tính với hằng số đàn hồi $k = m\omega_0^2$. Khi êlectron này dao động, công suất phát xạ được biểu thị bằng

$$P = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3}$$

trong đó $\dot{v}$ là gia tốc của êlectron và c là tốc độ của ánh sáng.

(a) Coi năng lượng mất mát do phát xạ là do tác dụng của một lực tắt dần $\mathbf{F}_s$. Giả thiết rằng năng lượng mất mát trong một chu kì là nhỏ so với tổng năng lượng toàn phần của êlectron. Sử dụng mối quan hệ công - năng lượng trong một thời gian dài, hãy tìm biểu thức đối với $\mathbf{F}_s$ qua $\ddot{\mathbf{v}}$. Dưới những điều kiện gì thì F_s gần đúng tỉ lệ với v?

(b) Hãy viết phương trình chuyển động đối với điện tích dao động, giả thiết rằng F_s tỉ lệ thuận với v. Hãy giải phương trình tìm vị trí của điện tích như một hàm của thời gian.

(c) Giả thiết của phần (a) cho rằng sự mất mát năng lượng trong một chu kì là nhỏ có được thoả mãn đối với một tần số tự nhiên $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^{15}$ Hz không?

(d) Bây giờ giả thiết rằng bộ dao động êlectron cũng được điều khiển bằng một điện trường ngoài $E = E_0 \cos(\omega t)$. Hãy tìm cường độ tương đối trung bình theo thời gian $I/I_{\max}$ của công suất phát xạ như một hàm của tần số góc ω đối với $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ (gần cộng hưởng). Hãy tìm tần số ω_1 mà đối với nó I là cực đại, hãy tìm tỉ số "dịch mức" $(\omega_1 - \omega_0)/\omega_0$ và tỉ số độ rộng toàn phần tại nửa cực đại $\Delta\omega_{\text{FWHM}}/\omega_0$.

(MIT)

Lời giải:

(a) Lực tắt dần được định nghĩa sao cho công mà êlectron thực hiện chống lại nó trong một đơn vị thời gian đúng bằng công suất phát xạ. Như vậy trong hệ đơn vị Gauss ta có

$$-\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{v}$$
$$= \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}\Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}dt\,.$$

Lấy $t_2 - t_1 = T$ là một chu kì của dao động và giả thiết rằng năng lượng mất đi trong một chu kì nhỏ hơn so với năng lượng, ta có thể coi chuyển động của

êlectron như theo tựa tuần hoàn. Khi đó $\mathbf{v}\big|_{t_1} = \mathbf{v}\big|_{t_2}$, $\dot{\mathbf{v}}\big|_{t_1} = \dot{\mathbf{v}}\big|_{t_2}$ và có thể bỏ qua số hạng đầu tiên ở vế phải. Như vậy phương trình trên cho

$$\mathbf{F}_s = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\,.$$

Nếu lực tắt dần rất yếu so với lực phục hồi tác dụng lên êlectron có thể lấy li độ của êlectron là $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega_0 t}$, và hơn nữa ta có thể lấy $\ddot{\mathbf{v}} = -\omega_0^2\mathbf{v}$. Khi đó $\mathbf{F}_s$ là tỉ lệ thuận với v,

$$\mathbf{F}_s = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\mathbf{v}\,.$$

(b) Phương trình chuyển động của êlectron là

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3}\omega_0^2\dot{x}\,.$$

Đặt $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$, phương trình trên có thể viết lại như sau

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Nếu F_s nhỏ hơn rất nhiều so với lực phục hồi, nghĩa là $\gamma \ll \omega_0$, phương trình trên có nghiệm là (xem Bài tập **5031**)

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}\,.$$

(c) Đối với tần số tự nhiên $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10^{15}$ Hz,

$$\gamma = \frac{2}{3} r_0 \frac{\omega_0^2}{c} = 2,5 \times 10^8\ \text{s}^{-1}\,,$$

trong đó $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \times 10^{-13}$ cm là bán kính ban đầu của êlectron. Điều kiện $\gamma \ll \omega_0$ rõ ràng được thoả mãn.

Thế năng của êlectron là $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Sau mỗi chu kì x bị giảm đi một thừa số $e^{-\frac{\gamma}{2}T}$, trong đó T là chu kì $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Như vậy tỉ số của năng lượng mất đi trong một chu kì so với cơ năng toàn phần có thể ước tính như sau

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\gamma T} &= 1 - \exp(-2,5 \times 10^8 \times 10^{-15}) \\ &= 2,5 \times 10^{-7} \ll 1\,. \end{aligned}$$

Cũng tính tương tự đối với phần động năng của năng lượng. Như vậy giả thiết của (a) là đúng.

(d) Sau khi cho thêm điện trường ngoài, phương trình chuyển động trở thành

$$m\ddot{x} = -eE_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3}\omega_0^2 \dot{x}\,.$$

Đặt $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$, phương trình trên có thể viết như sau

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}\,.$$

Bằng cách thay thế $x = x_0 e^{-i\omega t}$ vào phương trình trên, ta nhận được nghiệm của trạng thái ổn định như sau

$$x = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} E_0 e^{-i\omega t}\,,$$

nó cho

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} E_0 e^{-i\omega t}\,.$$

Bây giờ công suất phát xạ lấy trung bình theo thời gian là

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{2e^2}{3c^3}\langle \ddot{x}^2\rangle = \frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\ddot{x}^*\ddot{x}) \\ &= \frac{e^4 E_0^2}{3m^2c^3}\cdot\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\,. \end{aligned}$$

$I_{\max}$ xảy ra ở gần tần số tự nhiên ω_0.

Đặt $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ và $u = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. Vì $u = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$. Ta có, chính xác đến bậc hai của các đại lượng nhỏ

$$I(u) = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2c^3}\frac{1 + 4u + 6u^2}{4u^2 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}\,.$$

Từ $\frac{dI(u)}{du} = 0$, ta nhận được

$$u_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\,,$$

như vậy tần số tương ứng với $I_{\max}$ là

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\omega_0}\,,$$

và công suất phát xạ cực đại là

$$I_{\max} = I(u_1) \approx \frac{e^4 E_0^2}{3m^2c^3}\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}.$$

Do đó

$$\frac{I(\omega)}{I_{\max}} = \frac{\omega_0^2}{4(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} = \frac{\gamma^2}{4(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}.$$

Đối với $I(\omega)/I_{\max} = \frac{1}{2}$, $\omega = \omega_\pm = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$. Do đó độ rộng tại nửa cực đại là

$$\frac{\Delta\omega_{\text{FWHM}}}{\omega_0} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0}.$$

5033

Để tính đến hiệu ứng phát xạ năng lượng của một hạt tích điện có gia tốc ta phải sửa đổi phương trình chuyển động Newton bằng cách đưa thêm vào một phản lực bức xạ F_R.

(a) Hãy suy ra kết quả cổ điển đối với F_R

$$\mathbf{F}_R = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

bằng cách sử dụng sự bảo toàn năng lượng. Để đơn giản hãy giả thiết rằng quỹ đạo là hình tròn sao cho $\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0$, trong đó $\mathbf{v}$ là vận tốc của hạt.

Bây giờ hãy xét một êlectron tự do. Giả sử một sóng phẳng với điện trường $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ hướng tới êlectron. Một lần nữa giả thiết rằng $v \ll c$.

(b) Tính lực lấy trung bình theo thời gian $\langle F\rangle$ do sóng điện từ tác dụng lên êlectron.

(c) Hãy sử dụng áp suất bức xạ p của sóng này để suy ra tiết diện tán xạ hiệu dụng của bức xạ này.

$$\sigma = \langle F\rangle/p.$$

(Chicago)

Lời giải:

(a) Xem Bài tập **5032**.

(b) Phương trình chuyển động của êlectron dưới tác dụng của một sóng điện từ phẳng là

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

Trong trạng thái dừng $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$. Thay thế vào phương trình trên ta được

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2 + i\,\frac{2e^2\omega^3}{3c^3}}\,.$$

Lực tác dụng lên êlectron lấy trung bình trong một chu kì là

$$\langle F\rangle = \langle -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\rangle = -\frac{e}{c}\,\langle \mathbf{v}\times\mathbf{B}\rangle$$

với

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -i\omega\mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}\,,$$

Vì $\langle e^{-i\omega t}\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{F}\rangle &= -\frac{e}{2c}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{v}^*\times\mathbf{B})\\ &= -\frac{e}{2c}\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega e\mathbf{E}_0}{m\omega^2 - i\,\frac{2e^2\omega^3}{3c^3}}\times\mathbf{B}_0\right]\\ &= -\frac{e^2}{2c}\cdot\frac{8\pi}{c}\,\langle\mathbf{S}\rangle\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{m\omega^2 - i\,\frac{2e^2\omega^3}{3c^3}}\right],\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{S}\rangle &= \langle\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}\rangle\\ &= \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}^*\times\mathbf{B})\\ &= \frac{c}{8\pi}\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0\end{aligned}$$

là vectơ Poyting trung bình.

Mặt khác,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{m\omega^2 - i\,\frac{2e^2\omega^3}{3c^3}}\right] = -\frac{2e^2\omega^4}{3c^3}\left[m^2\omega^4 + \left(\frac{2e^2\omega^3}{3c^3}\right)^2\right]^{-1} \approx -\frac{2e^2}{3m^2c^3}\,,$$

vì giả thiết $v \ll c$ có nghĩa là $\omega r \ll c$, hay $\frac{e^2\omega^3}{c^3} = mr_0\,\frac{\omega^3}{c} \ll m\omega^2$, với $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ là bán kính cổ điển của êlectron, $\sim r$. Do đó

$$\langle\mathbf{F}\rangle \simeq \frac{8\pi e^4}{3m^2c^5}\,\langle\mathbf{S}\rangle\,.$$

(c) Áp suất bức xạ trung bình là $\langle p \rangle = \frac{\langle |\mathbf{S}| \rangle}{c}$. Nó có quan hệ với $\langle \mathbf{F} \rangle$ qua tiết diện tán xạ hiệu dụng σ bằng công thức

$$\sigma = \frac{\langle F \rangle}{\langle p \rangle} = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 ,$$

với r_0 là bán kính cổ điển của êlectron.

5034

Xét lý thuyết cổ điển về độ rộng của vạch phổ nguyên tử. "Nguyên tử" bao gồm một êlectron có khối lượng m và điện tích e ở trong một thế dao động tử điều hoà. Cũng có một lực ma sát gây tắt dần, do đó phương trình chuyển động đối với êlectron là

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2 \mathbf{x} + \gamma \dot{\mathbf{x}} = 0 .$$

(a) Giả thiết rằng tại thời $t = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ và $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Chuyển động tiếp theo của êlectron là như thế nào? Một êlectron cổ điển thực hiện chuyển động này có thể phát ra bức xạ điện từ. Hãy xác định cường độ $I(\omega)$ của bức xạ này như một hàm của tần số. (Bạn không cần tính chuẩn hoá tuyệt đối của $I(\omega)$, mà chỉ cần tính dạng phụ thuộc vào ω của $I(\omega)$. Nói một cách khác, chỉ cần tính $I(\omega)$ với sai khác một hằng số tỉ lệ là đủ). Giả thiết $\gamma/m \ll \omega_0$.

(b) Bây giờ giả thiết rằng lực gây tắt dần $\gamma\dot{x}$ không xuất hiện trong phương trình có trong câu (a) và rằng sự dao động tắt dần chỉ bởi sự mất năng lượng do bức xạ (một hiệu ứng mà ở trên đã được bỏ qua). Năng lượng U của sự dao động sẽ giảm theo $U_0 e^{-\Gamma t}$. Theo những giả thiết trên, Γ là gì? (Bạn có thể giả thiết rằng trong bất kì một dao động nào êlectron chỉ mất đi một phần nhỏ năng lượng của nó).

(c) Đối với một vạch phổ nguyên tử 5000 A, độ rộng của vạch phổ này, tính bằng Angstom là bao nhiêu, khi xác định từ sự tính toán của phần (b)? Êlectron thực hiện khoảng bao nhiêu dao động trong khi mất đi một nửa năng lượng của nó? Chỉ cần tính thô.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động đối của êlectron là

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2 \mathbf{x} + \gamma \dot{\mathbf{x}} = 0 ,$$

với những điều kiện ban đầu

$$\mathbf{x}\big|_{t=0} = \mathbf{x}_0 \,,$$

$$\dot{\mathbf{x}}\big|_{t=0} = 0 \,.$$

Nghiệm của nó là

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{-i\omega t} \,,$$

trong đó

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \,.$$

Vì $\frac{\gamma}{2m} \ll \omega_0$, nên $\omega \approx \omega_0$, và $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{-i\omega_0 t}$. Dao động của êlectron quanh hạt nhân dương tương đương với dao động lưỡng cực có mômen $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{-i\omega_0 t}$, nghĩa là, một dao động lưỡng cực với biên độ tắt dần, trong đó $\mathbf{p}_0 = e\mathbf{x}_0$. Trường bức xạ của nó tại một khoảng cách lớn xa là

$$\mathbf{E}(r,\, t) = \mathbf{E}_0(r)\, e^{-\frac{\gamma}{2m}\left(t - \frac{r}{c}\right)}\, e^{-i\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} \,.$$

Để đơn giản ta sẽ đặt $t - \frac{r}{c} = t'$ và viết

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t'} e^{-i\omega_0 t'} \,.$$

Nhớ rằng t' là thời gian trễ. Bằng phép biến đổi Fourier, dao động này là sự chồng chập của các dao động có trong một dải rộng các tần số

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\, e^{-i\omega t'}\, d\omega \,,$$

trong đó vì $\mathbf{E}(t) = 0$ đối với $t < 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t'}\, dt' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{E}_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t'} e^{-i\omega_0 t'} \right) e^{i\omega t'} dt' \\
&= \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi} \frac{1}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2m}} \,.
\end{aligned}$$

Khi đó cường độ bức xạ là

$$I(\omega) \propto |\mathbf{E}(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4m^2}} \,. \qquad (1)$$

Đây là phổ Lorentz.

(b) Đối với $\gamma = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega_0 t'}$ và tốc độ bức xạ lưỡng cực là

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3c^3} \langle |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \rangle = \frac{2}{3c^3} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\ddot{p}^* \ddot{p}) = \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} .$$

Năng lượng toàn phần của lưỡng cực là $U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2$, như vậy $\langle P \rangle = \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3 m} U$. Vì sự mất mát năng lượng chỉ là do bức xạ, nên ta có

$$\frac{dU}{dt'} + \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} U = 0 .$$

Phương trình này có nghiệm $U = U_0 e^{-\Gamma t'}$, với $\Gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$.

(c) Để tìm độ rộng của vạch phổ, ta thấy rằng, đối với $\gamma = 0$, $\frac{\gamma}{2m}$ trong phương trình (1) được thay thế bằng $\frac{\Gamma}{2}$. Khi đó nếu chúng ta định nghĩa $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$, với $\omega_\pm$ là các tần số tại nơi mà cường độ bằng một nửa cường độ cực đại, ta có

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\Gamma}{2}$$

hay

$$\Delta\omega = \Gamma .$$

Do đó

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \lambda_0 \frac{\Gamma}{\omega_0} = \lambda_0 \frac{2e^2\omega_0}{3mc^3} = \frac{2e^2}{3mc^3} 2\pi c = \frac{4\pi}{3} r_0 \\ &= \frac{4\pi}{3} \times 2,82 \times 10^{-5} = 1,2 \times 10^{-4} \text{ Å} , \end{aligned}$$

với $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \times 10^{-5}$Å là bán kính cổ điển của êlectron.

Thời gian cần thiết để mất đi một nửa năng lượng là $T = \frac{\ln 2}{\Gamma}$ trong khi thời gian đối với một dao động là $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Do đó để mất đi một nửa năng lượng số dao động được đòi hỏi là

$$\begin{aligned} N &= \frac{T}{\tau} = \frac{\ln 2}{\Gamma} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3c}{4\pi\omega_0 r_0} \ln 2 = \frac{3}{8\pi^2} \frac{\lambda_0}{r_0} \ln 2 \\ &= \frac{3\ln 2}{8\pi^2} \times \frac{5000}{2,82 \times 10^{-5}} = 4,7 \times 10^6 . \end{aligned}$$

5035

Sự mất mát năng lượng do bức xạ được cho là không quan trọng đối với một hạt tích điện phi tương đối trong máy gia tốc cyclotron. Để minh hoạ cho sự thật này, hãy xét một hạt có điện tích, khối lượng và động năng đã cho, xuất phát trong một quỹ đạo tròn có bán kính đã cho trong cyclotron với một từ trường đều đối xứng trục.

(a) Hãy xác định động năng của hạt như một hàm của thời gian.

(b) Nếu hạt là một proton có động năng ban đầu là 100 triệu eV ($100 \cdot 10^6$ eV), hỏi phải mất bao nhiêu giây để proton mất đi 10 phần trăm năng lượng của nó, nếu nó xuất phát tại bán kính 10 m.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

(a) Lấy khối lượng, điện tích và động năng của hạt (tại thời điểm t) lần lượt là m, q và T. Vì hạt là phi tương đối, nên sự mất mát năng lượng do bức xạ trong mọi chu kì là rất nhỏ so với động năng, do vậy chúng ta có thể xét hạt như chuyển động theo một vòng tròn bán kính R tại thời điểm t. Tốc độ bức xạ của nó là

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{v}^2 .$$

Phương trình chuyển động đối với điện tích khi nó chuyển động theo một đường tròn trong một từ trường đều đối xứng trục B là

$$m|\dot{\mathbf{v}}| = \frac{mv^2}{R} = qvB .$$

Động năng phi tương đối của hạt là $T = \frac{1}{2}mv^2$. Như vậy tốc độ bức xạ của nó là

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{v}^2 = \frac{q^4B^2T}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3} .$$

Lực từ không thực hiện công trên điện tích vì $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$. Do đó P bằng động năng mất đi trong một đơn vị thời gian

$$P = -\frac{dT}{dt} = \frac{q^4B^2T}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3} ,$$

suy ra

$$T = T_0 e^{-\frac{q^4B^2}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}\dot{\theta}},,$$

trong đó T_0 là động năng ban đầu của hạt.

(b) Đối với một proton, $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg. Thời gian để nó mất đi 10 phần trăm năng lượng ban đầu là

$$\tau = -\frac{3\pi\varepsilon_0 m^3 c^3}{q^4 B^2}\ln(0,9)\,.$$

Vì $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}\cdot R^2q^2B^2$, với $T_0 = 100$ MeV, $R = 10$ m, từ trường được cho bởi

$$B^2 = \frac{2mT_0}{R^2q^2} \approx 2,09\times 10^{-2}\ \text{Wb}^2/\text{m}^2\,.$$

Thay thế nó vào biểu thức đối với τ, ta được

$$\tau \approx 8,07\times 10^{10}\ \text{s}\,.$$

5036

Một positron phi tương đối có điện tích e và tốc độ v_1 ($v_1 \ll c$) đập trực diện vào một hạt nhân cố định có điện tích Ze. Positron đến từ xa này được hãm lại cho đến khi nó dừng hẳn và sau đó được tăng tốc trở lại theo hướng ngược lại cho đến khi nó đạt được tốc độ cuối cùng v_2. Tính đến cả sự mất mát năng lượng do bức xạ (nhưng giả thiết là nhỏ), hãy tìm v_2 như một hàm của v_1 và Z. Xác định phân bố góc và phân cực của bức xạ?

(Princeton)

Lời giải:

Vì mất mát năng lượng do bức xạ của positron nhỏ hơn nhiều so với động năng của nó, nên bức xạ có thể được coi như một nhiễu loạn nhỏ. Khi đó, đầu tiên ta bỏ qua hiệu ứng của bức xạ. Do có bảo toàn năng lượng, khi khoảng cách giữa positron và hạt nhân cố định là r và tốc độ của nó là v, ta có

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}mv_1^2\,.$$

Khi $v = 0$, r đạt đến cực tiểu của nó là r_0. Như vậy

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_0} = \frac{1}{2}mv_1^2\,,$$

hay

$$r_0 = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_1^2}\,,$$

từ đó suy ra

$$v^2 = v_1^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Đạo hàm hai vế phương trình trên ta được

$$2\dot{r}\ddot{r} = \frac{v_1^2 r_0}{r^2}\,\dot{r}\,,$$

hay

$$\ddot{r} = \frac{v_1^2 r_0}{2r^2}\,.$$

Tốc độ mất mát năng lượng do bức xạ được cho bởi

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dr}\,\dot{r} = \frac{dW}{dr}\,v = \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{r}^2\,,$$

do vậy

$$dW = \frac{e^2}{6c^3}\,\frac{v_1^3 r_0^2}{r^4}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}\,dr\,.$$

Do đó

$$\Delta W = 2\int_{r_0}^{\infty} dW = \frac{e^2 v_1^3 r_0^2}{3c^3}\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^3\sqrt{r(r-r_0)}}\,.$$

Bằng cách đặt $r = r_0\sec^2\alpha$, ta có lấy được tích phân trên và nhận được

$$\Delta W = -\frac{8}{45}\cdot\frac{v_1^3}{Zc^3}\,mv_1^2\,.$$

Vì $\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \Delta W$, ta có

$$v_2^2 = v_1^2\left(1 - \frac{16}{45}\cdot\frac{v_1^3}{c^3}\cdot\frac{1}{Z}\right).$$

Do đó

$$v_2 \approx v_1\left(1 - \frac{8}{45}\cdot\frac{v_1^3}{Zc^3}\right),$$

vì $v_1 \ll c$.

Do $v \ll c$, sự bức xạ về bản chất là lưỡng cực do đó phân bố góc của công suất bức xạ của nó là

$$\frac{dP}{d\Omega} \propto \sin^2\theta\,.$$

θ là góc giữa các hướng của bức xạ và tốc độ hạt. Sự bức xạ được phân cực phẳng với vectơ điện trường nằm trong mặt phẳng chứa hướng sự bức xạ và hướng gia tốc (cũng là hướng của tốc độ trong trường hợp này).

5037

Một hạt tích điện chuyển động gần mặt phẳng đối xứng nằm ngang của một máy cyclotron trên một quỹ đạo gần như hình tròn có bán kính R. Hãy chứng minh rằng các chuyển động nhỏ theo phương thẳng đứng là chuyển động điều hoà với tần số

$$\omega_v = \omega_c \left(-\frac{R}{B_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)^{1/2}, \text{với} \quad \omega_c = \frac{qB_z}{m}.$$

(*Wisconsin*)

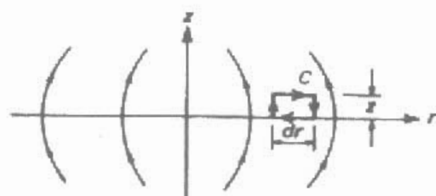
Lời giải:

Như ta thấy trên hình 5.20, ta chọn vòng tròn C để áp dụng định luật Ampe về lưu số $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = 0$. Khi đó

$$B_z(r)z - B_z(r + dr)z + B_r(z)dr - B_r(z = 0)dr = 0.$$

Vì $B_r(z = 0) = 0$, ta có

$$B_r(z) = \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \cdot z.$$



Hình 5.20

Chuyển động thẳng đứng của hạt được mô tả bởi phương trình

$$m\ddot{z} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = q(v_r B_\theta - v_\theta B_r).$$

Vì $\mathbf{B}_\theta = 0$, $v_\theta = v$, phương trình này cho

$$m\ddot{z} = -qv \cdot \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \cdot z,$$

hay

$$\ddot{z} = -\omega_v^2 z\,,$$

trong đó

$$\omega_v^2 = \frac{qv}{m}\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{v^2}{RB_z}\frac{\partial B_z}{\partial r}$$

vì $\frac{mv^2}{R} = qvB_z$. Tốc độ góc của chuyển động tròn là $\omega_c = \frac{v}{R}$. Thêm nữa, $\frac{\partial B_z}{\partial r}$ là âm đối với $z \neq 0$ như thấy trên hình 5.20. Do đó, khi dùng $\frac{\partial B_z}{\partial r}$ để chỉ giá trị tuyệt đối, ta có thể viết

$$\omega_v = \omega_c\left(-\frac{R}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5038

Sự phóng điện qua plasma trung hoà bằng dòng điện mạnh được dự định để làm hội tụ một chùm tia yếu của các antiproton. Các antiproton tương đối tính này tới đến song song với trục phóng điện, vượt qua một khoảng cách L theo đường vòng cung và rời khỏi trục.

(a) Hãy tính phân bố từ trường do dòng điện I trong sự phóng điện gây ra, giả thiết đó là một hình trụ có mật độ dòng đồng đều bán kính R.

(b) Hãy chứng minh rằng độ lệch của các hạt do từ trường phải làm sao cho chùm tia đi vào trường song song với trục sẽ được hội tụ tại một điểm xuôi theo dòng phóng điện.

(c) Dòng vòng cung phải có hướng đi như thế nào?

(d) Sử dụng phép tính gần đúng thấu kính mỏng, hãy tìm tiêu cự của một thấu kính như vậy.

(e) Nếu plasma được thay thế bằng một chùm tia êlectron với dòng điện tương tự, thì tiêu cự có giống như vậy không? Hãy giải thích.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Từ trường tại một điểm ở khoảng $r < R$ tính từ trục của hình trụ dòng điện được xác định cho bởi định luật Ampe về lưu số $\oint_c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ có biểu thức là

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)I = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

Nhớ rằng các hướng tương đối của I và $\mathbf{B}$ được cho bởi quy tắc vặn ốc vít.

(b) (c) Antiproton mang điện tích $-e$. Chuyển động của nó phải ngược hướng với dòng điện vì nó chịu tác dụng của lực $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ hướng về trục phóng điện để hội tụ.

(d) Từ điều trên chúng ta thấy rằng antiproton có tốc độ $\mathbf{v} = -v_z \mathbf{e}_z - v_r \mathbf{e}_r$. Vì $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\theta$, phương trình chuyển động của nó theo hướng bán kính là

$$m \frac{dv_r}{dt} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_r = -ev_z B \approx -evB = -\frac{\mu_0 evI}{2\pi R^2} r .$$

Nhớ rằng

$$dt = \frac{dz}{v_z} \approx \frac{dz}{v} ,$$

và

$$v \approx \text{hằng số}.$$

Hơn nữa, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ cũng có thể lấy gần đúng là hằng số. Do sau khi đi một cung có chiều dài L, tốc độ theo hướng bán kính về phía trục là

$$v_r = \int_0^L \frac{dv_r}{dt} \frac{dz}{v} = -\frac{\mu_0 eIrL}{2\pi m R^2}$$

Trong phép tính gần đúng thấu kính mỏng, tiêu cự là

$$h \approx vt = v \frac{r}{|v_r|} = \frac{2\pi m R^2 v}{\mu_0 eIL} .$$

(e) Nếu một plasma được thay thế bằng một chùm tia êlectron có dòng điện tương tự, các antiproton chịu tác dụng của một lực điện có hướng lệch ra khỏi trục phóng điện. Theo giả thiết sự phân bố dòng điện là đồng đều, mật độ số êlectron n là không đổi. Ứng dụng định lý thông lượng Gauss đối với một đơn vị chiều dài của chùm tia êlectron, ta tìm được

$$2\pi r \varepsilon_0 E = -ne\pi r^2 ,$$

hay

$$E = -\frac{ner}{2\varepsilon_0} .$$

Vì $I = -nev_e \pi R^2$, trong đó v_e là tốc độ của các êlectron, lực điện tác dụng lên một antiproton là

$$f_e = -eE = \frac{ne^2 r}{2\varepsilon_0} = \frac{-eIr}{2\varepsilon_0 \pi R^2 v_e} ;$$

trong khi lực từ tác dụng lên antiproton là

$$f_m = -evB = -\frac{\mu_0 evIr}{2\pi R^2},$$

trong đó v là tốc độ của antiproton. Do đó

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v v_e} = \frac{c^2}{v v_e} \gg 1.$$

Như vậy lực từ có thể bỏ qua được và các antiproton, chủ yếu chịu sự tác dụng của lực đẩy điện, nên không thể hội tụ được nữa.

5039

Một chùm tia các hạt tương đối tính với điện tích $e > 0$ lần lượt đi qua hai vùng, mỗi vùng có chiều dài l chứa từ trường đều **B** và điện trường đều **E** như trên hình 5.21. Các trường này được điều chỉnh sao cho chùm tia chịu các lệch hướng nhỏ cố định θ_B và θ_E ($\theta_B \ll 1$, $\theta_E \ll 1$) trong các trường tương ứng.

(a) Hãy chứng minh rằng động lượng p của hạt có thể được xác định qua B, θ_B, và l.

(b) Hãy chứng minh bằng cách sử dụng cả hai trường **B** và **E** người ta có thể xác định được tốc độ và khối lượng của các hạt trong chùm tia.

(*Wisconsin*)

Lời giải:

Phương trình chuyển động của một hạt có điện tích e và khối lượng tĩnh m_0 trong từ trường **B** là

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

trong đó

$$m = \gamma m_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Đạo hàm 2 vế hệ thức $(\gamma v)^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$, ta có

$$2\gamma\mathbf{v} \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = 2\gamma c^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

hay

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Trong từ trường $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$, do đó $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, nghĩa là $\gamma =$ hằng số. Sử dụng hệ toạ độ Đềcác sao cho $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, ta có thể viết phương trình chuyển động như sau

$$\ddot{x} = \frac{eB}{\gamma m_0}\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{eB}{\gamma m_0}\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Phương trình z chỉ ra rằng $\dot{z} =$ hằng số. Vì

$$\dot{z} = 0, \quad z = 0$$

nên ban đầu, không có chuyển động theo phương z.

Đặt $\omega_0 = \frac{eB}{\gamma m_0}$, ta có

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + \omega_0\dot{x} = 0, \end{cases}$$

và bằng cách lấy đạo hàm, ta có

$$\begin{cases} \dddot{x} - \omega_0\ddot{y} = 0, \\ \dddot{y} + \omega_0\ddot{x} = 0. \end{cases}$$

Tổ hợp các phương trình trên ta nhận được

$$\begin{cases} \dddot{x} + \omega_0^2\dot{x} = 0, \\ \dddot{y} + \omega_0^2\dot{y} = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình này chỉ ra rằng hạt thực hiện chuyển động tròn với tốc độ góc ω_0 và bán kính

$$R = \frac{v}{\omega_0} = \frac{p}{m\omega_0}.$$

Nhớ rằng $m = \gamma m_0$ là hằng số trong từ trường. Như ta thấy trên hình 5.21,

$$\theta_B \approx \frac{l}{R} = \frac{m\omega_0 l}{m\omega_0 R} = \frac{eBl}{p},$$

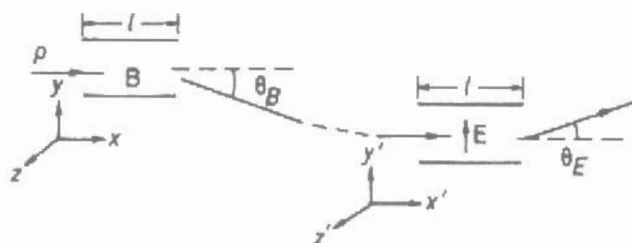
hay $p = \frac{eBl}{\theta_B}$.

(b) Trong điện trường , $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = eE$. Lấy hệ toạ độ Đềcác sao cho $\mathbf{E} = E\mathbf{e}'_y$, ta có

$$mv'_y = eEt \approx eE\frac{l}{v},$$

nghĩa là

$$v'_y \approx \frac{eEl}{mv}.$$



Hình 5.21

Khi đó

$$\theta_E \approx \frac{v'_y}{v} - \frac{eEl}{pv} ,$$

từ biểu thức đó v sẽ được tính giống như p được xác định từ θ_B.

Vì $m = \gamma m_0 = \frac{p}{v} = \frac{p^2\theta_E}{eEl}$, nên m_0 cũng sẽ tính được.

4. SỰ TÁN XẠ VÀ TÁN SẮC CỦA CÁC SÓNG ĐIỆN TỪ (5040–5056)

5040

Hãy tính tiết diện tán xạ của một êlectron cổ điển đối với các sóng điện từ tần số cao.

(Columbia)

Lời giải:

Gọi các trường của các sóng điện từ tần số cao là $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ và $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$. Đối với các sóng điện từ phẳng, $\sqrt{\varepsilon_0}\,|\mathbf{E}| = \sqrt{\mu_0}\,|\mathbf{H}|$, hay $|\mathbf{B}| = \frac{1}{c}|\mathbf{E}|$, sao cho đối với một êlectron cổ điển với $v \ll c$ lực từ $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ có thể được bỏ qua khi so sánh với lực điện $e\mathbf{E}_0$. Chúng ta lấy $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ tại một điểm cố định r. Vì tần số của sóng tới cao, ta phải tính đến sự tắt dần do bức xạ (xem Bài tập 5032). Khi đó phương trình chuyển động đối với êlectron là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\mathbf{x}} ,$$

trong đó x là độ dịch chuyển của êlectron từ vị trí cân bằng, tức là điểm r nói

ở trên. Xét sự tắt dần nhỏ sao cho $\dddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\dot{\mathbf{x}}$ và lấy $\gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}$. Khi đó ta có

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Lấy $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ ta có

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega(\omega + i\gamma)}.$$

Trường bức xạ của êlectron tại một điểm có vectơ bán kính $\mathbf{r}$ tính từ nó là

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}}),$$

với

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Gọi α là góc giữa $\mathbf{n}$ và $\mathbf{E}_0$. Khi đó ta có

$$E(\mathbf{x}, t) = -\frac{e^2\omega E_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mc^2(\omega + i\gamma)r} e^{-i\omega t},$$

với biên độ của nó là

$$E(\mathbf{x}) = \frac{e^2\omega E_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mc^2(\omega^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} r}.$$

Cường độ của sóng tới, lấy trung bình trên một chu kì là

$$I_0 = \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \frac{1}{c\mu_0}\langle E^2 \rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2}\mathrm{Re}\,(E^* E) = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2.$$

Tương tự, cường độ của sóng tán xạ theo hướng α là

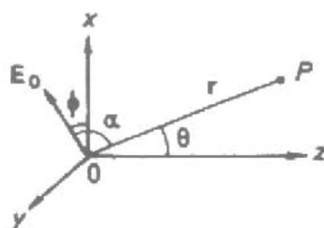
$$I = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E^2,$$

hay

$$I = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \gamma^2}\frac{r_0^2}{r^2} I_0 \sin^2\alpha,$$

trong đó $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$ là bán kính kinh điển của êlectron.

Lấy trục toạ độ như trên hình 5.22 sao cho gốc toạ độ O ở vị trí cân bằng của êlectron, trục z dọc theo hướng của sóng tới và trục x ở trong mặt phẳng



Hình 5.22

chứa trục z và r, hướng của các sóng thứ cấp. Với các góc như đã định nghĩa và vì $\mathbf{E}_0$ nằm trong mặt phẳng xy, ta có

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\phi\,.$$

Nếu các sóng tới không phân cực, ϕ là ngẫu nhiên và cường độ thứ cấp $I(\theta)$ đối với góc tán xạ θ đã cho phải được lấy trung bình theo ϕ

$$\begin{aligned}\langle I(\theta)\rangle &= \frac{\omega^2}{\omega^2+\gamma^2}\cdot\frac{r_0^2}{r^2}I_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta\cos^2\phi)\,d\phi\\ &= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2+\gamma^2}\frac{r_0^2}{r^2}(1+\cos^2\theta)I_0\,.\end{aligned}$$

công suất bức xạ toàn phần khi đó là

$$P = \int_0^\pi \langle I(\theta)\rangle\, 2\pi r^2\sin\theta d\theta = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^2}{\omega^2+\gamma^2}r_0^2 I_0\,.$$

Do đó tiết diện tán xạ là

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^2}{\omega^2+\gamma^2}r_0^2\,.$$

5041

Một sóng điện từ phẳng phân cực thẳng có tần số ω, cường độ I_0 bị tán xạ bởi một êlectron tự do. Xuất phát từ biểu thức tổng quát đối với tốc độ bức xạ của một điện tích có gia tốc, hãy tìm tiết diện tán xạ vi phân trong giới hạn

phi tương đối (tán xạ Thompson). Hãy bàn luận về phân bố góc và sự phân cực của bức xạ tán xạ đó.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Xét dao động cưỡng bức của êlectron bởi sóng tới. Vì $v \ll c$ lực từ có thể bỏ qua khi so sánh với lực điện và ta có thể coi êlectron như ở trong một điện trường đều vì bước sóng tới lớn hơn rất nhiều so với biên độ chuyển động của êlectron. Cường độ điện của sóng phẳng tới tại êlectron là $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ và phương trình chuyển động là

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}\,.$$

Tốc độ bức xạ do êlectron phát ra tại góc α theo hướng của gia tốc tính trong hệ đơn vị Gauss là

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\alpha\,.$$

Vì cường độ trung bình của sóng tới là $I_0 = \langle|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|\rangle = \frac{cE_0^2}{8\pi}$, ta có

$$\frac{dP}{d\Omega} = I_0 r_e^2 \sin^2\alpha\,,$$

trong đó $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ là bán kính cổ điển của êlectron.

Gọi θ là góc tán xạ và định nghĩa ϕ như trong Bài tập **5040**, ta có

$$\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi\,.$$

Như vậy, tiết diện tán xạ vi phân là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP}{I_0 d\Omega} = r_e^2(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)\,,$$

nó chỉ ra rằng phân bố góc của bức xạ thứ cấp phụ thuộc vào cả góc tán xạ θ lẫn góc phân cực ϕ. Theo hướng về phía trước và hướng về phía sau của bức xạ sơ cấp, sự bức xạ tán xạ là cực đại bất kể sự phân cực của các sóng sơ cấp là như thế nào. Theo các hướng nằm ngang, $\theta = \frac{\pi}{2}$, bức xạ tán xạ là cực tiểu; nó bằng 0 đối với $\phi = 0,\ \pi$. Đối với bất kì các góc tán xạ θ khác, cường độ bức xạ tán xạ phụ thuộc vào ϕ, là cực đại đối với $\phi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$ và cực tiểu đối với $\phi = 0,\ \pi$.

Cường độ điện trường của các sóng thứ cấp là

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{c^2 r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}})\,,$$

trong đó **r** là vectơ bán kính của điểm trường tính từ vị trí của êlectron. Điều này chỉ ra rằng **E** ở trong mặt phẳng chứa **r** và $\dot{\mathbf{v}}$. Vì sóng tới phân cực thẳng, $\dot{\mathbf{v}}$ có hướng cố định, nên bức xạ thứ cấp cũng phân cực thẳng.

5042

Một sóng điện từ phân cực thẳng, bước sóng λ, bị tán xạ bởi một hình trụ điện môi nhỏ có bán kính b, chiều cao h và hằng số điện môi K ($b \ll h \ll \lambda$). Trục của hình trụ vuông góc với vectơ sóng tới và song song với điện trường của sóng tới. Hãy tìm tiết diện tán xạ toàn phần.

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Vì $b \ll h \ll \lambda$, hình trụ điện môi nhỏ có thể được coi như một lưỡng cực điện có mômen **p** đối với sự tán xạ của sóng điện từ. Điện trường do **p** sinh ra nhỏ hơn rất nhiều so với điện trường của sóng điện từ tới. Vì thành phần tiếp tuyến của cường độ điện trường qua bề mặt của hình trụ là liên tục nên điện trường bên trong hình trụ bằng điện trường $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\mathbf{e}_z$ của sóng tới. Lấy gốc toạ độ tại vị trí của lưỡng cực, khi đó $\mathbf{r} = 0$ và mômen lưỡng cực điện của hình trụ nhỏ là

$$\mathbf{p} = \pi b^2 h \varepsilon_0 (K-1) E_0 e^{-i\omega t}\mathbf{e}_z ,$$

trục z được lấy theo trục của hình trụ.

Suất phát xạ toàn phần bởi lưỡng cực điện dao động lấy trung bình trên một chu kì là

$$P = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\pi b^4 h^2 \varepsilon_0 \omega^4 (K-1)^2 E_0^2}{12c^3} .$$

Cường độ của sóng tới là $I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2$, do đó tiết diện tán xạ toàn phần của hình trụ là

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{\pi}{6} b^4 h^2 (K-1)^2 \frac{\omega^4}{c^4} .$$

5043

Một sóng điện từ phẳng có bước sóng λ đi tới một quả cầu cách điện có hằng số điện môi ε và bán kính a. Quả cầu nhỏ so với bước sóng ($a \ll \lambda$). Hãy tính tiết diện tán xạ như một hàm của góc tán xạ. Hãy bình luận về sự phân cực của sóng tán xạ như một hàm của hướng tán xạ.

(*Princeton*)

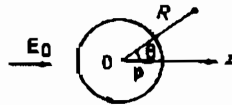
Lời giải:

Giả thiết sóng điện từ tới là phân cực thẳng và lấy cường độ điện trường của nó là $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$. Trong trường này, quả cầu cách điện được phân cực sao cho nó tương đương với một lưỡng cực điện tại tâm của mômen lưỡng cực (xem Bài tập **1064**)

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t'} .$$

Lấy hệ toạ độ với gốc ở tâm quả cầu và trục z song song với $\mathbf{E}_0$ như thấy trong hình 5.23. Khi đó

$$\ddot{\mathbf{p}} = -4\pi\varepsilon_0 a^3 \omega^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0 e^{-i\omega t'} \mathbf{e}_z .$$



Hình 5.23

Trường bức xạ của lưỡng cực dưới điều kiện $a \ll \lambda$ tại một điểm có vectơ bán kính $\mathbf{R}$ là

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_R = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) \frac{a^3\omega^2}{c^3 R} E_0 \sin\theta e^{i(kR-\omega t)} \mathbf{e}_\varphi ,$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_R = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) \frac{a^3\omega^2}{c^2 R} E_0 \sin\theta e^{i(kR-\omega t)} \mathbf{e}_\theta ,$$

trong đó t được cho bởi điều kiện trễ $t' = t - \frac{R}{c}$, và $k = \frac{\omega}{c}$. Vectơ Poynting trung bình là (xem Bài tập **4049**)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} R_e (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{a^6\omega^4}{2\mu_0 c^5} \frac{\sin^2\theta}{R^2} E_0^2 \mathbf{e}_R$$
$$= I_0 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{a^6\omega^4}{c^4} \frac{\sin^2\theta}{R^2} \mathbf{e}_R ,$$

với $I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ là cường độ (trung bình) của sóng tới. Vì công suất trung bình được tán xạ vào trong một góc khối $d\Omega$ theo hướng bán kính lập với trục

một góc θ là $\langle S\rangle R^2 d\Omega$, nên tiết diện tán xạ vi phân sẽ là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle S\rangle R^2}{I_0} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{a^6\omega^4}{c^4}\sin^2\theta\,.$$

Sóng tán xạ được phân cực với các vectơ điện nằm trong mặt phẳng chứa hướng tán xạ và hướng của vectơ điện trường của sóng sơ cấp tại lưỡng cực.

5044

Một chùm bức xạ điện từ phân cực phẳng có tần số ω, biên độ điện trường E_0, phân cực x, đi đến vuông góc với một vùng không gian chứa plasma mật độ thấp ($\rho = 0$, n_0 êlectron trong một đơn vị thể tích).

(a) Hãy tính độ dẫn như một hàm của tần số.

(b) Sử dụng các phương trình Maxwell hãy xác định chiết suất bên trong plasma.

(c) Hãy tính và vẽ biên độ của **E** như một hàm của vị trí trong vùng có biên của plasma.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Khi plasma có mật độ thấp thì không gian về cơ bản là không gian tự do có hằng số điện môi ε_0 và độ từ thẩm μ_0. Khi đó các phương trình Maxwell là

$$\nabla\cdot\mathbf{E}' = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0\,,$$

$$\nabla\times\mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t}\,,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}' = 0\,,$$

$$\nabla\times\mathbf{B}' = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t}\,.$$

Chúng ta cũng có định luật Ohm

$$\mathbf{j} = -n_0 e\mathbf{v} = \sigma\mathbf{E}'\,,$$

trong đó $\mathbf{v}$ là tốc độ trung bình của các êlectron bên trong plasma. Đối với [illegible] ω, lực từ tác dụng lên êlectron nhỏ hơn rất nhiều so với lực điện và có thể

bỏ qua được. Do đó phương trình chuyển động đối với một êlectron là

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}'.$$

Vì bức xạ ngang có cường độ điện $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, độ dịch chuyển của êlectron ra khỏi vị trí cân bằng trong trạng thái ổn định là $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$. Khi đó phương trình chuyển động cho

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m\omega^2}\mathbf{E}'$$

và

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -i\frac{e}{\omega m}\mathbf{E}',$$

do đó

$$\mathrm{j} = i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\mathbf{E}'$$

và độ dẫn là

$$\sigma = i\frac{n_0 e^2}{m\omega}.$$

(b) Vectơ phân cực của plasma được định nghĩa là

$$\mathbf{P} = -n_0 e\mathbf{r} = \frac{-n_0 e^2}{m\omega^2}\mathbf{E}',$$

sao cho cảm ứng điện là

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}' = \varepsilon_0\mathbf{E}' + \mathbf{P}.$$

Do đó hằng số điện môi hiệu dụng của plasma được cho bởi

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{P}{E'} = \varepsilon_0 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2};$$

hay

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2,$$

trong đó

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}$$

nó được gọi là tần số (góc) plasma.

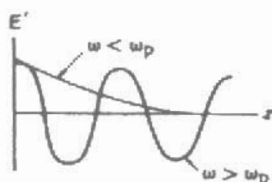
Do đó chiết suất của plasma là

$$n = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2}\,.$$

(c) Xét sóng sơ cấp $\mathbf{E}_0 = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\mathbf{e}_x$, với $k = \frac{\omega}{c}$, chiếu vuông góc với biên của plasma, khi đó sóng bên trong plasma cũng là một sóng phân cực phẳng với biên độ $E'_0 = \frac{2E_0}{1+n}$ và số sóng $k' = \frac{\omega}{c}n = kn$ (xem Bài tập **4011**). Do đó cường độ điện trường của sóng trong vùng biên của plasma là

$$\mathbf{E}' = \frac{2E_0}{1+n}e^{i(knz-\omega t)}\mathbf{e}_z\,.$$

Nhớ rằng đối $\omega > \omega_p$, n và kn là số thực và $\mathbf{E}'$ truyền như sóng, nhưng đối với $\omega < \omega_p$, n và kn là số ảo và $\mathbf{E}'$ suy giảm theo hàm mũ như được minh hoạ trên hình 5.24.



Hình 5.24

5045

Một "plasma loãng" gồm các điện tích tự do có khối lượng m và điện tích e. Có n điện tích trong một đơn vị thể tích. Giả thiết rằng mật độ đồng đều và tương tác giữa các điện tích có thể bỏ qua được. Các sóng điện từ phẳng (tần số ω, số sóng k) được chiếu tới plasma.

(a) Hãy tìm độ dẫn σ như một hàm của ω.

(b) Hãy tìm hệ thức tán sắc, nghĩa là tìm hệ thức giữa k và ω.

(c) Hãy tìm chiết suất như một hàm của ω. Tần số plasma được định nghĩa bởi

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}\,,$$

nếu e được biểu thị trong hệ đơn vị e.s.u. Điều gì sẽ xảy ra nếu $\omega < \omega_p$?

(d) Bây giờ giả thiết có một từ trường ngoài $\mathbf{B}_0$. Hãy xét các sóng phẳng truyền song song với $\mathbf{B}_0$. Chứng minh rằng chiết suất đối với các sóng phân cực tròn trái và phải là khác nhau. (Giả thiết rằng $\mathbf{B}$ của sóng chạy có thể bỏ qua được so với $\mathbf{B}_0$).

(*Princeton*)

Lời giải:

Đối với bài tập này chúng ta sẽ sử dụng hệ đơn vị Gauss.

Vectơ điện của sóng tới tại một điện tích là $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, trong khi tác dụng của vectơ từ có thể bỏ qua trong trường hợp phi tương đối. Như vậy phương trình chuyển động của một điện tích e trong plasma là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} .$$

Trong trạng thái ổn định $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$. Thay vào phương trình trên ta được

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} ,$$

hay

$$\mathbf{x} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2} .$$

(a) Chuyển động của các điện tích tạo ra một mật độ dòng điện

$$\mathbf{j} = ne\dot{\mathbf{x}} = i\,\frac{ne^2}{m\omega}\,\mathbf{E} ,$$

do vậy độ dẫn là

$$\sigma = \frac{j}{E} = i\,\frac{ne^2}{m\omega} .$$

(b) Sự phân cực của plasma là

$$\mathbf{P} = ne\mathbf{x} = -\frac{ne^2}{m\omega^2}\,\mathbf{E} = \chi_e \mathbf{E} ,$$

trong đó χ_e là độ cảm của plasma. Hằng số điện môi theo định nghĩa là

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} ,$$

trong đó

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$$

là tần số plasma. Khi đó chiết suất của plasma là

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}},$$

vì chúng ta có thể giả thiết $\mu = \mu_0 = 1$ đối với plasma. Số sóng trong plasma khi đó được cho bởi

$$k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2),$$

nó chính là hệ thức tán sắc.

(c) Chiết suất là

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nếu $\omega < \omega_p$, n là một số ảo và k cũng như vậy. Lấy trục z theo hướng truyền sóng. Hãy viết $k = i\kappa$, với κ là số thực, ta thấy rằng $e^{ikz} = e^{-\kappa z}$, như vậy sóng sẽ suy giảm theo hàm số mũ và không có sự truyền sóng, plasma chỉ có tác dụng làm phản xạ sóng tới.

(d) Vì $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$, phương trình chuyển động đối với một điện tích e trong plasma là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 .$$

do sóng phẳng là sóng ngang, ta có $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$. Trong trạng thái ổn định, điện tích sẽ dao động với cùng một tần số ω và nghiệm sẽ có dạng $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$. Như vậy $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = (-i\omega)\mathbf{x}$, và các phương trình thành phần là

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}\dot{y}B_0, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}B_0, \tag{2}$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

Giả thiết z và $\dot{z}$ ban đầu bằng 0. Khi đó $z = 0$ và $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$.

Đối với sóng phân cực tròn phải (nhìn ngược hướng truyền E, quay theo phía phải, nghĩa là theo chiều kim đồng hồ) vectơ điện là

$$\mathbf{E}_R = \mathrm{Re}\left\{E_0(\mathbf{e}_x + e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t}\right\}$$
$$= E_0\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x - E_0\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y ,$$

và các phương trình (1) và (2) rút gọn về dạng sau

$$m\ddot{x} = eE_0 \cos\omega t + \frac{e}{c} B_0\dot{y} ,$$

$$m\ddot{y} = -eE_0 \sin\omega t - \frac{e}{c} B_0\dot{x} .$$

Đặt $u = x - iy$, $\omega_c = \frac{eB_0}{mc}$, các phương trình trên có thể tổ hợp lại thành phương trình

$$\ddot{u} - i\omega_c\dot{u} = \frac{eE_0}{m} (\cos\omega t + i \sin\omega t) = \frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} .$$

Nghiệm ở trạng thái ổn định là

$$u = u_0 e^{i\omega t} .$$

Thay thế vào phương trình trên, ta được

$$u_0 = -\frac{eE_0}{m\omega(\omega - \omega_c)} .$$

Do đó

$$u = -\frac{eE_0 (\cos\omega t + i \sin\omega t)}{m\omega(\omega - \omega_c)} ,$$

mà phần thực và phần ảo của nó tương ứng là

$$x = -\frac{eE_0 \cos\omega t}{m\omega(\omega - \omega_c)} , \quad y = \frac{eE_0 \sin\omega t}{m\omega(\omega - \omega_c)}$$

hoặc dưới dạng vectơ

$$\mathbf{x} = -\frac{e\mathbf{E}_R}{m\omega(\omega - \omega_c)} .$$

Như vậy đối với sóng phân cực tròn phải, hệ số phân cực của plasma là

$$\chi_{eR} = -\frac{ne^2}{m\omega(\omega - \omega_c)} ,$$

và chiết suất tương ứng là

$$n_R = \sqrt{\varepsilon_R} = \sqrt{1 + 4\pi\chi_{eR}}$$
$$= \left(1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega(\omega - \omega_c)}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

hay biểu diễn qua tần số plasma ω_{p},

$$n_{\mathrm{R}} = \left[1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega - \omega_{\mathrm{c}})}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Đối với sóng phân cực tròn trái, vectơ điện là

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathrm{L}} &= \mathrm{Re}\left\{E_0(\mathbf{e}_x + e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t}\right\} \\ &= E_0\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + E_0\sin(\omega t)\mathbf{e}_y .\end{aligned}$$

Khi đó, đặt $u = x + iy$ và lặp lại các quá trình trên, ta nhận được chiết suất

$$n_{\mathrm{L}} = \left[1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega + \omega_{\mathrm{c}})}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Rõ ràng là $n_{\mathrm{L}} \neq n_{\mathrm{R}}$, trừ khi $\omega_{\mathrm{c}} = 0$, nghĩa là $B_0 = 0$.

5046

Hệ thức tán sắc đối với các sóng điện từ trong một môi trường plasma được cho là

$$\omega^2(k) = \omega_{\mathrm{p}}^2 + c^2k^2 ,$$

trong đó tần số plasma ω_{p} được định nghĩa như sau

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$$

với N là mật độ êlectron, e là điện tích và m là khối lượng của êlectron.

(a) Đối với $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, hãy tìm chiết suất n của plasma.

(b) Đối với $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, n sẽ lớn hơn hay nhỏ hơn so với 1? Hãy biện luận.

(c) Đối với $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, hãy tính tốc độ truyền tín hiệu qua plasma.

(d) Đối với $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$, hãy mô tả một cách định lượng các biểu hiện của một sóng điện từ trong plasma.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) $n = (1 - \omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Đối với $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, $n < 1$.

(c) Đối với $\omega > \omega_p$, tốc độ pha trong plasma là

$$v_p = \frac{c}{n} > c .$$

Tuy nhiên, thông tin hoặc tín hiệu được truyền với tốc độ nhóm

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = c(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Vì $\omega > \omega_p$, rõ ràng rằng $v_g < c$.

(d) Đối với $\omega < \omega_p$, n và k là số ảo và các sóng điện từ suy giảm theo hàm mũ sau khi đi vào trong plasma. Do đó các sóng điện từ có tần số $\omega < \omega_p$ không thể truyền trong plasma.

5047

Hãy bàn luận về sự truyền của các sóng điện từ có tần số ω qua một vùng chứa đầy các điện tích tự do (khối lượng m và điện tích e) có N hạt trong một cm^3.

(a) Đặc biệt, hãy tìm một biểu thức cho chiết suất và chứng minh rằng dưới những điều kiện nhất định nó có thể là một số phức.

(b) Hãy bàn luận về sự phản xạ và sự truyền qua của sóng đến vuông góc dưới các điều kiện khi chiết suất là số thực và khi nó là một số phức.

(c) Hãy chỉ ra rằng có một tần số tới hạn (tần số plasma) phân chia các vùng chiết suất thực và vùng chiết suất phức.

(d) Xác minh rằng tần số tới hạn nằm trong vùng sóng radio đối với tầng điện li ($N = 10^6$) và trong vùng cực tím đối với natri kim loại ($N = 2,5 \times 10^{22}$).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Xem Bài tập 5044.

(b) Đối với sóng tới vuông góc, nếu chiết suất là số thực, sẽ có cả sự truyền qua và sự phản xạ. Lấy biên độ của sóng tới là E_0, khi đó biên độ của sóng phản xạ và hệ số phản xạ tương ứng là (Bài tập 4011)

$$E_0' = \frac{1-n}{1+n} E_0 , \quad R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 .$$

và biên độ của sóng truyền qua và hệ số truyền qua lần lượt là

$$E_0'' = \frac{2}{1+n}E_0, \quad T = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Nếu n là số phức, sóng truyền đi sẽ suy giảm dần theo hàm mũ, do vậy thực sự chỉ có sự phản xạ xảy ra (xem Bài tập **5044**).

Chiết suất là $n = (1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}$, ở đó $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ trong hệ đơn vị SI và $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$ trong hệ đơn vị Gauss. n là số thực đối với $\omega > \omega_p$ và là ảo đối với $\omega < \omega_p$. Như vậy ω_p có thể được coi như tần số tới hạn.

(d) Đối với êlectron

$$e = 1,6 \times 10^{-19}\ \text{C}, \quad m = 9,1 \times 10^{-31}\ \text{kg}.$$

Với $N = 10^6/\text{cm}^3$ đối với tầng điện ly và $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m, ta có

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} = \left(\frac{10^6 \times 10^6 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5,64 \times 10^7\ \text{s}^{-1},$$

trong vùng tần số radio.

Đối với natri kim loại, $N = 2,5 \times 10^{22}/\text{cm}^3$, do vậy

$$\omega_p = \left(\frac{2,5 \times 10^{22} \times 10^6 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 8,91 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1},$$

trong vùng cực tím.

5048

Giả thiết rằng tầng điện ly bao gồm một plasma đồng đều có các êlectron tự do và bỏ qua sự va chạm.

(a) Hãy tìm biểu thức cho chiết suất qua tần số đối với các sóng điện từ truyền trong môi trường này.

(b) Bây giờ giả thiết rằng có một từ trường ngoài tĩnh, đều do Trái Đất sinh ra, song song với hướng truyền của các sóng điện từ. Trong trường hợp này các sóng phân cực tròn trái và phải sẽ có chiết suất khác nhau; hãy tìm biểu thức cho các chiết suất đó.

(c) Có một tần số nhất định mà dưới nó sóng điện từ đến plasma bị phản xạ hoàn toàn. Hãy tính tần số này cho cả sóng phân cực trái và phải, biết mật độ của êlectron là 10^5 cm^{-3} và $B = 0,3$ gauss.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a), (b) Xem Bài tập **5045**.

(c) Chiết suất n của plasma được cho bởi công thức

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

trong đó $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}$ là tần số plasma, N là mật độ của êlectron tự do. Khi $n^2 < 0$, n là số ảo và các sóng điện từ có tần số (góc) ω không thể truyền trong plasma. Do đó tần số cắt là tần số đối với $n = 0$, nghĩa là ω_p.

Đối với những tần số $< \omega_p$, sóng sẽ phản xạ hoàn toàn do plasma. Đối với các sóng phân cực tròn phải và trái, chiết suất n_R và n_L được cho bởi (Bài tập **5045**)

$$n_\mp^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)},$$

trong đó $n_- = n_R$, $\omega_c = \frac{eB}{mc}$. Tần số cắt được cho bởi $n_\mp^2 = 0$. Như vậy tần số cắt đối với các sóng phân cực tròn phải và trái tương ứng là

$$\omega_{Rc} = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}, \qquad \omega_{Lc} = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}.$$

Với $N = 10^5/\text{cm}^3$, $B = 0,3$ Gs, và $m = 9,1 \times 10^{-28}$ g, $e = 4,8 \times 10^{-10}$ e.s.u đối với êlectron, ta có

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi \times 10^5 \times (4,8 \times 10^{-10})}{9,1 \times 10^{-28}} = 3,18 \times 10^{14}\ \text{s}^{-2},$$

$$\omega_c = \frac{4,8 \times 10^{-10} \times 0,3}{3 \times 10^{10} \times 9,1 \times 10^{-28}} = 5,27 \times 10^6\ \text{s}^{-1},$$

và do đó

$$\omega_{Rc} = 2,1 \times 10^7\ \text{s}^{-1}, \quad \omega_{Lc} = 1,5 \times 10^7\ \text{s}^{-1}.$$

5049

Hãy tìm một biểu thức đối với độ xuyên sâu của một sóng điện từ tần số rất thấp vào trong một plasma, trong đó có các êlectron tự do chuyển động. Biểu diễn đáp số của bạn qua mật độ n_0, điện tích e và khối lượng m của êlectron. Từ "rất thấp" nghĩa là gì trong trường hợp này? Chiều sâu tính bằng cm đối với $n_0 = 10^{14}$ cm^{-3} là bao nhiêu?

(*UC, Berkeley*)

Lời giải:

Hệ thức tán sắc đối với một plasma là (Bài tập **5045**)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right),$$

trong đó $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}$ là tần số plasma. Tần số "rất thấp" có nghĩa là tần số thoả mãn $\omega \ll \omega_p$. Với những tần số như vậy k là số ảo. Lấy $k = i\kappa$, trong đó $\kappa = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega_c^2}$, khi đó $e^{ikz} = e^{-\kappa z}$, trục z được lấy dọc theo hướng truyền sóng. Điều này có nghĩa là biên độ sóng giảm dần theo hàm mũ trong plasma. Độ xuyên sâu δ được định nghĩa là độ sâu tính từ bề mặt plasma đến nơi mà ở đó biên độ giảm đi e lần so với giá trị biên độ bề mặt của nó, nghĩa là

$$\kappa\delta = 1,$$

hay

$$\delta = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \approx \frac{1}{\omega_p}.$$

Với $n_0 = 10^{14}$ cm^{-3}, ta có

$$\omega_p = \left(\frac{10^{14} \times 10^6 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 5,64 \times 10^{11}\ \text{s}^{-1},$$

và

$$\delta = \frac{3 \times 10^{10}}{5,64 \times 10^{11}} = 0,053\ \text{cm}.$$

5050

Trong sự có mặt của một từ trường tĩnh, đều **H**, một môi trường có thể trở thành từ hoá. Sự từ hoá có thể tự được liên kết một cách tự hợp với một trường điện từ được thiết lập trong môi trường đó.

(a) Hãy viết ra phương trình chuyển động biểu thị sự biến thiên theo thời gian của độ từ hoá dưới ảnh hưởng của một từ trường (thông thường phụ thuộc thời gian).

(b) Tất nhiên, một trường điện từ được phát sinh do sự từ hoá phụ thuộc thời gian như được mô tả bằng các phương trình Maxwell thích hợp. Giả thiết hằng số điện môi $\varepsilon = 1$ đối với môi trường từ tính. Hãy tìm hệ thức tán sắc $\omega = \omega(k)$ đối với sự truyền của một sóng phẳng từ hoá trong môi trường đó.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Giả thiết môi trường đó là tuyến tính, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, theo định nghĩa của độ từ thẩm μ, ta có

$$\mathbf{M}(t) = \chi_m(\omega)\mathbf{H}(t) = \frac{\mu(\omega) - 1}{4\pi}\mathbf{H}(t) .$$

(b) Các phương trình Maxwell đối với môi trường này là

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho , \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ,$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} .$$

Nhớ rằng $\mathbf{B}$ trong các phương trình này là sự chồng chập của trường ngoài và trường phụ thuộc thời gian do độ từ hoá $\mathbf{M}(t)$ sinh ra.

Xét môi trường cách điện và không tích điện, khi đó $\rho = \mathbf{j} = 0$. Đồng thời $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ vì $\varepsilon = 1$. Bây giờ các phương trình Maxwell đơn giản hóa thành

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ,$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$

với

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} .$$

Từ những phương trình này, suy ra phương trình sóng là

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 .$$

Xét nghiệm sóng phẳng

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} .$$

Thay thế vào phương trình sóng ta nhận được hệ thức tán sắc

$$k^2 - \mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0\,,$$

hay

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu(\omega)}\,.$$

Độ từ hoá **M** khi đó có thể biểu thị bằng một sóng phẳng

$$\mathbf{M}(t) = \chi_m(\omega)\mathbf{H}(t) = \chi_m \mathbf{H}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,.$$

Vì **M** thoả mãn phương trình sóng giống như vậy, nên hệ thức tán sắc ở trên còn đúng.

5051

Trong một lý thuyết cổ điển về sự tán sắc ánh sáng trong một môi trường điện môi trong suốt, người ta giả thiết rằng sóng ánh sáng tương tác với các êlectron nguyên tử được liên kết trong các thế dao động tử điều hoà. Trong trường hợp đơn giản nhất, môi trường chứa N êlectron trong một đơn vị thể tích với tần số cộng hưởng ω_0 giống nhau.

(a) Hãy tính tín hiệu đáp của một êlectron như vậy đối với một sóng điện từ phẳng phân cực thẳng có biên độ điện trường E_0 và tần số ω.

(b) Đối với môi trường đó, hãy đưa ra biểu thức cho độ phân cực nguyên tử, độ cảm điện môi và chiết suất như một hàm của tần số ánh sáng. Điều gì xảy ra ở gần cộng hưởng? Điều gì xảy ra trên cộng hưởng? Tốc độ pha của sóng ánh sáng vượt quá tốc độ của ánh sáng trong chân không nếu chiết suất trở nên nhỏ hơn 1. Điều này có trái với các nguyên lý của thuyết tương đối hẹp không?

(*SUNY, Buffalo*)

Lời giải:

(a) Phương trình chuyển động đối với êlectron là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2\mathbf{x} - e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\,.$$

Xét nghiệm của trạng thái ổn định là $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$. Thay thế vào phương trình trên ta được

$$\mathbf{x} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\, e^{-i\omega t}\,.$$

(b) Giả thiết rằng mỗi nguyên tử chỉ đóng góp một êlectron dao động. Mômen lưỡng cực điện của nguyên tử trong trường của sóng ánh sáng là

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = -\frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

suy ra hệ số phân cực nguyên tử

$$\alpha = \frac{p}{E} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Vì có N êlectron trong một đơn vị thể tích, độ phân cực của môi trường là

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \frac{Ne^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Theo định nghĩa, cảm ứng điện là

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Do đó hằng số điện môi là

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Giả thiết môi trường là không sắt từ, khi đó $\mu = \mu_0$, và chiết suất được cho bởi công thức

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Đặt

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0},$$

ta có

$$n = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Đối với $\omega < \omega_0$, ta có $\varepsilon > \varepsilon_0$, $n > 1$, và tốc độ pha của sóng trong môi trường là $v_p = \frac{c}{n} < c$.

Đối với $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2}$, n là số thực nhưng nhỏ hơn so với 1. Điều này có nghĩa là $v_p > c$ và sóng truyền với một tốc độ lớn hơn so với tốc độ ánh

sáng trong không gian tự do. Tuy nhiên, năng lượng hoặc tín hiệu đều được sóng mang đi với tốc độ nhóm v_g được xác định bởi

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}$$

vì $k = \frac{\omega n}{c}$. Phương trình (1) cho

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{cn}\left(\frac{\omega^2 - n^2\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) > \frac{1}{cn} = \frac{v_p}{c^2}$$

do $n > 1$. Khi đó vì $v_p > c$, nên $v_g < c$. Do đó không trái với các nguyên lý của thuyết tương đối hẹp. Đối với cả hai trường hợp trên, n tăng cùng với sự tăng của ω và sự tán sắc được gọi là bình thường.

Đối với $\omega \approx \omega_0$, phương trình (1) không còn đúng nữa, nhưng sự tắt dần (do va chạm và phát xạ) vẫn cần phải được tính đến. Phương trình (1) được sửa đổi thành

$$\begin{aligned} n &\approx \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0 - \omega)}{\gamma^2\omega_0}. \end{aligned}$$

Như vậy $n \approx 1$ đối với $\omega = \omega_0$. Vì ω tăng từ một giá trị nhỏ hơn so với ω_0 đến một giá trị lớn hơn so với ω_0, n giảm từ một giá trị lớn hơn so với 1 đến một giá trị nhỏ hơn so với 1. Trong vùng này n giảm khi ω tăng và sự tán sắc được gọi là không bình thường (dị thường).

Đối với $\omega > \sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2}$, n là số ảo sao cho $k = \frac{\omega}{c}n$ cũng là số ảo. Đặt $k = i\kappa$. Khi đó biên độ sóng tại một điểm cách bề mặt của môi trường một khoảng cách r giảm dần theo $e^{-\kappa r}$ và không có khả năng truyền sóng trong môi trường.

Gần cộng hưởng $\omega \approx \omega_0$, hệ số hấp thụ trở thành rất lớn. Như vậy môi trường về bản chất không trong suốt đối với sóng tại $\omega \approx \omega_0$ và đối với $\omega > \sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2}$.

5052

Xét một mô hình của một môi trường đẳng hướng gồm N hạt dao động điều hoà có điện tích e, khối lượng m và tần số riêng ω_0, trong một đơn vị thể tích.

(a) Hãy chứng minh rằng đối với từ trường bằng 0, hằng số điện môi của môi trường được cho bởi

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

(b) (Hiệu ứng Faraday) Bây giờ đưa thêm vào một từ trường **B** theo hướng truyền của sóng điện từ. Hãy chứng minh rằng các sóng điện từ phân cực tròn trái và phải có các hằng số điện môi khác nhau với hiệu của chúng bằng

$$\delta\varepsilon(\omega) = \frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{2eB\omega/mc}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (eB\omega/mc)^2}\,.$$

(Chicago)

Lời giải:

(a) Xem Bài tập **5051**.

(b) Lấy trục z dọc theo hướng của sự truyền sóng, khi đó $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$. Khi một từ trường tĩnh $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ được đưa thêm vào, phương trình chuyển động đối với các hạt dao động điều hoà là

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -m\omega_0^2\mathbf{x} + e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}\,.$$

Vì các sóng điện từ phẳng là sóng ngang, **E** chỉ có thành phần x và y. Các phương trình thành phần là

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + eE_x + \frac{e}{c}B\dot{y}\,,$$

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y + eE_y - \frac{e}{c}B\dot{x}\,,$$

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z.$$

Phương trình cuối cùng chỉ ra rằng chuyển động theo hướng z là dao động điều hoà nhưng không bị ảnh hưởng bởi trường ngoài, do đó có thể bỏ qua được. Đối với sóng phân cực tròn phải (Bài tập **5045**)

$$\mathbf{E}_R = E_0\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - E_0\sin(\omega t)\mathbf{e}_y\,,$$

nên các phương trình chuyển động còn lại là

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + eE_0\cos\omega t + \frac{e}{c}B\dot{y}\,, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - eE_0 \sin\omega t - \frac{e}{c} B\dot{x} \,. \tag{2}$$

Đặt

$$u = x + iy \,, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \,;$$

$(1) - i \times (2)$ cho

$$\ddot{u} - i\omega_c \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{eE_0}{m} (\cos\omega t + i \sin\omega t) = \frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} \,.$$

Trong trạng thái ổn định, $u \sim e^{i\omega t}$. Thay thế vào phương trình trên ta được

$$u = \frac{eE_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,.$$

Tách phần thực và phần ảo ta có

$$x = \frac{eE_0 \cos\omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,, \quad y = -\frac{eE_0 \sin\omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,.$$

Tổ hợp các phương trình trên dưới dạng vectơ, ta có

$$\mathbf{x} = \frac{e\mathbf{E}_\mathrm{R}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,.$$

Do đó sự phân cực của môi trường do sóng phân cực tròn phải là

$$\mathbf{P} = Ne\mathbf{x} = \frac{Ne^2\mathbf{E}_\mathrm{R}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,.$$

Vì $\varepsilon = 1 + 4\pi \frac{P}{E}$, phương trình trên cho

$$\varepsilon_\mathrm{R} = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_c)} \,.$$

Tương tự đối với sóng phân cực tròn trái

$$\mathbf{E}_\mathrm{L} = E_0 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + E_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_y \,,$$

Ta tìm được

$$\varepsilon_\mathrm{L} = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\omega_c)} \,.$$

Do đó hiệu giữa $\varepsilon_{\rm L}$ và $\varepsilon_{\rm R}$ là

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_{\rm L} - \varepsilon_{\rm R} \\ &= \frac{4\pi Ne^2}{m}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\omega_{\rm c}} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\omega_{\rm c}}\right] \\ &= \frac{4\pi Ne^2}{m}\cdot\frac{2eB\omega/mc}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (eB\omega/mc)^2}\,.\end{aligned}$$

5053

Một plasma không có va chạm, trung hoà về điện có mật độ đồng đều n_0 ở trạng thái đứng yên và được một từ trường đều $(0,\ 0,\ B_0)$. Xét một sóng điện từ có tần số ω truyền song song với từ trường này. Chứng minh rằng sóng đó tách thành hai sóng có các chiết suất là

$$n_{\rm R}^2 = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2/\omega^2}{1 - (\omega_{\rm c}/\omega)}\,, \quad n_{\rm L}^2 = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2/\omega^2}{1 + (\omega_{\rm c}/\omega)}\,,$$

trong đó tần số plasma là $\omega_{\rm p} = (4\pi n_0 e^2/m_{\rm e})^{\frac{1}{2}}$ và tần số cyclotron là $\omega_{\rm c} = eB_0/m_{\rm e}c$. Chứng minh rằng các sóng này là sóng phân cực tròn phải và sóng phân cực tròn trái. Hãy giải thích về mặt vật lý tại sao chiết suất lại có thể nhỏ hơn 1. Điều gì xảy ra khi nó biến mất? Điều gì xảy ra khi nó trở thành vô hạn? (Có thể giả thiết rằng chỉ có các êlectron đáp lại sóng còn các điện tích dương vẫn còn phân bố đồng đều).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Giả thiết plasma trung hoà bao gồm các êlectron tự do và các điện tích dương có số lượng bằng nhau. Chỉ những êlectron tự do tần số $\omega_0 = 0$, mới tham gia đáng kể vào các dao động. Sử dụng kết quả của Bài tập **5045** khi $\mu \approx \mu_0 = 1$, ta có

$$n_{\rm R}^2 = \varepsilon_{\rm R} = 1 - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_{\rm e}\omega^2(1 - \omega_{\rm c}/\omega)} = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega(\omega - \omega_{\rm c})}\,.$$

$$n_{\rm L}^2 = \varepsilon_{\rm L} = 1 - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_{\rm e}\omega^2(1 + \omega_{\rm c}/\omega)} = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega(\omega + \omega_{\rm c})}\,.$$

Vì vận tốc pha của các sóng điện từ trong môi trường bằng $c(\mu\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx c\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, có thể vượt quá tốc độ ánh sáng c trong chân không, nên

chiết suất $n = \frac{c}{v}$ có thể nhỏ hơn so với 1. Về mặt vật lý, vì

$$n \approx \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + 4\pi\chi_e}\,.$$

trong đó χ_e là hệ số phân cực của môi trường, $n < 1$ có nghĩa là $\chi_e < 0$. Vì mômen lưỡng cực điện trên một êlectron là $\mathbf{p} = \chi_e \mathbf{E}$, điều này nghĩa là vectơ phân cực $\mathbf{P}$ của môi trường sinh ra bởi các sóng bên ngoài phản song song với $\mathbf{E}$.

Với $\omega_0 = 0$, tốc độ nhóm $v_g = cn$ (Bài tập **5051**). Như vậy $v_g = 0$ khi $n = 0$. Điều này nghĩa là một tín hiệu bao gồm các sóng như vậy sẽ quay trở lại tại điểm đó. Xét trường hợp $n_L^2 = 0$. Ta có

$$\omega^2 + \omega_c\omega - \omega_p^2 = 0\,,$$

hay

$$\omega = \omega_{Lc} = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}\,.$$

Tương tự đối với $n_R^2 = 0$

$$\omega = \omega_{Rc} = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}\,.$$

Như vậy $\omega_{Rc} > \omega_{Lc}$. Nếu $\omega > \omega_{Rc}$, khi đó cả n_R và n_L là số thực và sự truyền sóng đều có thể đối với cả hai sự phân cực. Một sóng điện từ phẳng trong môi trường sẽ tách thành hai sóng phân cực tròn với các chiết suất khác nhau. Nếu $\omega_{Rc} > \omega > \omega_{Lc}$, n_R là số ảo và sự truyền sóng có khả năng chỉ là sóng phân cực tròn trái. Một sóng điện từ phẳng sẽ trở thành sóng phân cực tròn trái trong môi trường này. Nếu $\omega < \omega_{Lc}$, khi đó sự truyền sóng là không thể đối với cả hai phân cực tròn. Nhớ rằng đối với n là ảo, tức $n = i\eta$, $e^{ikr} = e^{-\eta r}$ và biên độ giảm dần theo hàm mũ.

Nếu $\omega = \omega_c$, thì $n_R = i\infty$, $n_L = (1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_c^2})^{\frac{1}{2}}$. Vì nói chung $\omega_p \gg \omega_c$ nên n_L cũng là một số ảo lớn. Không có khả năng truyền sóng. Cả hai n_R, $n_L = i\infty$ nếu $\omega = 0$. Trong trường hợp như vậy, không có sóng mà chỉ có một trường tĩnh điện tách các điện tích âm và dương tại biên của plasma. Khi đó bề mặt plasma có tác dụng như một tấm chắn đối với các trường tĩnh điện bên ngoài.

5054

Một nguồn radio trong không gian phát ra một xung "nhiễu" chứa một dải rộng tần số. Do sự tán sắc trong môi trường giữa các vì sao, xung này đến Trái Đất như một tiếng rít có tần số thay đổi theo thời gian. Nếu tốc độ của sự thay đổi (tần số theo thời gian) này đo được và khoảng cách D đến nguồn được biết, hãy chứng minh rằng có thể suy ra mật độ êlectron trung bình trong môi trường giữa các vì sao (giả thiết được ion hoá hoàn toàn). (Gợi ý: Hãy xem tín hiệu đáp của một điện tử tự do đối với một điện trường tần số cao để suy ra mối quan hệ giữa tần số và số sóng $2\pi/\lambda$).

(CUSPEA)

Lời giải:

Coi môi trường giữa các vì sao như một plasma loãng, từ Bài tập **5044** ta có

$$n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

trong đó ω là tần số của sóng radio truyền đi, $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$ là tần số plasma của môi trường, N là mật độ trung bình của các êlectron trong môi trường. Với số sóng $k = \frac{\omega}{c} n$, tốc độ nhóm v_g của sóng điện từ được cho bởi

$$v_g^{-1} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}.$$

Phương trình (1) cho $\frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \cdot \frac{1}{n}$, do đó

$$v_g = nc\left(n^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1} = nc.$$

Vì một xung truyền với tốc độ nhóm, nên thời gian truyền từ nguồn đến Trái Đất tính gần đúng là

$$t = \frac{D}{v_g} = \frac{D}{nc} = \frac{D}{c}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Như vậy

$$dt = \frac{D}{c} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\right) d\omega,$$

hay

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{c}{D}\frac{\omega^3}{\omega_p^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Vậy, nếu D và $\frac{d\omega}{dt}$ đã biết, ta có thể tính được $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ và do đó tính được mật độ êlectron trung bình N.

5055

Một pulsar phát ra một xung bức xạ điện từ dải rộng, có độ rộng là 1 mili giây. Xung này truyền trên khoảng cách 1000 năm ánh sáng (10^{21} cm) qua không gian giữa các vì sao để tới các đài thiên văn vô tuyến trên Trái Đất.

(a) Độ rộng dải tần số cực tiểu của một máy thu kính thiên văn vô tuyến phải là bao nhiêu để hình dạng của xung quan sát được không bị biến dạng nhiều?

(b) Bây giờ xét môi trường giữa các vì sao chứa một plasma mật độ thấp (tần số plasma $\omega_p = 5000$ rad/s). Hãy ước lượng hiệu thời gian đến của xung được đo đối với các kính thiên văn hoạt động tại tần số 400 MHz và 1000 MHz. Cần nhớ rằng hệ thức tán sắc đối với một plasma là $\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2$.

(*MIT*)

Lời giải:

(a) Nguyên lý bất định $\Delta\nu\Delta t \approx 1$ cho độ rộng dải cực tiểu của các máy thu kính thiên văn radio như sau

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t} = 10^3 \text{ Hz}.$$

(b) Tốc độ nhóm của các sóng điện từ trong môi trường giữa các vì sao là

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}.$$

Đối với các tần số hoạt động $\omega_1 = 4 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 10^9 \text{ s}^{-1}$ ta có

$$\frac{\omega_p}{\omega_1} = 1,25 \times 10^{-5}, \quad \frac{\omega_p}{\omega_2} = 10^{-6}.$$

Với một khoảng cách giữa các vì sao $L = 10^{19}$ m, hiệu thời gian đến của xung đo được là

$$\Delta t = \frac{L}{v_{g1}} - \frac{L}{v_{g2}} = \frac{L}{c}\left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\approx \frac{L}{2c}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_2}\right)^2\right] = 0,052 \text{ s}.$$

5056

Một pulsar phát các bùng nổ sóng radio cách đều, đã được quan sát tại các tần số $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2563$ MHz và $\omega_2 = 2\pi f_2 = 3833$ MHz. Chú ý rằng thời gian đến của các bùng nổ bức xạ này bị chậm lại ở các tần số thấp: xung tại f_1 đến $0,367$ giây sau xung tại f_2. Nếu gán sự chậm trễ này do sự tán sắc trong môi trường giữa các vì sao mà ta giả thiết nó bao gồm hiđrô bị ion hoá với 10^5 êlectron trên một m^3, thì sẽ cho phép ước lượng khoảng cách từ pulsar này đến Trái Đất.

(a) Hãy chứng minh rằng tần số plasma đối với một khí trung hoà loãng bao gồm các ion nặng và các êlectron tự do được cho trong hệ đơn vị Gauss bởi:

$$\omega_\mathrm{p} = \left(\frac{4\pi N e^2}{m_\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

trong đó N là mật độ êlectron.

(b) Sử dụng kết quả trên và nhớ rằng chiết suất của plasma loãng được cho bởi công thức $n = \sqrt{\varepsilon} = (1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}$, hãy tính khoảng cách của êlectron.

(Chicago)

Lời giải:

(a) Trong một plasma trung hoà, khi sự phân bố của các êlectron bị nhiễu loạn và lượn sóng không đồng đều, thì một điện trường sẽ được sinh ra làm cho các êlectron chuyển động theo cách có xu hướng làm plasma quay trở lại trạng thái trung hoà. Tần số (góc) đặc trưng của sự lượn sóng có thể được tính như sau. Xét một êlectron của plasma trong một điện trường **E**, phương trình chuyển động là

$$m_\mathrm{e}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

Sự chuyển động của các êlectron sinh ra một mật độ dòng điện:

$$\mathbf{j} = -Ne\mathbf{v}.$$

Tổ hợp các phương trình trên ta có:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{Ne^2}{m_\mathrm{e}}\mathbf{E},$$

hay, lấy đive của hai vế, ta được:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{j}) = \frac{Ne^2}{m}\nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Dùng phương trình liên tục $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ và phương trình Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, ta nhận được

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{4\pi N e^2}{m_e}\rho = 0 ,$$

hay

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho = 0$$

với

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m_e}} .$$

Phương trình này chứng tỏ ra rằng mật độ điện tích tại một điểm thực hiện dao động điều hoà với tần số đặc trưng (tần số góc) ω_p.

(a) Sử dụng kết quả của Bài tập **5055** ta tìm được khoảng cách từ pulsar đến Trái Đất là

$$L = c\Delta t \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1} .$$

Tần số plasma êlectron

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m_e}} = \sqrt{4\pi N r_0 c^2} = 1,79 \times 10^4 \text{ s}^{-1} ,$$

với $r_0 = 2,82 \times 10^{-13}$ cm là bán kính cổ điển của êlectron.

Các tần số (góc) quan sát được là $\omega_1 = 2,563 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 3,833 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$. Vì $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_p$ ta có gần đúng

$$L \approx \frac{2c\Delta t}{\omega_p^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)} .$$

Với $\Delta t = 0,367$ s,

$$L = 8,16 \times 10^{20} \text{ cm} = 8,5 \times 10^2 \text{ năm ánh sáng.}$$

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT
Giám đốc Công ty Sách dịch và Từ điển Giáo dục NGUYỄN NHƯ Ý

Biên tập lần đầu:
PHẠM VĂN THIỀU
ĐỖ THỊ TỐ NGA

Biên tập tái bản:
ĐẶNG VĂN SỬ

Xử lý bìa:
HOÀNG ANH TUẤN

Sửa bản in:
CÔNG TY CP SÁCH DỊCH VÀ TỪ ĐIỂN GIÁO DỤC

Chế bản:
NGUYỄN HỮU ĐIỂN

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI ĐIỆN TỬ HỌC

Mã số: 8Z075z0-SBQ

In 1000 cuốn (QĐ: 3394/QĐ-GD), khổ 16x24cm,
tại Công ty cổ phần In Phúc Yên - Đường Trần Phú, TX. Phúc Yên
Số xuất bản: 114-2010/CXB/46-129/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2010

Bài tập và lời giải của các
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Bộ sách gồm 7 cuốn:

Bài tập và lời giải

1. Cơ học
2. Cơ học lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học và vật lý thống kê
5. Điện từ học
6. Vật lý nguyên tử, hạt nhân và các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, thuyết tương đối và các vấn đề liên quan

Bộ sách tuyển chọn 2550 bài tập từ các bài thi kiểm tra chất lượng và kiểm tra đầu vào của các trường đại học nổi tiếng ở Hoa Kỳ, bao quát toàn diện các vấn đề của vật lý học. Các câu hỏi trải rộng trên nhiều chủ đề, có những bài vận dụng nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý, áp dụng linh hoạt nhiều nguyên lý và định luật vật lý, đưa ra các tình huống sát thực và cập nhật, không đòi hỏi nhiều các kỹ năng về toán.

Các lời giải được đưa ra để gợi ý sinh viên tự giải quyết vấn đề hơn là hướng dẫn thao tác từng bước.

Bộ sách là tài liệu tham khảo quý bổ trợ cho các sách giáo khoa, giáo trình chuyên ngành vật lý.



Công ty cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục
25 Hàn Thuyên - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Tel/Fax: 04.39726508 - 04.38266359
www.tudiengiaoduc.com.vn
Mua sách tại: www.sach24.vn; www.vinabook.com







Giá: 98.800 đ